

# Singularidade: O artigo seminal sobre buracos negros

Julio Cesar Chirichella Felicioni de Souza

Universidade Cruzeiro do Sul

---

## Resumo

Apresentamos uma tradução do inglês para o português brasileiro do importante artigo de Sir Robert Penrose sobre buracos negros, mais especificamente sobre a matemática da singularidade física.

## Abstract

We present a translation from English into Brazilian Portuguese of Sir Robert Penrose's important article on black holes, more specifically on the mathematics of physical singularity.

---

**Palavras-chave:** Penrose, colapso gravitacional, singularidade, relatividade geral, física matemática.

**Keywords:** Penrose, colapso gravitacional, singularidade, general relativity, mathematical physics.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v2n1.33409](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v2n1.33409)

## Introdução

Em 1965, Sir Robert Penrose enuncia o primeiro resultado genuinamente einsteiniano da relatividade geral, seu teorema da singularidade, onde introduz o conceito de superfícies aprisionadas fechadas, fundamental para as áreas de relatividade numérica, relatividade matemática, cosmologia e modelos análogos de gravidade.

Usando a noção de hipersuperfícies de Cauchy e de hiperbolicidade global, ele propôs uma incompletude na formulação da geodésica para caracterizar uma singularidade no espaço-tempo. Assim nascem os teoremas sobre singularidades, que promoveram, nos últimos 50 anos, inúmeros avanços nas áreas supracitadas e, mais tarde, a premiação de Penrose com o Nobel de Física em

2020.

A seguir, apresenta-se a tradução, do inglês para o português, desse importante artigo científico.

---

## Sobre o tradutor

Julio Cesar Chirichella Felicioni de Souza ([juliusscalculus@gmail.com](mailto:juliusscalculus@gmail.com)) é Licenciado em Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (2017), Especialista em Ensino de Física (2020) e mestrando em Ensino de Ciências pela mesma instituição. Atualmente desenvolve pesquisas sobre o ensino de relatividade, astronomia, astrofísica e cosmologia no ensino básico.

## Colapso gravitacional e singularidades espaço-temporais<sup>1</sup>

Robert Penrose

*Departamento de Matemática  
Birkbeck College, Londres, Inglaterra*

O descobrimento das fontes de rádio quase-estelares estimulou um renovado interesse na questão do colapso gravitacional. Foi sugerido por alguns autores [1] que enormes quantidades de energia que estes objetos aparentemente emitem pode ser resultado de um colapso de uma massa da ordem de  $(10^6 - 10^8)$  massas solares para a vizinhança do seu raio de Schwarzschild, acompanhado por uma violenta liberação de energia, possivelmente na forma de radiação gravitacional. A discussão matemática detalhada em tais situações é difícil, pois toda complexidade da relatividade geral é necessária. Consequentemente, os cálculos mais exatos tratando das implicações do colapso gravitacional empregaram a suposição simplificadora da simetria esférica. Infelizmente, isso impede qualquer discussão detalhada da radiação gravitacional – que requer pelo menos uma estrutura quadripolar.

A situação geral no que diz respeito a um corpo esféricamente simétrico é bem conhecida [2]. Para uma massa suficientemente grande, não há estado final de equilíbrio. Quando energia térmica suficiente é irradiada, o corpo se contrai e continua a se contrair até que uma singularidade física em  $r = 0$  é encontrada. Como medido por observadores locais comoveis, o corpo passa através do seu raio de Schwarzschild,  $r = 2m$ . (As densidades envolvidas não são enormemente grandes se a massa total é grande o bastante). Para um observador externo a contração para  $r = 2m$  parece tomar um tempo infinito. No entanto, a existência de uma singularidade apresenta um sério problema para qualquer discussão completa sobre a física da região interior.

A questão que tem sido levantada é se essa singularidade é, de fato, simplesmente uma propriedade da alta simetria assumida. A matéria colapsa radialmente para dentro de um ponto único no centro, tal que uma catástrofe espaço-temporal talvez não seja surpreendente. Não poderia a presença de perturbações que destroem

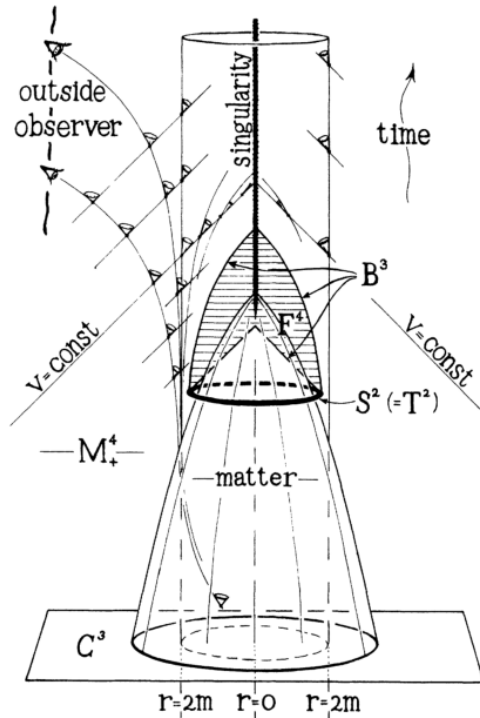
a simetria esférica alterar a situação drasticamente? A recente solução rotacional de Kerr [3] também possui uma singularidade física, mas devido ao alto grau de simetria ainda presente (a solução é algebricamente especial), pode ser novamente argumentado que a mesma não é representativa de uma situação geral [4]. Colapsos sem assumir simetrias [5] serão discutidos aqui.

Considere a evolução temporal de uma hipersuperfície de Cauchy  $C^3$  representando a distribuição inicial de matéria. Podemos assumir as equações de campo de Einstein e equações de estado apropriadas para a matéria. De fato, a única suposição feita aqui sobre essas equações de estado será a definição não negativa da expressão de energia de Einstein (com ou sem termo cosmológico). Suponha que essa distribuição de matéria sofra um colapso gravitacional de uma forma que, em princípio, quantitativamente se assemelha ao caso simetricamente esférico. Será demonstrado que, após uma certa condição crítica ser cumprida, desvios da simetria esférica não podem impedir de surgirem singularidades espaço-temporais. Se, como parece justificável, não é permitido a existência de singularidades físicas reais no espaço-tempo, a conclusão aparentemente inescapável é que, dentro de um objeto em colapso, ao menos uma das condições seguintes deve valer: (a) Ocorre energia negativa local [6]. (b) As equações de Einstein são violadas. (c) A variedade do espaço-tempo é incompleta [7]. (d) O conceito de espaço-tempo perde seu significado em curvaturas muito altas – possivelmente devido a fenômenos quânticos [2]. De fato (a), (b), (c) e (d) estão de alguma forma interligadas, sendo a distinção, parcialmente, um exercício mental.

Antes de examinar o caso assimétrico, considere uma distribuição de matéria esféricamente simétrica de raio finito em  $C^3$  que colapsa simetricamente. A região vazia que circunda a matéria irá, neste caso, ser um campo de Schwarzschild, e podemos usar convenientemente a métrica  $ds^2 = -2drdv + dv^2(1 - 2m/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ , com um parâmetro temporal avançado  $v$  para descrevê-lo [8]. A situação está descrita na Figura 1.<sup>2</sup> Note que o observador exterior sempre verá a matéria fora de  $r = 2m$ , sendo o colapso

<sup>1</sup>Publicado originalmente em 18 de Janeiro de 1965, na *Physical Review Letters*, volume 14, número 3.

<sup>2</sup>Nota dos Editores: A figura original é de autoria do próprio Penrose, que é um talentoso desenhista e entusiasta do uso de desenhos e diagramas no ensino e pesquisa em física e matemática, veja por exemplo o projeto "The Big Draw": [www.youtube.com/watch?v=hb4V4O-7M4s](http://www.youtube.com/watch?v=hb4V4O-7M4s).



**Figura 1:** Colapso esféricamente simétrico(Suprimido numa dimensão espacial) O diagrama serve essencialmente também para a discussão do caso assimétrico.

através de  $r = 2m$  até a singularidade em  $r = 0$  invisível para ele.

Após a matéria ser contraída para dentro de  $r = 2m$ , uma esfera tipo espaço  $S^2$  ( $t = \text{constante}$ ,  $2m > r = \text{constante}$ ) poderá ser encontrada na região vazia que circunda a matéria. Esta esfera é um exemplo do que podemos chamar aqui de *superfície aprisionada* – definida geralmente como uma 2-superfície  $T^2$ , tipo tempo, fechada, com a propriedade de que dois sistemas de geodésicas nulas que encontram  $T^2$  ortogonalmente convergem localmente em direções futuras em  $T^2$ . Notadamente, superfícies aprisionadas ainda existirão se a região com matéria não tiver uma fronteira nítida ou se a simetria esférica for abandonada, contanto que os desvios da situação acima não sejam muito grandes. De fato, todas soluções de Kerr com  $m > a$  (momento angular  $ma$ ) possuem superfícies aprisionadas, ao passo que, aquelas para as quais  $m \leq a$ , não possuem [9]. O raciocínio será mostrar que a existência de uma superfície aprisionada implica – independentemente da simetria – que as singularidades necessariamente ocorrem.

A existência de uma singularidade nunca pode ser inferida, no entanto, sem uma hipótese tal

como a completude da variedade considerada. Será necessário, aqui, supor que a variedade  $M_+^4$ , que é a evolução temporal futura de uma hipersuperfície de Cauchy inicial  $C^3$  (limite passado da região  $M_+^4$ ) possui completude nula no futuro. As várias hipóteses serão, mais precisamente, como se segue: (i)  $M_+^4$  é uma variedade riemanniana não-singular (+ – – –) a qual cada meio cone nulo forma dois sistemas separados (“passado” e “futuro”). (ii) Cada geodésica nula em  $M_+^4$  pode ser estendida para o futuro para valores arbitrariamente grandes do parâmetro afim (completude nula). (iii) Toda curva tipo tempo, ou geodésica nula, em  $M_+^4$  pode ser estendida para o passado até que encontre  $C_3$  (condição de hipersuperfície de Cauchy). (iv) Em cada ponto de  $M_+^4$ , todos vetores tipo tempo  $t^\mu$  satisfazem  $(-R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \geq 0$  (não negatividade da energia local). (v) Existe uma superfície aprisionada  $T^2$  em  $M_+^4$ . Será mostrado aqui, em resumo, que (i), ..., (v) são conjuntamente inconsistentes.

Seja  $F^4$  o conjunto de pontos em  $M_+^4$  que podem ser conectados a  $T^2$  por uma curva regular tipo tempo, levando para o futuro de  $T^2$ . Seja  $B^3$  a fronteira de  $F^4$ . Considerações locais mostram que  $B^3$  é nula onde é não singular, sendo gerada pelos segmentos de geodésicas nulas que encontram  $T^2$  ortogonalmente em um ponto final passado, e tem um ponto final futuro se esse for uma singularidade (numa região cáustica ou de cruzamento) de  $B^3$ .

Seja  $l^\mu$  (sujeito a  $l^\mu_{;\nu}l^\nu = 0$ ),  $\rho (= -\frac{1}{2}l^\nu_{;\nu})$ , e  $|\sigma| = \{[\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} - \frac{1}{4}(l^\mu_{;\mu})^2]^{1/2}\}$ , respectivamente, um vetor tangente apontado para o futuro, a convergência, e o cisalhamento para essas geodésicas nulas [10], e seja  $A$  uma área infinitesimal correspondente a uma seção transversal de  $B^3$ . Então  $[(A^{1/2};_\mu l^\mu)]_{;\nu} l^\nu = -(A^{1/2}\rho)_{;\mu} l^\mu = -A^{1/2}(|\sigma|^2 + \Phi) \leq 0$  onde  $\Phi = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu [\geq 0$  por (iv)]. Como  $T^2$  é aprisionada,  $\rho > 0$  em  $T^2$ , então  $A$  zera numa distância afim finita para o futuro de  $T^2$  em cada geodésica nula. Cada geodésica, então, encontra uma cáustica. Consequentemente,  $B^3$  é compacta (fechada), sendo gerada por um sistema compacto de segmentos finitos. Podemos aproximar  $B^3$  arbitrariamente próximo a uma superfície tipo espaço, fechada e suave  $B^{3*}$ .

Seja  $K^4$  o conjunto de pares  $(P, s)$  com  $P \in B^{3*}$  e  $0 \leq s \leq 1$ . Defina um mapa contínuo

$\mu : K^4 \rightarrow M^4_+$  onde, para  $P$  fixo,  $\mu\{(P, s)\}$  é o segmento de geodésica passado normal a  $B^{3*}$  em  $P = \mu\{(P, 1)\}$ , encontrando  $C^3$  [como deve ser, por (iii)] no ponto  $\mu\{(P, 0)\}$ . Em cada ponto  $Q$  de  $\mu\{K^4\}$  podemos definir o grau  $d(Q)$  de  $\mu$  como sendo o número de pontos de  $K^4$  que mapeiam para  $Q$  (corretamente contados). Sob qualquer região não contendo a imagem de um ponto fronteiro de  $K^4$ ,  $d(Q)$  será constante. Perto de  $B^{3*}$ ,  $\mu$  é 1 - 1, então  $d(Q) = 1$ . Segue que  $d(Q) = 1$  perto de  $C^3$ , igualmente, por isso o grau do mapa  $B^{3*} \rightarrow C^3$ , induzido por  $\mu$  quando  $s = 0$ , também deve ser igual a unidade. A impossibilidade disso decorre da não compacticidade de  $C^3$ .

Detalhes completos deste e de outros resultados relacionados serão dados em outro trabalho.

### Referências

- [1] F. Hoyle e W. A. Fowler, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 125, 169 (1963); F. Hoyle, W. A. Fowler, G. R. Burbidge e E. M. Burbidge, Astrophys.J. 139, 909 (1964); W. A. Fowler, Rev. Mod. Phys. 36, 545 (1964); Ya. B. Zel'dovich e I. D. Novikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155, 1033 (1964) [tradução: Soviet Phys. - Doklady 9, 246 (1964)]; I. S. Shklovskii e N. S. Kardashev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155, 1039 (1964) [tradução: Soviet Phys. -Doklady 9, 252 (1964)]; Ya. B. Zel'dovich e M. A.Podurets, Dokl. Akad. Nauk SSSR 156, 57 (1964) [tradução: Soviet Phys. - Doklady 9, 373 (1964)]. Além disso vários artigos nos Proceedings of the 1963 Dallas Conference on Gravitational Collapse (University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1964).
- [2] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, Phys. Rev. 56, 455 (1939). Ver também J. A. Wheeler, em Relativity, Groups and Topology, editado por C. deWitt e B. deWitt (Gordon and Breach Publishers, Inc., New York, 1964); e referência 1.
- [3] R. P. Kerr, Phys. Rev. Letters 11, 237 (1963)
- [4] Veja também E. M. Lifshitz e I. M. Khalatnikov, Advan. Phys. 12, 185 (1963).
- [5] Ver também P. G. Bergmann, Phys. Rev. Letters 12, 139 (1964).
- [6] A energia negativa de um "campo Q" pode ser invocada para evitar singularidades: F. Hoyle e J. V. Narlikar, Proc. Roy. Soc. (Londres) A278, 465 (1964). No entanto, é difícil ver como até a presença de energia negativa pode levar a um "salto" eficaz se a causalidade local deve ser mantida.
- [7] A filosofia "I'm all right, Jack"<sup>3</sup> no que diz respeito às singularidades seria incluída neste título.
- [8] D. Finkelstein, Phys. Rev. 110, 965 (1959).
- [9] O caso  $m < a$  é interessante porque aqui uma singularidade é visível para um observador externo. Se singularidades "visíveis" surgem ou não inevitavelmente em circunstâncias apropriadas é uma questão intrigante não coberta pela presente discussão.
- [10] Para a notação, etc., consulte E. Newman e R. Penrose, J. Math. Phys. 3, 566 (1962).

---

<sup>3</sup>Nota dos Editores: "I'm all right, Jack" é uma expressão britânica, normalmente pejorativa, que descreve um certo egoísmo de alguém contente com suas circunstâncias e indiferente com a dos outros. A expressão também dá nome a um filme britânico, lançado em 1959, que fez sucesso na época.