

Fundo estocástico de ondas gravitacionais

João Paulo G. do Nascimento¹ e Fábio Cabral Carvalho²

¹Sec. do Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer, Rio Grande do Norte

²Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Resumo

Ondas gravitacionais são previsões teóricas da relatividade geral de Einstein, as quais são formadas quando o tecido do espaço-tempo é deformado. Em outubro de 2017 o observatório LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) conseguiu detectar diretamente ondas gravitacionais geradas pela fusão de duas estrelas de nêutrons. Essa descoberta se mostrou de grande importância para a astronomia moderna pelo fato dessas ondas trazerem consigo informações das fontes que as geraram. No presente artigo, estudamos o fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado devido a fusão de estrelas de nêutrons, usando diferentes modelos cosmológicos. Para isso utilizamos duas parametrizações dependentes do tempo na equação de estado $\omega(z)$, com o objetivo de verificar quais seriam as consequências finais no fundo estocástico gerado por essas ondas, em comparação ao que o modelo padrão da cosmologia prevê.

Abstract

Gravitational waves are theoretical predictions of Einstein's general relativity, which are formed when the fabric of space-time is deformed. In October 2017 the LIGO observatory (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) was able to directly detect gravitational waves generated by the fusion of two neutron stars. This discovery proved to be of great importance for the modern astronomy because these waves bring information of the sources that generated them. In this paper we studied the stochastic background of gravitational waves generated due the fusion of neutron stars, using different cosmological models. We used two time dependent parametrizations in the state equation $\omega(z)$, in order to verify what would be the final consequences in the stochastic background generated by these waves, compared to what the standard model of cosmology predicts.

Palavras-chave: ondas gravitacionais, estrela de nêutrons, modelos cosmológicos.

Keywords: gravitational waves, neutron stars, cosmological models.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v2n1.32668](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v2n1.32668)

1 Introdução

As ondas gravitacionais (OGs), previstas pela relatividade geral (RG) há mais de 100 anos, são perturbações da geometria do espaço-tempo que transportam energia e se propagam a uma velocidade igual a da luz. Existem dois tipos de OGs, as de origem astrofísica e as de origem cosmológica. As OGs astrofísicas são causadas pelo movimento acelerado de objetos compactos como buracos negros (BN), estrelas de nêutrons (EN), fusão de buracos negros (BNBN) ou de estrelas de nêutrons (ENEN), dentre outros objetos astrofísicos. As OGs cosmológicas são aquelas que se originaram no Universo primordial, quando a matéria era opaca a radiação eletromagnética. Essas relíquias do Universo podem servir como um

excelente mensageiro, permitindo a obtenção de informações sobre essa época de forma análoga ao modo como a radiação cósmica de fundo em micro-ondas oferece dados relacionados às condições quando o Universo tinha 380 mil anos.

A detecção dessas ondas é de grande importância e interesse para a comunidade científica, pois carrega informações preciosas sobre as fontes que as geraram, tais como populações e processos de origem astrofísica, e também sobre os processos que ocorreram quando o Universo ainda era muito jovem [1]. O problema está na dificuldade de detecção, pelo fato de tais ondas terem amplitude da ordem de 10^{-21} [2], e também porque as OGs interagem com a matéria muito fracamente.

Apesar das dificuldades técnicas, muito se tem

feito para tentar encontrar sinais dessas ondas, incluindo a construção de vários detectores, dentre os quais podemos citar aqueles que utilizam interferometria à laser. Talvez os mais conhecidos sejam o Virgo e o LIGO. Entre os detectores citados, LIGO foi o primeiro a obter sucesso. Inicialmente com a detecção em setembro de 2015, gerada pela coalescência de dois BNs com massas de $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$ e $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$, à uma distância de luminosidade de 410_{-180}^{+160} Mpc. Esta descoberta foi divulgada em fevereiro de 2016 e tornou-se uma das maiores descobertas científicas dos últimos tempos [3]. Depois vieram outras observações em conjunto com o Virgo, incluindo a detecção GW170817 [4], causada pela fusão de duas estrelas de nêutrons, e a mais recente até o momento em que esse artigo foi escrito, chamada de GW190521 [5], que foi a OG cuja fonte foi a mais massiva observada até o momento, causada pela fusão de BNs.

As fontes de OGs possuem características específicas que as definem e que podem ser esquetizadas segundo sua classificação. Tais características se refletem nos aspectos das próprias OGs. Nesse artigo trabalharemos com as fontes de fundos estocásticos que, diferentemente de outras fontes, são formados não por um único evento, mas por várias fontes individuais, que se unem para formar o fundo estocástico.

Para caracterizar o espectro de OGs é preciso recorrer a parâmetros astrofísicos e cosmológicos, dessa forma se torna necessário escolhermos um modelo que descreva como o Universo onde tais ondas se propagarão, comporta-se. O nosso objetivo aqui é utilizar além do modelo padrão, um modelo cosmológico parametrizado no cálculo do fundo estocástico de OGs gerada pela fusão de ENs. Para isto falaremos sobre o fundo estocástico gerado pela fusão de ENs, veremos as propriedades espectrais que caracterizam esse fundo, tais como as astrofísicas e cosmológicas, também vamos propor utilizar duas parametrizações na equação de estado $\omega(z)$.

2 Parâmetros cosmológicos

Faremos aqui uma breve discussão sobre alguns conceitos relevantes da cosmologia moderna que serão usados no decorrer do artigo.

2.1 O conteúdo do Universo

A matéria em escalas cosmológicas se comporta como um fluido perfeito, cujas componentes se movem ao longo de geodésicas do tipo tempo que não se interceptam a não ser em um ponto no passado.

Dessa forma, podemos assumir o Universo composto por um fluido com densidade e pressão. Sendo o tensor energia-momento, no qual as quantidades u^{α} e u^{β} são as quadrivelocidades do fluido no referencial comóvel, dado por

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}u^{\beta} - pg^{\alpha\beta}, \quad (1)$$

onde ρ e p são a densidade e a pressão, respectivamente. Utilizando a lei de conservação,

$$T^{\alpha\beta};_{\beta} = 0, \quad (2)$$

podemos encontrar a equação

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3)$$

Através do *postulado de Weyl* podemos definir equações de estado, dentro da aproximação de que o Universo é composto por um fluido perfeito. Definimos, então

$$p = \omega\rho, \quad (4)$$

onde ω é adimensional e tem um valor para cada tipo de fluido perfeito. Fazendo a substituição na equação de conservação e realizando a integração, temos

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (5)$$

O valor $\omega = 0$ corresponde ao Universo dominado por matéria sem pressão. Por outro lado, se tivermos $\omega = 1/3$, obteremos o Universo dominado por radiação ou matéria relativística, e para $\omega = -1$ tem-se o Universo dominado por uma constante cosmológica.

A densidade de energia do Universo tem contribuições de diferentes conteúdos. Sendo o Universo plano, ou seja $k = 0$, temos

$$\rho = \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{\Lambda}, \quad (6)$$

onde $\rho_{m,0}$ corresponde a densidade de matéria na presente época. Atualmente se sabe que a contribuição da densidade de radiação é desprezível quando o fundo estocástico de OGs foi gerado, de modo que nesse trabalho consideramos essa

componente como sendo nula. Aqui, adotamos $a_0 = 1$.

No caso em que ω não for constante, mas sim uma função $\omega = \omega(z)$, vemos que a densidade, diferente da Eq. (5), será dada por

$$\rho_{\omega(z)} = \rho_{\omega(z),0} e^{3f(z)}, \quad (7)$$

onde $f(z) = \int \frac{dz}{(1+z)} (1 + \omega(z))$, e agora a densidade de energia total do Universo pode ser escrita como

$$\rho = \rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{\omega(z),0} e^{3f(z)}. \quad (8)$$

Podemos ver que, se $\omega = -1$ na Eq. (8), nós voltamos ao caso descrito em (6).

A Eq. (7) pode ser utilizada devido ao fato da energia escura ser de natureza ainda desconhecida. A constante cosmológica surge como uma solução simples e prática para explicar a energia escura, mas traz divergências em seu valor de mais de 100 ordens de grandeza entre o valor observado e o valor previsto pelos modelos [6]. Assim, é aceitável considerar que na equação da energia escura ω tenha dependência com o *redshift* com o intuito de encontrar uma explicação razoável para a aceleração do Universo.

2.2 Densidade crítica

Um parâmetro de bastante importância na cosmologia é a *densidade crítica do Universo*, que nos mostra qual deve ser a densidade do Universo se o mesmo tiver sua seção espacial plana. Podemos ver isso nas equações de Friedmann, em que $\Lambda = \rho_{\Lambda} 8\pi G$ [7], sendo a densidade total do Universo $\rho = \rho_m + \rho_{\Lambda}$, com $k = 0$, temos a densidade crítica,

$$\rho_{cri} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (9)$$

Se a densidade do Universo for maior que a densidade crítica, então teremos o Universo fechado. Mas se a densidade for menor, teremos o Universo aberto.

2.3 Parâmetro de densidade

Podemos agora definir o *parâmetro de densidade do Universo*, que mede a densidade total do Universo em termos da densidade crítica,

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho}{\rho_{cri}}. \quad (10)$$

O Universo é plano se $\Omega_{tot} = 1$, fechado se $\Omega_{tot} > 1$ e aberto se $\Omega_{tot} < 1$. O parâmetro de

densidade total tem contribuições de cada tipo de conteúdo do Universo em comparação com a densidade crítica.

Sendo o Universo é plano, temos

$$\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_m}{\rho_{cri}} + \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{cri}}. \quad (11)$$

2.4 Parâmetro de Hubble

Agora podemos reescrever o parâmetro de Hubble para Universo plano, utilizando as Eqs. (5) e (10). Dessa forma, obtemos

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}], \quad (12)$$

onde

$$H = \frac{H_0}{E(\Omega, z)}, \quad (13)$$

e

$$E(\Omega, z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}}}, \quad (14)$$

em que H_0 , $\Omega_{m,0}$ e Ω_{Λ} são os valores atuais da constante de Hubble, parâmetro de densidade de matéria e parâmetro de densidade da constante cosmológica, respectivamente. Para o caso de ω não ser constante, vamos ter a seguinte relação,

$$H = \frac{H_0}{F(\Omega, f, z)}, \quad (15)$$

no qual

$$F(\Omega, f, z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{\omega(z),0} e^{3f(z)}}}. \quad (16)$$

2.5 Tempo e redshift

A relação entre o tempo e o *redshift* pode ser obtida a partir da derivada em relação ao tempo da equação $1+z = a_0/a$. Para a presente época temos $a_0 = 1$, e assim,

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(t). \quad (17)$$

Utilizando a Eq. (13) e integrando, obtemos

$$\int dt = -\frac{1}{H_0} \int \frac{E(\Omega, z)}{(1+z)} dz. \quad (18)$$

Se definirmos o tempo zero como correspondente a um dado *redshift*, então o tempo em que a luz foi emitida que nos alcança com o *redshift* z é dado por [7]

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{E(\Omega, z')}{(1+z')} dz'. \quad (19)$$

2.6 Distâncias cosmológicas

Vamos calcular a distância comóvel para um objeto astrofísico com coordenadas (ϕ, θ, r) que emite um sinal luminoso ou uma OG em nossa direção onde $ds = 0$. Considerando ϕ, θ fixos, o que implica $d\phi = d\theta = 0$, temos a seguinte relação,

$$dr = -\frac{dt}{a} = -(1+z)dt. \quad (20)$$

Usando a Eq. (17), podemos escrever

$$dt = -\frac{1}{H_0} \frac{E(\Omega, z)}{(1+z)} dz, \quad (21)$$

o que implica em

$$dr = \frac{E(\Omega, z)}{H_0} dz. \quad (22)$$

Considerando que estejamos na origem e o objeto emitiu o sinal no passado correspondente a um *redshift* z a uma distância r , obtemos

$$r(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z E(\Omega, z) dz. \quad (23)$$

Este resultado nos fala que, para conhecer a relação entre coordenadas de dois objetos, é preciso que se tenha um modelo cosmológico explícito no qual se possa conhecer a natureza de $E(\Omega, z)$.

Outro parâmetro importante para as medidas de distâncias cosmológicas é o fluxo na superfície de uma fonte esférica de raio R dado por [8]

$$F(R) = \frac{L}{4\pi R^2}, \quad (24)$$

onde $L = \frac{\text{energia}}{\text{tempo}}$ é a luminosidade absoluta.

Para o fluxo que é detectado na Terra, é preciso levar em conta os efeitos cosmológicos da expansão, visto que a emissão ocorreu no passado correspondente a um *redshift* z , onde esse sinal atravessa uma esfera de raio $a(t)r$ que é a distância comóvel, até chegar ao detector terrestre. Dessa forma podemos escrever o fluxo observado no detector como

$$F = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 r^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (25)$$

onde d_L^2 é chamada de *distância de luminosidade*,

$$d_L = (1+z)r. \quad (26)$$

A vantagem em utilizar a equação acima é que podemos continuar usando uma expressão para o fluxo com o inverso do quadrado da distância [9].

3 Propriedades espectrais

O espectro estocástico de OGs é caracterizado pelo parâmetro de densidade de energia gravitacional, dada por [10]

$$\Omega_{og}(\nu_{obs}) = \frac{1}{\rho_{cr}} \frac{d\rho_{og}}{d(\ln(\nu_{obs}))}, \quad (27)$$

onde ρ_{og} é a densidade de energia gravitacional, ν_{obs} a frequência observada e $\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ a densidade crítica. Se tivermos um fundo estocástico de fontes astrofísicas, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma [11],

$$\Omega_{og}(\nu_{obs}) = \frac{1}{c^3 \rho_{cr}} \nu_{obs} F_{obs}(\nu_{obs}), \quad (28)$$

onde F_{obs} é o fluxo de energia na frequência observada ν_{obs} sobre os eventos, podendo ser escrito como,

$$F_{obs} = \int f_{obs}(\nu_{obs}, z) dR = \int f_{obs}(\nu_{obs}, z) \frac{dR}{dz} dz, \quad (29)$$

sendo dR a taxa diferencial de geração de OGs. O parâmetro f_{obs} é o fluxo médio de energia por unidade de frequência, por unidade de área, emitido por uma única fonte, dado por

$$f_{obs}(\nu_{obs}, z) = \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{og}}{d\nu} (1+z)^2. \quad (30)$$

Aqui $d_L = r(z)(1+z)$ é a distância de luminosidade, $\nu = \nu_{obs}(1+z)$ é a frequência no referencial da fonte e o termo $dE_{og}/d\nu$ é o espectro de energia emitido.

A taxa diferencial de geração de OGs por *redshift* depende da taxa de formação por volume comóvel das fontes astrofísicas que irão gerar essas ondas. Essa taxa é dada por [12],

$$\frac{dR}{dz} = \lambda \frac{R_*(z)}{(1+z)} \frac{dV}{dz}, \quad (31)$$

onde dV/dz é o elemento de volume comóvel que dependerá do modelo cosmológico adotado, $R_*(z)$ é a taxa de formação estelar das fontes que podem ser de ENs, BNs, entre outros corpos astrofísicos. Para ENs, a taxa de formação estelar é dado por [12]

$$R_*(z) = h \frac{0,017 + 0,13z}{1 + (z/3,3)^{5,3}} M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-3}, \quad (32)$$

sendo M_{\odot} a massa do sol, e $h = 0,7$ o valor da *constante de Hubble*. Vale ressaltar que a taxa

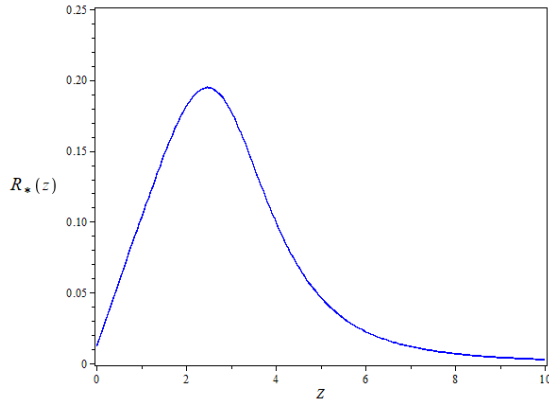


Figura 1: Taxa de formação estelar [13].

de formação acima é válida para *redshifts* de até $z \approx 6$. Em [13] é possível encontrar outras funções para *redshifts* maiores ou menores que 6. Escolhemos a função acima por considerar $z = 6$ já muito alto para os nossos objetivos. O gráfico da taxa de formação em função do *redshift* é dado pela Figura 1.

O parâmetro λ na Eq. (31) é a fração de massa que é convertida em fontes de OGs dado pelo produto $\lambda = \beta_{EN} f_b \lambda_{EN}$, onde β_{EN} é a fração de sistemas binários que, após o segundo evento de supernova de suas estrelas, continuam sendo sistemas binários; f_b fornece a fração de sistemas binários maciços formados em toda a população de estrelas, e λ_{EN} é a fração em massa de progenitores de ENs dada por

$$\lambda_{EN} = \int_{8M_{\odot}}^{40M_{\odot}} \zeta(m) dm = 9 \times 10^{-3} M_{\odot}^{-1}, \quad (33)$$

onde $\zeta(m) = 0.17m^{-2.35}$ é a função de massa inicial de Salpeter [14].

Voltando ao parâmetro de densidade na Eq. (28), podemos substituir o fluxo de energia e obter a seguinte expressão,

$$\Omega_{og}(\nu_{obs}) = \frac{\lambda \nu_{obs}}{4\pi c^3 \rho_{cr}} \int \frac{R_*(z)}{r^2(1+z)} \frac{dE_{og}}{d\nu} \frac{dV}{dz}. \quad (34)$$

A equação acima mostra que o parâmetro de densidade dependerá principalmente de quatro fatores: do espectro de energia $dE_{og}/d\nu$, que por sua vez depende de quais fontes estarão gerando o fundo estocástico; de dV/dz e r que dependem da cosmologia, e do *redshift* z .

O espectro de energia na aproximação de quadrupolo para um sistema binário com massas m_1 e m_2 em órbita circular é dado por [15]

$$\frac{dE_{og}}{d\nu} = K \nu^{-1/3}, \quad (35)$$

onde

$$K = \frac{(G\pi)^{2/3}}{3} m_c^{5/3}. \quad (36)$$

Aqui m_c é chamada massa *chirp*, definida como

$$m_c \equiv \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (37)$$

Um outro parâmetro importante para o cálculo do fundo estocástico é o *ciclo de trabalho*, definido como a razão entre a duração típica de um único evento que gera as OGs, e o intervalo de tempo médio entre vários eventos sucessivos [15],

$$D(z) = \int \bar{\tau}(1+z) \frac{dR}{dz} dz, \quad (38)$$

sendo $\bar{\tau}$ a duração média de um único evento, dado por [16],

$$\bar{\tau}(z) = \frac{5c^5}{256\pi^{8/3} G^{5/3}} [(1+z)m_c]^{-5/3} f_L^{-8/3}, \quad (39)$$

onde f_L é a frequência mais baixa do detector.

Um fundo estocástico de OGs de fontes astrofísicas é produzido se o intervalo de tempo médio entre a ocorrência dos eventos, for menor que o tempo médio de um único evento, assim o ciclo de trabalho deve ser $D > 1$, caso contrário com $D \leq 1$ não se teria um fundo, mas sim eventos amplamente espaçados dependendo de D , que poderiam ser resolvidos individualmente.

4 Coalescência de estrelas de nêutrons binárias

Já vimos na seção anterior as propriedades espectrais que caracterizam um fundo estocástico. Para fusão de ENs temos que assumir na Eq. (37) que $m_1 = m_2 = 1,4M_{\odot}$. Como a fusão ocorre muito depois da formação das estrelas maciças, a taxa de formação estelar na Eq. (32) deve ser substituída pela taxa de coalescência por volume comóvel por unidade de tempo [12],

$$R_c(z) = \int_{\tau_0}^{t_{max}} \frac{1+z}{1+z_f} R_*(z_f) P(t_d) dt_d, \quad (40)$$

onde t_d é tempo de atraso entre a formação e a coalescência do sistema binário, z_f é o *redshift* de formação, τ_0 é o tempo médio que o sistema binário leva para evoluir para um sistema de duas ENs. Dessa forma, τ_0 é o tempo mínimo para que o sistema entre em coalescência, que para ENs

tem o valor de $\tau_0 = 20 \text{ Myr}$ [17]. O fator $(1+z)/(1+z_f)$ converte a taxa do tempo de formação para o tempo de coalescência devido ao efeito de expansão cosmológica [18], o limite superior t_{max} é o tempo máximo de coalescência que é dado pelo tempo de Hubble [19], [20]. $P(t_d)$ é a distribuição de probabilidade por unidade de tempo, que é descrita da seguinte forma [17],

$$P(t_d) = \frac{B}{t_d}. \quad (41)$$

onde B é uma constante de normalização, $B \approx 8.7 \times 10^{-2}$ [21].

Vamos agora reescrever a Eq. (34) substituindo a taxa de formação estelar pela taxa de coalescência,

$$\Omega_{og}(\nu_{obs}) = \frac{\lambda \nu_{obs}}{4\pi c^3 \rho_{cr}} \times \int_0^{z_{sup}} \frac{R_c(z)}{r^2(1+z)} \frac{dE_{og}}{d\nu} \frac{dV}{dz}. \quad (42)$$

O limite superior da integral depende tanto da frequência máxima de emissão no referencial da fonte, quanto do *redshift* máximo ($z_{max} \approx 6$) do modelo da taxa de formação estelar [12], dado por

$$z_{sup} = \begin{cases} z_{max}, & \text{se } \nu_{obs} < \frac{\nu_{max}}{1+z_{max}} \\ \frac{\nu_{max}}{\nu_{obs} - 1}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (43)$$

em que ν_{max} é a frequência máxima limitada pela última órbita estável do sistema [22],

$$\nu_{max} = 1,5 \left(\frac{M}{2,9M_\odot} \right)^{-1} kHz, \quad (44)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema.

Conseqüentemente, a forma do espectro de OGs para qualquer fundo astrofísico é caracterizado por um corte na frequência máxima de emissão e tem um máximo em uma frequência que depende da densidade de energia espectral e da forma de distribuição do *redshift*, ou seja, da taxa de formação estelar [12].

4.1 Parâmetro de densidade e o modelo cosmológico

Devido à expansão do Universo, é conveniente falar de dois volumes diferentes: volume físico e

volume comóvel. O elemento infinitesimal de volume físico, em um tempo fixo t , pode ser escrito como

$$d\nu = a^3(t)r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi, \quad (45)$$

onde o fator de escala está elevado ao cubo devido a expansão nas três dimensões. Considerando apenas fontes distribuídas uniformemente no céu, podemos integrar a equação acima sobre todos os ângulos e obter

$$d\nu = 4\pi a^3(t)r^2 dr. \quad (46)$$

O elemento de volume comóvel é definido como sendo $dV \equiv a^{-3}d\nu$. Usando (46), encontra-se

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2. \quad (47)$$

Pela regra da cadeia [23], temos

$$\frac{dV}{dz} \frac{dz}{dr} = 4\pi r^2. \quad (48)$$

No Seção 2.6 obtivemos a Eq. (22) a partir da cosmologia, podemos agora fazer uma substituição na equação acima e obter

$$\frac{dV}{dz} = \frac{4\pi r^2 c}{H_0} E(\Omega, z). \quad (49)$$

Substituindo as Eqs. (49) e (35) em (42), obtemos

$$\Omega_{og}(\nu_{obs}) = \frac{\lambda K \nu_{obs}^{2/3}}{c^2 \rho_{cr} H_0} \int_0^{z_{sup}} \frac{E(\Omega, z) R_c(z)}{(1+z)^{4/3}} dz. \quad (50)$$

A equação acima foi obtida considerando o modelo cosmológico Λ CDM, que está incorporado na função $E(\Omega, z)$ dado pela Eq. (14). Podemos usar os mesmos procedimentos utilizados para chegar ao parâmetro de densidade de OGs para o modelo cosmológico ω -CDM,

$$\Omega_{og}(\nu_{obs}) = \frac{\lambda K \nu_{obs}^{2/3}}{c^2 \rho_{cr} H_0} \int_0^{z_{sup}} \frac{F(\Omega, f, z) R_c(z)}{(1+z)^{4/3}} dz, \quad (51)$$

onde $F(\Omega, f, z)$ é dado por (16). É importante lembrar que $f = f(z) = \int \frac{dz}{(1+z)} (1 + \omega(z))$ e, se $\omega = \text{constante}$, a Eq. (51) se torna a (50).

4.2 Parametrização I

Vamos usar duas parametrizações para $\omega(z)$ e calcular $f(z)$ a fim de encontrar qual é a forma de $F(\Omega, f, z)$. A primeira parametrização, dada em [24], é descrita por

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}, \quad (52)$$

onde ω_0 e ω_1 são constantes fixadas pelas observações. Podemos agora calcular a função $f(z)$,

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} \left(1 + \omega_0 + \omega_1 \frac{z'}{1+z'} \right), \quad (53)$$

o que resulta em três integrais,

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} + \omega_0 \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} + \omega_1 \int_0^z \frac{z'dz'}{(1+z')^2}. \quad (54)$$

As duas primeiras integrais podem ser resolvidas mediante o uso da fórmula $\int_b^a \frac{dx}{x} = \ln(a) - \ln(b)$ e, para a terceira integral, recorreremos a uma substituição de variável $u = 1 + z'$, para poder resolvê-la. Dessa forma encontramos

$$f(z) = \ln(1+z)(1+\omega_0+\omega_1) - \omega_1 \frac{z}{1+z}. \quad (55)$$

Vamos substituir esse resultado na exponencial da Eq. (16),

$$e^{3f(z)} = e^{\ln(1+z)3(1+\omega_0+\omega_1)} e^{-\frac{3\omega_1 z}{1+z}}. \quad (56)$$

Podemos reescrever (56) como

$$e^{3f(z)} = (1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} e^{-\frac{3\omega_1 z}{1+z}}. \quad (57)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (16), encontramos

$$F(\Omega, z) = \left[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m,0}) \times (1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} e^{-\frac{3\omega_1 z}{1+z}} \right]^{-1/2}, \quad (58)$$

onde utilizamos $\Omega_{m,0} + \Omega_{\omega(z),0} = 1$. Perceba que se $\omega_0 = -1$ e $\omega_1 = 0$, voltamos à função $E(\Omega, z)$.

4.3 Parametrização II

Utilizaremos agora outra parametrização linear, dada em [25],

$$\omega(z) = 3\omega_1 - 2\omega_0 + \frac{3(\omega_0 - \omega_1)}{1+z}, \quad (59)$$

onde ω_0 e ω_1 são constantes. Vamos agora calcular $f(z)$ usando essa parametrização,

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} \left(1 + 3\omega_1 - 2\omega_0 + \frac{3(\omega_0 - \omega_1)}{1+z'} \right), \quad (60)$$

o que nos dá três integrais para resolver,

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} + 3(\omega_0 - \omega_1) \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^2} + 3\omega_1 \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} - 2\omega_0 \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')}. \quad (61)$$

Resolvendo as integrais encontramos o seguinte resultado,

$$f(z) = \ln(1+z)(1-2\omega_0+3\omega_1) + \frac{3(\omega_0 - \omega_1)z}{1+z}. \quad (62)$$

Substituindo esse resultado na exponencial da Eq. (16), temos

$$e^{3f(z)} = e^{3(\ln(1+z)(1-2\omega_0+3\omega_1) + \frac{3(\omega_0 - \omega_1)z}{1+z})}, \quad (63)$$

a qual podemos reescrever da seguinte forma,

$$e^{3f(z)} = (1+z)^{3(1-2\omega_0+3\omega_1)} e^{\frac{9(\omega_0 - \omega_1)z}{1+z}}. \quad (64)$$

Substituindo a equação acima em (16), obtemos a seguinte expressão,

$$F'(\Omega, z) = \left[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m,0}) \times (1+z)^{3(1-2\omega_0+3\omega_1)} e^{\frac{9(\omega_0 - \omega_1)z}{1+z}} \right]^{-1/2}. \quad (65)$$

Se $\omega_0 = \omega_1 = -1$, teremos de volta a função $E(\Omega, z)$.

5 Resultados e discussões

Como visto na Seção 3, a energia escura possui natureza ainda desconhecida pela ciência, dessa forma é aceitável considerar que na sua equação de estado o parâmetro adimensional ω tenha uma dependência temporal que pode ser determinada por diferentes parametrizações encontradas na literatura. No presente artigo utilizamos duas dessas parametrizações, as quais são dadas pelas Eqs. (52) e (59), para obter o parâmetro de densidade de OGs para coalescência de ENs dado pela Eq. (51).

Consideramos neste artigo, tanto para o modelo Λ CDM como também para as parametrizações ω -CDM, os seguintes valores para os parâmetros cosmológicos ou astrofísicos envolvidos: $\Omega_{m,0} = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda} = 0.7$, de modo que $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda} = 1$. Usamos para a fração de massa λ

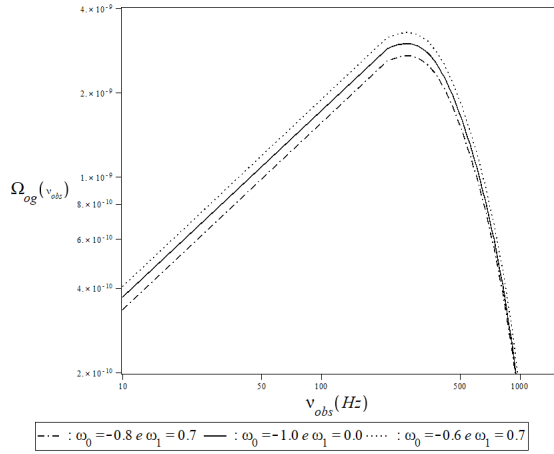


Figura 2: Primeiro resultado para a parametrização I.

convertida em fontes de OGs: $\beta_{EN} = 0.024$ e $f_b = 0.136$, o que resultou em $\lambda \approx 3 \times 10^{-5} M_{\odot}^{-1}$ [26]. A Eq. (44) nos dá a frequência máxima $\nu_{max} = 1500 \text{ Hz}$ para a fusão de ENs. Para a frequência mínima usamos $\nu_{min} = 10 \text{ Hz}$ para melhor analisar o espectro gravitacional. Utilizamos também: o valor usual da velocidade da luz $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $H_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [27], $\rho_{cr} = 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $B = 8,7 \times 10^{-2}$ [21]. A constante K é dada pela Eq. (36) e tem valor igual à $K = 5,2 \times 10^{43} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-2/3}$. Sabendo os valores de todas essas constantes, é possível calcular o valor numérico do termo $\frac{\lambda K B}{c^2 \rho_{cr} H_0}$, lembrando que as unidades [$M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-3}$] da taxa de coalescência também devem ser levadas em consideração. Dessa forma $\frac{\lambda K B}{c^2 \rho_{cr} H_0} \approx 2,8 \times 10^{-10} \text{ s}^{2/3}$.

5.1 Resultados para a parametrização I

Para a primeira parametrização, dada pela Eq. (52), analisamos os diferentes casos atribuindo valores positivos e negativos para as constantes ω_0 e ω_1 , sempre comparando com o modelo ΛCDM em que $\omega_0 = -1$ e $\omega_1 = 0$. Obtivemos os resultados descritos a seguir. No gráfico da Figura 2 utilizamos valores de ω_0 e ω_1 iguais à $(-0.8, 0.7)$ e $(-0.6, 0.7)$, respectivamente. Foi possível perceber que, para $\omega_0 = -0.8$ e $\omega_1 = 0.7$ o parâmetro de densidade de OGs tem um valor máximo abaixo do descrito pelo modelo ΛCDM , e para $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = 0.7$ esse valor ficou acima. No entanto para ambos os casos o fundo máximo ficou entre 2×10^{-9} e 4×10^{-9} .

Para o segundo resultado, representado pela Figura 3, os valores usados das constantes ω_0 e ω_1 na parametrização I, foram: $(-0.6, 0.5)$ e

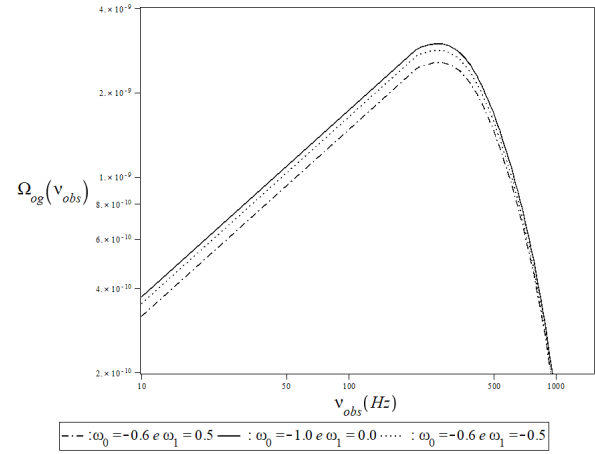


Figura 3: Segundo resultado para a parametrização I.

$(-0.6, -0.5)$, respectivamente. Para esses dois casos, o espectro de OGs ficou abaixo do previsto pelo modelo cosmológico ΛCDM , no entanto a diferença entre ambos os casos foi pequena, principalmente para $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = -0.5$. Da mesma forma que o resultado do gráfico da Figura 2, a amplitude máxima do parâmetro de densidade para as três curvas ficou entre 2×10^{-9} e 4×10^{-9} . Este resultado mostra que o espectro de OGs não sofreu muita influência do modelo $\omega\text{-CDM}$ em comparação ao modelo padrão.

Analisemos agora o terceiro e último resultado para a parametrização I. Aqui utilizamos os seguintes valores de ω_0 e ω_1 : $(-0.8, 0.8)$ e $(-0.6, 0.8)$. Neste resultado observamos uma diferença relativamente grande do parâmetro de densidade para as constantes $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = 0.8$ se comparado ao modelo padrão da cosmologia, tal como podemos observar na Figura 4. Para essa curva o valor máximo de fundo estocástico é $\Omega_{og} = 1,16 \times 10^{-9}$ a uma frequência observada de valor $\nu_{obs} = 307,81 \text{ Hz}$, abaixo do descrito para o ΛCDM , cujo valor é $\Omega_{og} \approx 3,00 \times 10^{-9}$ a uma frequência $\nu_{obs} = 272,00 \text{ Hz}$. Dessa forma o espectro sofreu influência do modelo $\omega\text{-CDM}$ tanto em relação a amplitude máxima, como em relação a frequência que gerou tal amplitude.

5.2 Resultados para a parametrização II

Na segunda parametrização, a qual está descrita na Eq. (59), da mesma maneira que foi realizado usando a parametrização anterior, analisamos as diferentes previsões para o parâmetro de densidade de OGs atribuindo valores positivos e negativos para as constantes ω_0 e ω_1 , sempre

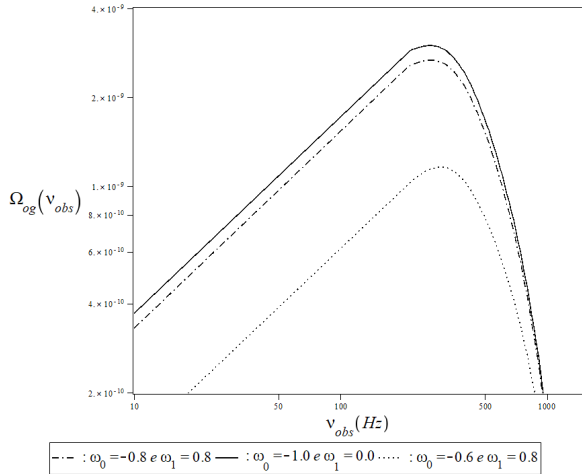


Figura 4: Terceiro resultado para a parametrização I.

comparando com o modelo Λ CDM. Não obstante para esta análise, o modelo cosmológico parametrizado se torna o modelo padrão com os valores $\omega_0 = -1$ e $\omega_1 = -1$. Para essa parametrização o fundo estocástico sofreu mais influência do que a parametrização anterior, como pode ser observado logo a seguir.

Atribuímos primeiramente os determinados valores para ω_0 e ω_1 , respectivamente, à equação (51) do espectro gravitacional: $(-0.8, 0.0)$ e $(-0.8, 0.3)$. Obtivemos um fundo maior e outro menor em relação ao previsto pelo modelo padrão (Figura 5). O fundo estocástico para $\omega_0 = -0.8$ e $\omega_1 = 0.0$ ficou um pouco acima, mas com a mesma frequência de máxima amplitude $\nu_{obs} = 272.00$ Hz. Porém se tivermos os valores $\omega_0 = -0.8$ e $\omega_1 = 0.3$, o parâmetro de densidade tem um valor de $\Omega_{og} = 1.16 \times 10^{-9}$, a uma frequência de $\nu_{obs} = 307.02$ Hz, praticamente os mesmos valores que encontramos em uma das curvas da Figura 4.

Para o segundo resultado descrito no gráfico da Figura 6, observamos as duas curvas parametrizadas abaixo do espectro padrão, tais curvas foram para os valores de ω_0 e ω_1 , respectivamente, $(-0.6, 0.3)$ e $(-0.6, -0.3)$. O parâmetro de densidade máximo com os valores $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = 0.3$ foi de $\Omega_{og} = 1.16 \times 10^{-9}$, a uma frequência $\nu_{obs} = 308.30$ Hz, valor próximo ao que vimos no gráfico da Figura 5 para $\omega_0 = -0.8$ e $\omega_1 = 0.3$. Já para $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = -0.3$, obtivemos $\Omega_{og} = 2.40 \times 10^{-9}$, a uma frequência $\nu_{obs} = 283.40$ Hz.

Consideremos agora o último resultado para a parametrização II. Para esse gráfico fizemos uso

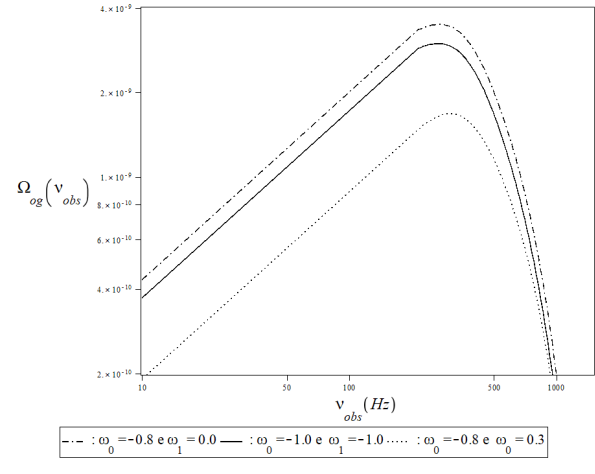


Figura 5: Primeiro resultado para a parametrização II.

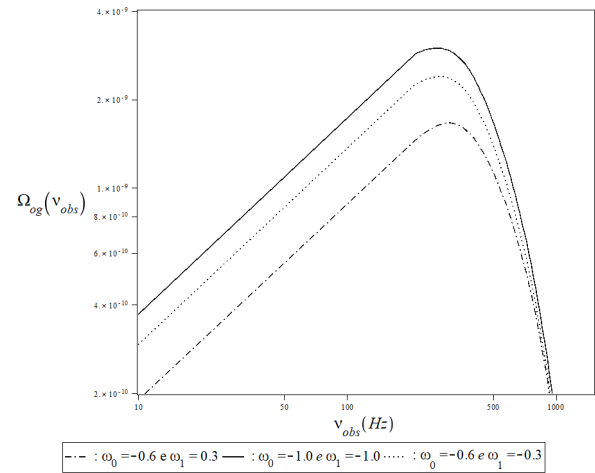


Figura 6: Segundo resultado para a parametrização II.

dos seguintes valores para ω_0 e ω_1 : $(-0.6, 0.7)$ e $(-0.6, -0.7)$ (Figura 7). Observamos que, para $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = 0.7$ a curva do espectro gravitacional se mostrou abaixo do esperado pela cosmologia padrão, da mesma forma que sua frequência no Ω_{og} máximo, à exemplo dos resultados anteriores que também ficaram abaixo do Λ CDM, se mostrou maior em relação às outras curvas. Já para o resultado que tem $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = -0.7$, encontramos um parâmetro de densidade quase igual ao previsto pelo modelo padrão.

Podemos colocar esses resultados de forma tabelada, que nos permite observar melhor a influência de cada uma das parametrizações no espectro gravitacional de acordo com os diferentes valores das constantes ω_0 e ω_1 , em comparação ao que é esperado se usarmos a cosmologia padrão. Nas Tabelas 1 e 2, mostramos o parâmetro de densidade máximo de OGs para os valores atribuídos as constantes das parametrizações I e II,

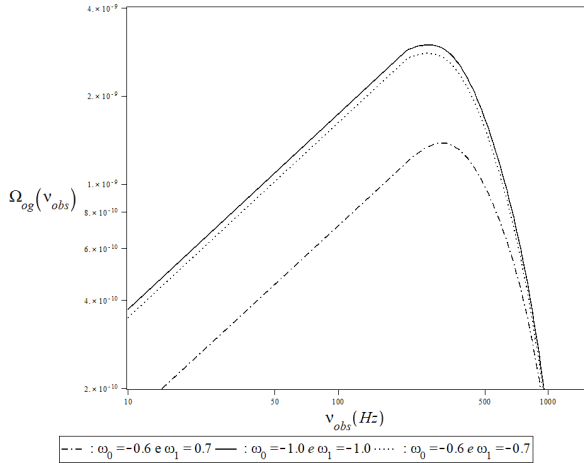


Figura 7: Terceiro resultado para a parametrização II.

com suas respectivas frequências.

Os resultados anteriormente obtidos podem ser considerados razoáveis, visto que todos os parâmetros de densidade calculados estão na mesma ordem de grandeza dos obtidos na literatura, ou seja 10^{-9} .

Tabela 1: Características do fundo estocástico para a parametrização I.

ω_0, ω_1	ν_{obs}	Ω_{ogmax}
-1.0, 0.0	272.00Hz	3.00×10^{-9}
-0.8, 0.7	272.00Hz	2.70×10^{-9}
-0.6, 0.7	272.00Hz	3.27×10^{-9}
-0.6, 0.5	274.65Hz	2.56×10^{-9}
-0.6, -0.5	272.00Hz	2.82×10^{-9}
-0.8, 0.8	272.00Hz	2.67×10^{-9}
-0.6, 0.8	307.81Hz	1.16×10^{-9}

Tabela 2: Características do fundo estocástico para a parametrização II.

ω_0, ω_1	ν_{obs}	Ω_{ogmax}
-0.1, -1.0	272.00Hz	3.00×10^{-9}
-0.8, 0.0	272.00Hz	3.50×10^{-9}
-0.8, 0.3	307.02Hz	1.16×10^{-9}
-0.6, 0.3	308.30Hz	1.16×10^{-9}
-0.6, -0.3	283.40Hz	2.40×10^{-9}
-0.6, 0.7	318.33Hz	1.38×10^{-9}
-0.6, -0.7	272.00Hz	2.80×10^{-9}

Embora tenhamos discutido sobre o espectro gravitacional gerado pela fusão de ENs, os detectores terrestre como o LIGO e o Virgo, ainda não possuem sensibilidade suficiente para detectar o espectro do fundo estocástico gerado por

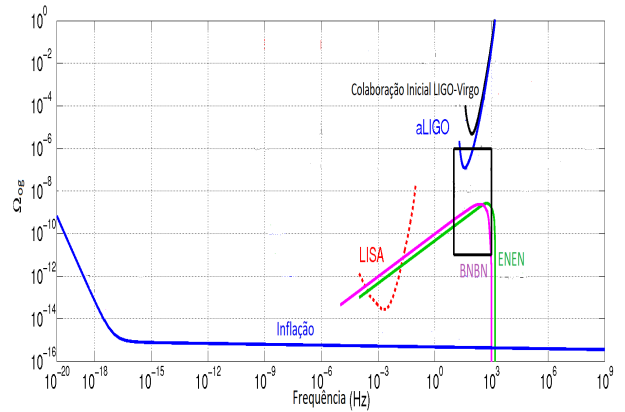


Figura 8: Sensibilidade de alguns detectores. [28]

OGs. O único que possivelmente terá essa possibilidade é o LISA (Laser Interferometer Space Antenna), futuro detector interferométrico espacial, composto por três satélites separados por uma distância equivalente a 6.5 vezes a distância entre a Terra e a Lua, com previsão de funcionamento para o ano 2030.

Na Figura 8 podemos observar as sensibilidades dos detectores passados, atuais e futuros, como a colaboração inicial entre o Virgo e o LIGO, o LIGO depois de 2015 quando passou a ser chamado de “Advanced LIGO” ou aLIGO e o futuro detector espacial LISA em comparação com as previsões feitas para o parâmetro de densidade de OGs geradas na época da inflação cósmica e pela fusão de buracos negros (BNBN) e estrelas de nêutrons (ENEN). Podemos perceber que o aLIGO tem uma sensibilidade mínima na ordem de 10^{-7} , enquanto o previsto máximo para BBNB e ENEN é da ordem de 10^{-9} . O retângulo mostra a diferenças entre o previsto e o que se pode detectar atualmente com os detectores que estão em funcionamento [28].

6 Conclusões

Neste artigo estudamos o fundo estocástico de OGs gerado pela fusão de ENs utilizando um modelo parametrizado da cosmologia que chamamos de ω -CDM, para tal, fizemos uso de duas parametrizações.

Inicialmente fizemos uso da parametrização $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$ na Eq. (51). Obtivemos os resultados descritos nos gráficos das Figuras 2, 3 e 4, nos quais foi possível verificar que o parâmetro de densidade máximo para as OGs depende dire-

tamente dos valores das constantes ω_0 e ω_1 . No entanto para a frequência observada ν_{obs} , com exceção de $\omega_0 = -0.6$ e $\omega_1 = 0.8$, em que o parâmetro de densidade máximo foi de $\nu_{obs} = 307.81$ Hz, a influência desses modelos não é muito perceptiva, tendo seu valor sempre igual ou muito próximo à 272.00 Hz.

Logo após aplicamos a segunda parametrização dada por: $\omega(z) = 3\omega_1 - 2\omega_0 + \frac{3(\omega_0 - \omega_1)}{1+z}$. Assim como na primeira parametrização, os valores de ω_0 e ω_1 tiveram influência direta no espectro gravitacional, tal que pode ser visto na Tabela 2. No entanto, ao contrário da primeira, essa parametrização altera mais fortemente a frequência observada para o parâmetro de densidade máximo, em comparação ao que o modelo padrão Λ CDM prevê.

Para trabalhos futuros, a nossa perspectiva imediata é investigar o fundo estocástico de ondas gravitacionais usando outras parametrizações para a equação de estado $\omega(z)$ que depende do tempo, além de outros modelos cosmológicos que podemos utilizar e comparar com o modelo padrão. Também pretendemos modificar as fontes e fazer uso de outros tipos no cálculo do espectro gravitacional, tal como fusão de buracos negros.

Sobre os autores

João Paulo G. do Nascimento (gomesjoao-paulo12@gmail.com) é professor da rede estadual de ensino do Rio Grande do Norte (SEEC), tem mestrado em física pela Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN) na área de cosmologia e gravitação.

Fábio Cabral Carvalho (fabiocabral@uern.br) é professor da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), tem doutorado em Física pela Universidade de São Paulo (USP) na área de cosmologia.

Referências

- [1] J. D. Romano e N. J. Cornish, *Detection methods for stochastic gravitational-wave backgrounds: a unified treatment*, Living Reviews in Relativity **20** (1), 2 (2017).
- [2] B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge university press, 2009).
- [3] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari et al., *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Physical review letters **116** (6), 061102 (2016).
- [4] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, V. Adya et al., *Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral*, Physical Review Letters **119** (16), 161101 (2017).
- [5] R. Abbott et al., *GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150M_{\odot}$* , Phys. Rev. Lett. **125** (10), 101102 (2020).
- [6] R. J. Adler, B. Casey e O. C. Jacob, *Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem*, American Journal of Physics **63** (7), 620 (1995).
- [7] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, 2008).
- [8] K. de Souza Oliveira Filho e M. d. F. O. Saraiva, *Astronomia e astrofísica, segunda edição*, São Paulo: Editora Livraria da Física (2004).
- [9] R. E. De Souza, *Introdução à cosmologia* (Edusp, 2004).
- [10] B. Allen, *The Stochastic gravity wave background: Sources and detection*, in *Relativistic gravitation and gravitational radiation*, editado por J. A. Marck e J. P. Lasota (Cambridge Contemporary Astrophysics, 1997), 373.
- [11] T. Regimbau e V. Mandic, *Astrophysical sources of a stochastic gravitational-wave background*, Classical and Quantum Gravity **25** (18), 184018 (2008).
- [12] T. Regimbau, *The astrophysical gravitational wave stochastic background*, Research in Astronomy and Astrophysics **11** (4), 369 (2011).
- [13] E. F. D. Evangelista, *Um novo método para o cálculo dos fundos estocásticos em ondas*

- gravitacionais gerados por sistemas binários compactos*, Tese de Doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE (2013).
- [14] E. E. Salpeter, *The luminosity function and stellar evolution.*, The Astrophysical Journal **121**, 161 (1955).
- [15] T. Regimbau e J. A. de Freitas Pacheco, *Stochastic background from coalescences of neutron star-neutron star binaries*, The Astrophysical Journal **642** (1), 455 (2006).
- [16] T. Regimbau e S. A. Hughes, *Gravitational-wave confusion background from cosmological compact binaries: Implications for future terrestrial detectors*, Physical Review D **79** (6), 062002 (2009).
- [17] O. D. Miranda, *Stochastic backgrounds of gravitational waves from cosmological sources—the role of dark energy*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **426** (4), 2758 (2012).
- [18] S. Wang, Y.-F. Wang, Q.-G. Huang e T. G. Li, *Stochastic gravitational-wave background from primordial black hole scenario after gw150914 and gw151226*, arXiv preprint arXiv:1610.08725 (2016).
- [19] B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari et al., *Gw150914: Implications for the stochastic gravitational-wave background from binary black holes*, Physical review letters **116** (13), 131102 (2016).
- [20] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, V. Adya et al., *Gw170817: implications for the stochastic gravitational-wave background from compact binary coalescences*, Physical review letters **120** (9), 091101 (2018).
- [21] T. Regimbau e B. Chauvineau, *A stochastic background from extra-galactic double neutron stars*, Classical and Quantum Gravity **24** (19), S627 (2007).
- [22] B. S. Sathyaprakash, *The gravitational wave symphony of the universe*, Pramana **56** (4), 457 (2001).
- [23] J. Stewart, *Cálculo*, vol. 1 (Cengage, São Paulo, 2006).
- [24] S. Wen, S. Wang e X. Luo, *Comparing dark energy models with current observational data*, JCAP **07**, 011 (2018).
- [25] Y. Wang, *Figure of merit for dark energy constraints from current observational data*, Physical Review D **77** (12), 123525 (2008).
- [26] E. F. Evangelista e J. C. de Araujo, *Stochastic background of gravitational waves generated by compact binary systems*, Brazilian Journal of Physics **44**, 260 (2014).
- [27] N. Jackson, *The hubble constant*, Living Reviews in Relativity **18** (1), 2 (2015).
- [28] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari et al., *Upper limits on the stochastic gravitational-wave background from advanced ligo's first observing run*, Physical review letters **118** (12), 121101 (2017).