

Rotação de galáxias e matéria escura

Alejandro Hernández-Arboleda^{1,2} e Davi C. Rodrigues¹

¹Universidade Federal do Espírito Santo

²Universität Heidelberg, Alemanha

Resumo

Galáxias desempenham e seguem desempenhando um relevante papel na determinação da matéria escura e suas propriedades. Apresentamos uma introdução sobre a dinâmica interna de galáxias, em particular sobre a rotação de galáxias de disco, e sobre como seus dados indicam a presença de matéria escura. Este texto é destinado a qualquer leitor interessado no assunto, ainda que sem experiência prévia em astrofísica.

Abstract

Galaxies had and currently have an important role on understanding what is dark matter and what are its properties. Here we present an introduction about galaxies internal dynamics, with emphasis to the rotation of disk galaxies and on how their data imply the presence of dark matter. This work aims to explain such matters to readers without previous background in astrophysics.

Palavras-chave: matéria escura, galáxias, curvas de rotação

Keywords: dark matter, galaxies, curvas de rotação

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v2n1.33939](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v2n1.33939)

1 Introdução

Este artigo foi escrito pensando em dois tipos de leitores: os interessados sobre galáxias e matéria escura, mas com pouco ou nenhum conhecimento prévio de astronomia; e leitores que são alunos de graduação de física, astronomia ou áreas afins, e que talvez tenham interesse em começar a trabalhar no assunto. Aqui tratamos de forma sucinta de alguns aspectos essenciais sobre galáxias, mostrando um pouco sobre como o trabalho é feito, e deixamos as seções mais técnicas para os apêndices. Há algumas equações no meio do texto principal que se demonstraram difíceis de serem removidas sem comprometer a clareza ou organização do texto. Entendemos que nem todos os leitores estarão familiarizados com esse tipo de linguagem, mas esperamos que os leitores não familiarizados possam simplesmente pular tais equações e entender a essência do texto. Ao longo do artigo, encontram-se várias referências a artigos científicos, livros e *websites* relevantes para a área.

Referências em português sobre os temas aqui discutidos existem, mas são muito mais raras que

as referências em inglês, especialmente para os tópicos mais técnicos e atuais; isto pois publicações científicas de impacto internacional são feitas em inglês. As referências em português [1, 2] podem ser usadas para aprender vários outros aspectos relacionados com o tema aqui abordado, além de outros artigos que se encontram nesta revista.

1.1 Galáxias

Galáxias estão entre os objetos astrofísicos que mais despertam a curiosidade do grande público, visto que suas imagens e o próprio termo “galáxia” é largamente conhecido e usado pela população, sendo também usado em contextos bem diferentes do científico.

Várias das galáxias próximas e mais conhecidas foram, até o início do séc. XX, chamadas apenas de “nebulosa”. Por exemplo, o astrônomo Charles Messier (1730-1817) fez um famoso catálogo de título “*Catalogue des Nébuleuses et des Amas d’Étoiles*”, isto é, “Catálogo das nebulosas e dos aglomerados estelares”.¹ Dentre os 110 obje-

¹A versão original, escaneada, desse catálogo não é especialmente prática, mas pode ser encontrada em

tos contidos no catálogo, há algumas das galáxias mais famosas. Embora seja um catálogo antigo, até hoje em dia é comum se referir a vários dos objetos catalogados pelo seu número no catálogo, na forma M1, M2,..., M110. Por exemplo, M31, M51, M64 e M104 se referem respectivamente às galáxias Andrômeda, Rodamoinho, Olho negro e Sombreiro. Todas estas últimas são galáxias com um proeminente disco estelar. Vários outros objetos conhecidos não tem um nome popular. A galáxia M87 é uma elíptica gigante, de aparência quase esférica, e ficou especialmente famosa em 2019 pela imagem de seu buraco negro supermassivo [3].

Galáxias passaram a ser apropriadamente classificadas como galáxias, ao invés do termo mais vago nebulosa, quando ficou claro que essa classe especial de nebulosas tinha distâncias muito maiores do que as distâncias típicas das estrelas que observamos (e conseqüentemente que tais nebulosas eram estruturas gigantes, algumas maiores que a própria Via Láctea). Isto é, quando ficou claro que a Via Láctea é um grande conjunto de estrelas (e outros elementos) do qual o Sol faz parte; as outras galáxias seriam outras “ilhas” no universo. O conhecimento sobre essas distâncias a outras galáxias só se estabeleceu no início do séc. XX, devido em especial aos trabalhos de Oepik e Hubble [4, 5].

1.2 Distâncias

Antes de avançarmos mais, é bem vinda uma breve digressão sobre distâncias astronômicas. A distância da Terra até o Sol é de aproximadamente 8 minutos-luz (i.e., a luz emitida pelo Sol demora 8 minutos para chegar até a Terra). A distância de Netuno, o planeta do sistema solar mais distante, até o Sol é de aproximadamente 4 horas-luz. Do Sol até a **heliopausa** são necessárias umas 12 horas-luz [6, 7] — as Voyagers 1 e 2 estão agora além da heliopausa, no meio interestelar; e nenhuma outra construção humana está além dessas duas. A distância do Sol até a estrela mais próxima, Proxima Centauri, é de aproximadamente 4 anos luz. Nem todas as estrelas são solitárias como o Sol, muitas formam sistemas, sendo estrelas binárias especialmente comuns. A distância típica entre um sistema estelar e outro é da ordem de 1 pc (parsec), ou seja, aproxima-

damente 3,3 anos-luz.

O parsec é uma unidade de distância bastante comum na astronomia, mas essencialmente desconhecida fora desta. Embora possa-se simplesmente dizer que um parsec equivale a aproximadamente 3,26 anos-luz, sua definição original advém do uso de uma técnica especialmente precisa de medida de distâncias astronômicas: a medida via paralaxe. Isto é, a variação da posição aparente de um corpo, usualmente uma estrela, devido ao movimento da Terra ao redor do Sol).²

A distância da Terra até o centro da Via Láctea, aonde situa-se um buraco negro supermassivo [9], é comumente estimada como aproximadamente 8 kpc. A Via Láctea faz parte de um grupo de várias galáxias, mas neste grupo há somente mais uma outra com aproximadamente o mesmo tamanho ou massa, a galáxia Andrômeda. A distância até Andrômeda é de 0,78 Mpc (ou seja, 2,5 milhões de anos-luz).³ As distâncias típicas entre galáxias do porte de Andrômeda e da Via Láctea são da ordem de 1 Mpc.

Em cosmologia, considera-se distâncias muito maiores, em particular, a aproximação do universo recente ser homogêneo e isotrópico só é válida para distâncias maiores que 100 ou 200 Mpc.

1.3 Classificação de galáxias

Devido às incertezas com a distância de galáxias, havia uma disputa. Em particular, Harlow Shapley defendia que as nebulosas espirais eram objetos que ficavam dentro da nossa Galáxia, enquanto que Heber Doust Curtis defendia a ideia oposta, de que eram objetos externos à Via Láctea.⁴ Somente em 1923 a disputa foi resolvida por Edwin Hubble, ao apresentar evidências da distância de que Andrômeda (M31), essas baseadas em estrelas muito luminosas cujo brilho intrínseco pode ser correlacionado com suas oscilações de luminosidade (as cefeidas). Andrômeda esta-

²Esta técnica depende do conhecimento da distância entre o Sol e a Terra. Em [8] encontra-se uma breve e recente discussão sobre esta questão.

³simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-basic?Ident=m31.

⁴H.G. Wells, famoso escritor de ficção científica, fez um livro em 1922 de divulgação científica sobre a história do mundo [10]. No início desse livro ele aborda várias questões de astrofísica. A despeito de outras virtudes do livro, é afirmado que astrônomos conseguem observar várias nuvens de matéria espiraladas que possivelmente seriam sistemas estelares em formação, semelhantes ao nosso sistema solar. Eram na verdade galáxias, como ficou claro pouco depois da publicação.

ria muito mais distante que qualquer estrela da Via Láctea.

Hubble em suas observações de “nebulosas extragalácticas”, ou seja, externas à Via Láctea, introduziu uma nova classificação de galáxias, a qual segue sendo usada hoje em dia, com algumas variações [11]. As galáxias seriam classificadas em quatro grandes categorias: elípticas, lenticulares, espirais e irregulares.

As galáxias elípticas, como o nome indica, possuem forma elipsoidal, podendo variar desde esférica (E0) até casos com grande excentricidade como as do tipo E7 (ou seja, parecem uma bola achatada). São as mais simples em termos de subestruturas visíveis; as do tipo E0 em particular parecem uma grande bola luminosa (algumas muito maiores que a Via Láctea). Dentre outras informações desse tipo de galáxia, nota-se que são galáxias pobres em gás atômico (falaremos mais desse gás interestelar em outras seções) e têm predominância de estrelas mais velhas, em contraposição com vastas regiões ativas de formação estelar que podem ser encontradas nas espirais, por exemplo.

Nossa própria galáxia e Andrômeda são galáxias espirais (às vezes também chamadas de galáxias de disco, por terem um disco estelar proeminente). Sua estrutura estelar é composta do disco (do qual fazem parte os braços espirais da galáxia), do bojo (uma parte central protuberante com alta concentração de estrelas) e do halo estelar (que contém estrelas distribuídas esfericamente, porém de forma muito mais difusa do que no disco ou no bojo). As galáxias espirais recebem a classificação S. Dentre as espirais, há dois grandes grupos, as espirais barradas e as não barradas. As barradas recebem a classificação SB e se referem a uma peculiar estrutura no centro da galáxia que parece uma barra que gira, ao invés de um bojo aproximadamente esférico ou da ausência de bojo. A Via Láctea é um exemplo de uma galáxia com barra (SB), mas é difícil ver a barra dela pois estamos dentro do disco da Via Láctea. Já Andrômeda não tem barra e na classificação de Hubble seria um exemplo de galáxia do tipo S que não é SB.

Além da classificação entre com ou sem barra, as galáxias espirais seriam ainda classificadas dependendo da disposição dos braços espirais, se estão mais compactos ou mais abertos. Na classificação de Hubble, teríamos a sequência Sa, Sb

e Sc para galáxias espirais sem barra e variando do caso com braços mais juntos (Sa) até o caso de braços mais abertos (Sc).

Essa classificação de Hubble é usada até hoje, contudo a variação proposta por De Vaucouleurs, mostrada na Fig. 1 é especialmente comum atualmente. É uma classificação com mais casos intermediários.

Existem algumas galáxias que parecem que estão no meio termo entre as elípticas e as espirais, pois têm um disco, mas também têm uma densa distribuição elíptica de estrelas. Hubble classificou essas galáxias como lenticulares e são designadas por S0.

Por fim, as galáxias irregulares são aquelas que não se encaixaram em nenhuma das categorias anteriores. Os dois exemplos mais conhecidos de galáxias irregulares são a Grande e a Pequena Nuvens de Magalhães, as quais são galáxias vizinhas, próximas da Via Láctea, e que podem ser facilmente observadas.

Não apresentamos uma figura específica da classificação de Hubble (que pode ser facilmente encontrada em livros e na internet), mas vamos apresentar uma extensão largamente usada atualmente, esta devido a De Vaucouleurs, como pode ser vista na Fig. 1. De Vaucouleurs usou a mesma disposição da classificação de Hubble, colocando as elípticas à esquerda e as irregulares à direita; assim organizadas aproximadamente em ordem de complexidade de subestruturas internas. A mais simples de todas é a elíptica E0. As elípticas com ou sem barra são colocadas em paralelo. De Vaucouleurs acabou com a ambiguidade do símbolo S, que poderia ser usado tanto para as espirais em geral quanto para as espirais sem barra. Para isso ele introduziu a classificação SA, que designa as espirais sem barra; e ainda introduziu uma classificação intermediária, a SAB. Ademais, estendeu uma das subclassificações das espirais de a, b e c para a, b, c, d e m, como pode ser visto na figura.

2 Breves comentários históricos

Seguem breves comentários que podem ser úteis para contextualizar as próximas seções. Aqui damos ênfase para a parte de galáxias. Bertone & Hooper [14] fazem uma detalhada revisão histórica sobre matéria escura em geral. Ver

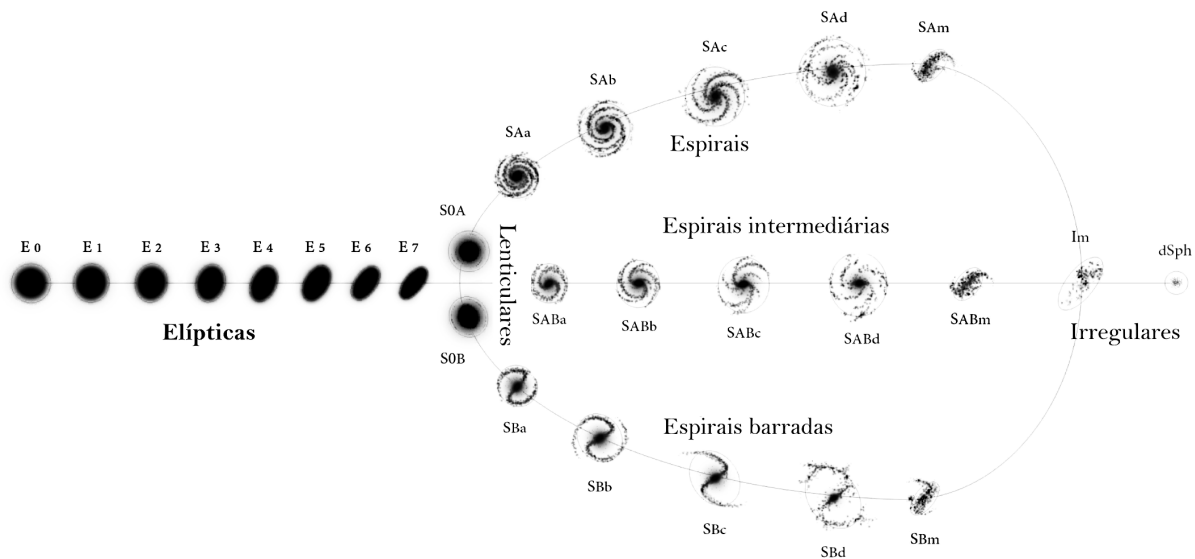


Figura 1: Esquema de classificação de galáxias de De Vaucouleurs (ou Hubble-De Vaucouleurs) [12]. Trata-se de uma das extensões da classificação de Hubble mais usadas. O SIMBAD (simbad.u-strasbg.fr/simbad) pode ser usado para encontrar a classificação de uma galáxia, e nele se encontram informações comumente em acordo com a classificação de De Vaucouleurs. Não está explícito na figura acima, mas certos casos intermediários são também usados. Por exemplo, SBcd se refere a uma galáxia entre as classificações SBc e a SBd. Por motivos históricos, as galáxias mais à direita no diagrama são chamadas de de tipo tardio (*late type*); isso foi introduzido pelo próprio Hubble, mas pode gerar confusão por sugerir uma possível ordem cronológica no diagrama acima, quando na verdade não há (justamente nas elípticas predominam populações estelares mais velhas). *Figura adaptada sob licença Creative Commons* [13].

também, de forma mais específica para galáxias, Sofue & Rubin [15].

Comumente comenta-se que o termo “matéria escura”, no sentido atual que aqui lidamos, foi introduzido por Fritz Zwicky em 1933 [16], devido em especial ao seu trabalho sobre o aglomerado de galáxias de Coma. Zwicky encontrou uma grande discrepância entre a massa desse aglomerado, quando inferida pelas velocidades das galáxias que estavam no aglomerado, com respeito à massa estimada a partir da luz emitida; sendo a primeira, a massa dinâmica, muito maior.⁵ Este tipo de observação tem plena relação com o que entendemos hoje por matéria escura, conforme será mais detalhado para o caso de galáxias. É também verdade que ele usou o termo “matéria escura” (*dunkle materie*) para se referir à matéria que não podia ser vista, mas cuja existência era indicada pelas velocidades das galáxias do aglomerado. Entretanto, essa matéria escura que ele se referia era qualquer matéria não luminosa, e inclusive considerou possíveis efeitos de absorção devido a essa, e uma possível origem como es-

⁵De forma mais precisa, ele aplicou o teorema do virial a um aglomerado de galáxias, e provavelmente ele foi o primeiro a fazer essa aplicação [14].

trelas de baixo brilho; enquanto atualmente os esforços referentes a matéria escura estão concentrados numa matéria que não é feita da matéria usual que conhecemos, a matéria escura que tratamos aqui não pode absorver ou emitir luz, simplesmente não interage com as ondas eletromagnéticas, ela é invisível. No sentido usado por Zwicky, de uma matéria usual que não podemos ver, o termo já era usado muito antes. O que Zwicky trouxe de novo foi mostrar uma grande discrepância entre a massa dinâmica e a luminosa de um aglomerado, e essa discrepância tem relação com o que hoje entendemos por matéria escura.

Esse trabalho de Zwicky parece ter sido pouco influente durante vários anos, ficando como uma curiosidade a ser resolvida, a qual dependia de diferentes hipóteses não claras para a época [14]. Só mais tarde, quando a existência de matéria escura em galáxias de disco ficou clara, a questão da matéria escura em aglomerados foi revisitada.

Galáxias de disco, como a Via Láctea, rodam a velocidades diferentes para raios diferentes. Esses dados de velocidade de rotação contra posição radial formam a curva de rotação, a qual trataremos em mais detalhes aqui. Em várias dessas galáxias,

o movimento da matéria visível é essencialmente o de rotação. Esse tipo de dinâmica é significativamente mais simples de ser analisada do que a dinâmica de dispersão de velocidades. Não chega a ser tão simples quanto a dinâmica de rotação do sistema solar, mas ainda assim é simples. No sistema solar, praticamente toda a massa está concentrada num “ponto”: o Sol. Numa galáxia de disco, a massa estelar se distribui continuamente ao longo do disco. Ademais, curvas de rotação dão informação sobre a dinâmica local, pois raio a raio sabe-se qual é a velocidade, assim pode-se tratar da distribuição das massas, e não apenas dos valores das massas totais.

Para o sistema solar, como veremos na Seção 3, a velocidade de rotação é uma função bem simples da massa solar e da posição radial r . Para uma distribuição contínua de matéria, deve-se usar a aplicação da gravitação newtoniana para meios contínuos, que é um pouco mais complicada pois requer cálculo diferencial e integral, como introduzido no Apêndice A. A relação entre velocidade de rotação (ou circular) e a distribuição de massa são dadas pelas equações (14) e (12).

Usando as relação entre velocidade de rotação e distribuição de massa, Jan Oort estudou a galáxia NGC 3115 e concluiu que “*the distribution of mass in this system appears to bear almost no relation to that of light.*” [17] (ou seja, traduzindo livremente: “a distribuição da massa desse sistema parece possuir quase nenhuma relação com a distribuição da luz”). Essa foi uma relevante observação que pôs em dificuldade as tentativas de conciliar a massa dinâmica com a massa luminosa por meio de simples ajustes de detalhes da última, pois toda a distribuição era completamente diferente, logo era de se esperar que não deviam ser feitos da mesma coisa: havia algo de qualitativo largamente diferente.

Duas décadas depois de Oort, vários pesquisadores foram além na análise de curvas de rotação. Dentre eles, Kent Ford, Vera Rubin, Morton Roberts, Robert Whitehurst, entre outros, estudaram curvas de rotação de galáxias tanto no ótico quanto usando a emissão do hidrogênio atômico (radiação de 21 cm, radiação que trataremos mais na Seção 4.3). Essas observações reforçaram que algum aspecto desconhecido estava de fato presente na dinâmica rotacional das galáxias, sendo um fator dominante para grandes distâncias em relação ao centro das galáxias [15].

A descoberta e o uso da radiação de 21 cm (que está na zona de ondas de rádio) foi de grande importância para a área (e também para a astronomia como um todo), pois essa radiação é emitida pelo hidrogênio atômico que é abundante em galáxias de disco e pode comumente ser detectado a raios significativamente maiores do que o limite de observação da parte estelar. Assim, as curvas de rotação da parte estelar puderam ser estendidas para raios maiores, dando mais informação sobre a distribuição de massa, e confirmando que muita massa estava além daquela que podia ser vista (quer no ótico, ou por meio de outras ondas eletromagnéticas).

A partir dos anos 80, surgiram vários sinais diferentes da existência de matéria escura, a partir de diferentes princípios físicos, incluindo: dados de raios X de aglomerados de galáxias; lentes gravitacionais de aglomerados de galáxias e galáxias individuais; o famoso aglomerado da bala [18]; o espectro de potência dos dados da radiação cósmica de fundo; oscilações acústicas bariônicas; testes de microlenteamento para limitar a abundância de objetos compactos grandes não observados (MACHO’s); simulações numéricas; dentre outros.

Essas indicações levaram ao quadro padrão da matéria escura de hoje, em que a matéria escura não é matéria comum (não é feita de prótons, elétrons e nêutrons, em particular) e não interage diretamente com os fótons, logo a matéria escura deixou de ser a matéria escura de Zwicky, de fato ela é matéria invisível. E mais intrigante ainda, a matéria escura não é algo de pouca relevância, um detalhe sutil, é na verdade a fonte gravitacional dominante em galáxias e em escalas grandes escalas.

Considerando o que entendemos atualmente sobre matéria escura, podemos dizer que nós aqui estamos por causa dela, sem ela não haveria a Via Láctea, o sistema solar e nada seríamos.

3 Curvas de rotação e o sistema solar

Uma curva de rotação é um gráfico de posição radial versus velocidade de rotação (ou velocidade circular). Por exemplo, podemos fazer uma curva de rotação dos planetas do sistema solar, tal como mostrado na Fig. 2.

Curvas de rotação podem ser usadas para inferir a massa do Sol (M_{\odot}). A partir dos dados de

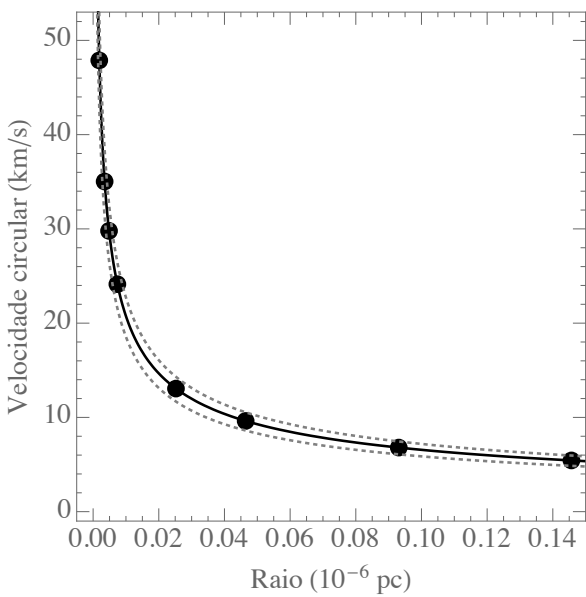


Figura 2: Na figura acima cada ponto preto representa um dos 8 planetas do sistema solar. A curva sólida preta é o modelo da curva de rotação. As duas linhas tracejadas apresentam variações do modelo, para as quais a massa do Sol foi reduzida ou aumentada em 20%. A posição radial dos planetas está em unidades de microparsecs (10^{-6} pc). Esta (exótica) escolha de unidades foi feita para comparação com o caso de galáxias, tendo como base a unidade do parsec.

posição radial e de velocidade dos planetas, por exemplo, é possível determinar a massa do Sol a partir de um melhor ajuste da curva teórica de rotação com os dados dos planetas. Se fosse possível saber com perfeita precisão e acurácia a órbita de um único planeta, isso seria suficiente para determinar a massa do Sol. Contudo, como todas as medidas estão sujeitas a erros estatísticos e sistemáticos, é mais robusto fazer um ajuste considerando todas as órbitas conhecidas de maior precisão do que com uma única órbita. Acrescentamos que, usando este método, só é possível descobrir a massa do Sol se a constante gravitacional G for assumida conhecida (caso contrário, encontra-se um melhor ajuste para o produto GM_{\odot} , ao invés de M_{\odot} isoladamente). A constante G pode ser obtida a partir de experimentos gravitacionais em laboratório (ver por exemplo Wu et al. [19] para uma revisão recente).

Assumindo que gravitação newtoniana funcione em boa aproximação no sistema solar, que as órbitas dos planetas possam ser aproximadas por órbitas circulares e que os planetas sejam aproximadamente pontos massivos, um modelo para explicar os dados de posição por velocidade da

Fig. 2 advém da aceleração causada pelo Sol em uma partícula

$$a = G \frac{M_{\odot}}{r^2}, \quad (1)$$

em que r é a distância do Sol até a partícula, ou planeta. As últimas duas hipóteses, sobre órbitas circulares e sobre a geometria dos planetas podem ser relaxadas, mas as correções dessas últimas são pequenas, o modelo do jeito que está já fornece uma boa descrição da rotação do sistema solar (como pode ser visto na Fig. 2). Se as órbitas são assumidas circulares, então toda a aceleração gerada pela força gravitacional é uma aceleração centrípeta, logo a relação entre a velocidade de rotação e a aceleração é⁶ $a = V^2/r$, e portanto temos

$$V = \sqrt{G \frac{M_{\odot}}{r}}. \quad (2)$$

Dois relações qualitativas importantes aparecem da relação acima: *i*) a curva de rotação de uma partícula pontual decai com $1/\sqrt{r}$; *ii*) para qualquer distância fixa, V cresce com $\sqrt{M_{\odot}}$.

O comportamento das curvas de rotação de decair com $1/\sqrt{r}$ é às vezes chamado de decaimento kepleriano, devido a poder ser deduzido da terceira lei de Kepler. Às vezes diz-se também que, em galáxias, a necessidade de matéria escura se deve à ausência de decaimento kepleriano em suas curvas de rotação. A afirmativa anterior não é de todo precisa e necessita de atenção, pois galáxias são corpos extensos e mesmo na ausência de matéria escura as curvas de rotação de galáxias não seguiriam um decaimento kepleriano (apenas estariam mais próximas de tal tipo de decaimento).

4 As principais componentes materiais de uma galáxia

Por “matéria usual” entende-se qualquer forma de matéria que possa ser decomposta nas partículas do modelo padrão de partículas. Há um jargão largamente usado referente a “matéria bariônica”. Por ser largamente usado, e um pouco mais preciso do que “matéria usual”, vamos usá-lo também. A primeira coisa a ser feita é esclarecer o que significa “matéria bariônica”. Começemos pela definição de bárion.

⁶Para alunos: aconselhamos deduzir essa relação usando a definição do vetor aceleração: $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. Nota-se que essa relação só depende de geometria, neste caso, de geometria euclidiana.

Prótons e nêutrons são os exemplos mais bem conhecidos de bárions. As partículas formadas por três quarks são conhecidas por bárions.⁷ Existem vários outros bárions além de prótons e nêutrons, mas esses dois são suficientes para deixar claro que bárions são abundantes e que são relevantes para a massa dos objetos ao nosso redor. Dentre as partículas que não são bárions, podemos listar qualquer uma que não seja formada por quarks, o que é o caso por exemplo do elétron, do neutrino e do fóton. Há ainda as partículas formadas por quantidades pares de quarks e anti-quarks, chamadas de mésons. Todos esses últimos também são numericamente abundantes, mas há uma importante diferença: a massa macroscópica dos corpos a nossa volta, assim como dos planetas e estrelas, se deve predominantemente à quantidade de prótons e nêutrons, não à quantidade de elétrons, neutrinos, fótons, mésons e outras partículas. Assim, por matéria bariônica entende-se aquela matéria cuja massa advém predominantemente dos bárions. Isto se aplica a nossos próprios corpos, mesas, prédios, à Terra como um todo, estrelas e outros.

A Fig. 3 mostra diferentes informações que podem ser extraídas da observação da Via Láctea em diferentes bandas eletromagnéticas. Há várias outras bandas de relevância, mas mostramos três que são especialmente relevantes para curvas de rotação de galáxias.

4.1 Exemplos de contribuições não relevantes

As massas de planetas, asteroides e cometas combinadas é desprezível frente à massa da estrela à qual estão ligados. Por exemplo, massa de todo o sistema solar, sem o Sol, é inferior a 1% da massa do Sol sozinho [21]. Embora sejam conhecidos planetas “solitários”, ou interestelares, isto é, que não são gravitacionalmente ligados a um sistema estelar (possivelmente por terem sido ejetados de seu sistema estelar original em formação), não há nenhuma evidência, ou teoria de formação comumente aceita, de que tais planetas ou asteroides sejam abundantes a ponto de serem

⁷Bárions também podem ser formados a partir de outras quantidades ímpares de quarks, como os pentaquarks, contudo são partículas exóticas que estão longe de constituir a maior parte da matéria bariônica.

relevantes para a massa de uma galáxia. Limites superiores diretos não são especialmente fortes, mas podem ser inferidos por meio de lentes gravitacionais, microlenteamento gravitacional em especial (ver, por exemplo, [22, 23]). Estes limites também são relevantes para algumas propostas que consideram a possibilidade de existência de uma grande população de buracos negros não formados via colapso estelar, que estariam presentes desde bem antes da formação das primeiras estrelas, chamados de buracos negros primordiais, mas não estão entre as possibilidades mais prováveis; em parte devido aos limites de microlenteamento, além de dificuldades teóricas para explicar sua possível formação.

Buracos negros podem ter sido formados por matéria bariônica ou não. Só de “olhar para um” não dá para saber do que ele foi feito. Seguindo o modelo padrão cosmológico e a vertente mais usual para matéria escura, a contribuição de massa dos buracos negros é desprezível para a massa da galáxia como todo. Os buracos negros supermassivos se localizam no centro de suas galáxias correspondentes e têm massa ordens de magnitude inferior à da sua galáxia; assim são essenciais para a dinâmica em suas vizinhanças, mas *diretamente* não podem contribuir para a dinâmica gravitacional da galáxia de forma apreciável.

Chemin et al. [24] consideram explicitamente o efeito de algumas dessas contribuições não relevantes para a galáxia Andrômeda e, como seria de se esperar, o impacto do buraco negro central e do gás molecular são desprezíveis.

4.2 A contribuição estelar

A contribuição relevante mais evidente para a massa de uma galáxia vem da massa total das estrelas. O que não é simples é saber como converter o brilho estelar observado em massa estelar. No caso do Sol, o principal vínculo observacional sobre sua massa vem de seus efeitos gravitacionais, os quais observamos nos planetas do sistema solar em particular. A inferência de massa de outras estrelas pode ser feita por observação de estrelas binárias [1, 21]. A partir de suas órbitas, pode-se estimar ao menos a massa de uma delas.

A massa de uma estrela solitária pode ser estimada analisando seu espectro⁸ e comparando

⁸Um espectrógrafo em essência funciona como um prisma: ele decompõe a radiação emitida em várias

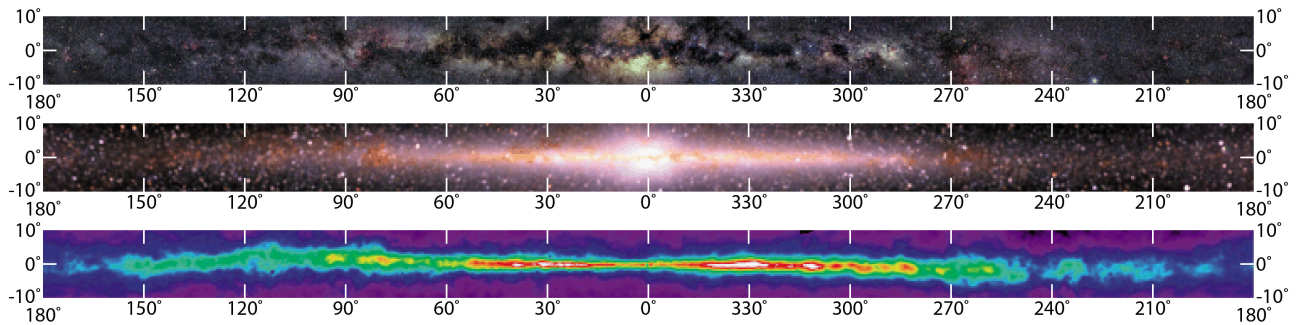


Figura 3: Imagens da Via Láctea em três diferentes bandas, de cima para baixo: visível, infravermelho próximo e centrada em 21 cm. O sistema solar está no disco da Via Láctea, assim só podemos fotografá-la de dentro desse disco, não temos imagem real da Via Láctea externa a esse disco. O aspecto irregular, enevoado, da banda visível se deve à absorção da luz estelar por nuvens moleculares do meio interestelar (efeito de extinção). Mesmo os melhores telescópios óticos não podem ver além dessas nuvens. O infravermelho próximo é quase insensível a efeitos de extinção, e vemos uma distribuição estelar bastante regular, com um bojo no centro e com um brilho que cai suave porém rapidamente com o raio. A radiação de 21 cm informa a distribuição do hidrogênio atômico (HI). Nota-se que sua distribuição é bem alongada, e, ao contrário das estrelas, a região de maior densidade do hidrogênio atômico não é no centro da galáxia. Fonte: *Goddard Space Flight Center, NASA*. Para mais detalhes, ver Ref. [20].

com o espectro de outras cuja massa é conhecida. De forma mais simplificada, pode-se analisar sua cor (que em astronomia se refere à diferença de luminosidade em duas faixas de frequência distintas), ao invés do espectro completo.

Exceto para estrelas na própria Via Láctea ou em algumas galáxias satélites da Via Láctea, o que se observa é um contínuo de luminosidade, ou mais precisamente um brilho superficial. Os telescópios atuais, exceto por casos isolados, não têm resolução suficiente para observar estrelas ou sistemas estelares individuais para a grande maioria das galáxias externas. Contudo podem observar estrelas especialmente brilhantes, como algumas estrelas cefeidas, ou explosões estelares, como supernovas. Para decifrar a massa estelar a partir de uma distribuição contínua de luminosidade, precisa-se de um modelo de população estelar. Grosso modo, onde há mais brilho estelar há mais massa estelar; a depender da frequência da luz observada, de efeitos de extinção (ou seja, de absorção da luz entre a emissão e o observador) e das populações estelares dominantes em cada região. Efeitos de extinção podem ser drasticamente reduzidos utilizando observações no infravermelho próximo, enquanto observações centradas no azul são particularmente suscetíveis a efeitos de extinção. Modelos de população estelar e os detalhes da conversão de luz estelar para massa são assunto extenso. Um importante e muito citado artigo no assunto é o de Bell & Jong [25]. Uma breve revisão pode ser vista em

frequências (ou cores).

Courteau et al. [26], ou ainda no livro de Binney & Tremaine [27] para uma apresentação menos específica. Apesar de uma série de fatores não triviais, o resultado final que nos interessa é muito simples: uma constante de proporcionalidade que associa luminosidade com massa, comumente denotada por Υ_X , em que X se refere ao intervalo de frequências, ou banda, da luz observada. Pode-se tratar da razão massa luminosidade para qualquer componente, mas, tal como é usual atualmente, aqui só iremos nos referir à razão massa-luminosidade estelar. Por exemplo, Υ_B se refere à razão massa-luminosidade estelar na banda B, que é uma banda bem conhecida, sendo centrada no azul. Essa “constante” em geral só é constante localmente, isto é, numa região da galáxia. Para algumas bandas, Υ pode ser em boa aproximação uma constante para uma galáxia inteira. Este é o caso das observações feitas em $3,6 \mu\text{m}$ pelo satélite Spitzer,⁹ que está na região do infravermelho (ver por exemplo [28]).

Uma galáxia pode ter essencialmente qualquer forma, mas existem algumas que são muito mais prováveis do que outras. São essas regularidades que deram origem à classificação de Hubble e outras que vieram depois, como a de De Vaucouleurs, mostrada na Fig. 1. Assim, não é de todo surpreendente que existam formas usuais da distribuição do brilho estelar. A densidade superficial luminosa média dos discos de galáxias, às vezes chamada de intensidade, pode ser descrita por uma expressão muito simples que cap-

⁹www.spitzer.caltech.edu.

tura bem o brilho superficial de grande parte dessas galáxias [29],

$$I(R) = I_0 e^{-R/h}, \quad (3)$$

em que a luminosidade total do disco, em dada banda, satisfaz

$$L = 2\pi \int_0^{R_{\text{limite}}} I(R) R dR. \quad (4)$$

Acima, R é a posição radial, estando o centro do disco em $R = 0$, R_{limite} dá o limite máximo em que I é integrado,¹⁰ I_0 é uma constante e h é a escala de comprimento do disco (também comumente denotado por R_D , e originalmente denotado por $1/a$ [29]). Diferentes discos de galáxias possuem diferentes valores de I_0 e h . A aproximação exponencial acima costuma ser especialmente adequada para raios maiores, enquanto junto ao centro esta descrição comumente descreve um comportamento médio com mais alta dispersão (além da possibilidade de haver um bojo, como comentado a seguir).

O disco com brilho superficial exponencial¹¹ (4), também chamado de disco de Freeman, é comumente usado para descrever e classificar discos estelares, e é também comumente usado como a melhor extrapolação para a distribuição da luz ou massa estelar além do raio observado. Naturalmente dos discos de Freeman não seguem até o infinito, e há casos em que variações bruscas do brilho superficial são observados, mas, considerando a Fig. 4 por exemplo, a melhor sugestão para saber como o brilho estelar segue um pouco além do raio observado é seguir traçando uma reta; e uma reta nesse gráfico corresponde a um comportamento exponencial, como o disco de Freeman.

Artigos diferentes podem citar valores diferentes de h para uma mesma galáxia, essa variação depende da banda em que a observação ocorreu, e

¹⁰Devido ao decaimento exponencial, usar R_{limite} como infinito ou algum valor finito razoável costuma ser indiferente. Por exemplo, a integração com $R_{\text{limite}} = 5h$ leva a um resultado 4% menor que $R_{\text{limite}} = \infty$.

¹¹O brilho superficial pode ser tanto expresso em unidades de luminosidade por unidade de área (por exemplo L_{\odot}/kpc^2) ou por meio de magnitude por segundo de arco ao quadrado (por exemplo, $m_{\odot}/\text{arcsec}^2$). Como magnitudes são obtidas a partir da luminosidades por meio de um logaritmo [1, 27], nas últimas unidades o disco de Freeman é descrito por uma reta, ao invés de uma exponencial. Às vezes usa-se também “densidade luminosa superficial” para se referir ao primeiro caso.

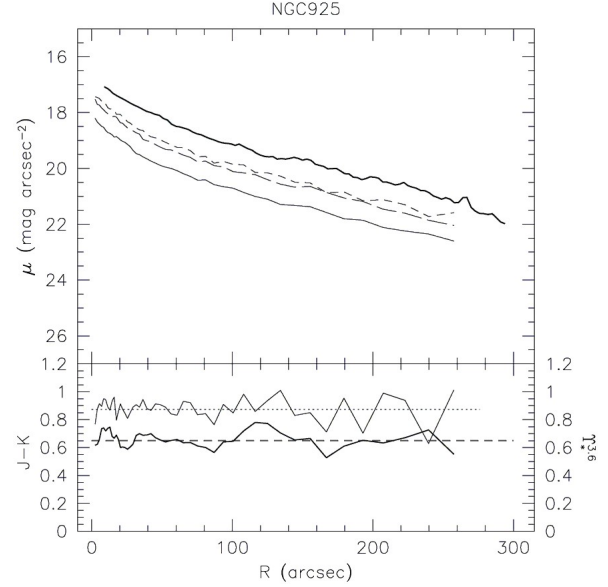


Figura 4: *Gráfico superior:* Exemplo de fotometria estelar ao longo do raio. Os dados se referem à galáxia NGC 925 (é galáxia de tipo SABd) e foram analisados pelo THINGS na Ref. [30], aonde a figura acima foi originalmente publicada. Cada uma das curvas trata de dados obtidos em bandas diferentes (em particular, a banda centrada em $3.6 \mu\text{m}$ é a sólida preta). Todas essas descrevem curvas de brilho superficial em função do raio que podem ser bem aproximadas por retas para raios suficientemente grandes ($R \gtrsim 100 \text{ arcsec}$). *Gráfico inferior:* A curva mais fina mostra a cor J-K ao longo do raio, cuja média é linha pontilhada. A curva preta mais grossa mostra o valor inferido de Υ_* a partir dessa cor e do modelo da Ref. [30]. ©AAS. Figura reproduzida com permissão.

de como h foi inferido: se buscou-se pelo valor de h que melhor descreve o disco completo, ou a melhor aproximação para raios grandes. O último caso é especialmente comum para galáxias com bojo, para as quais o disco é inferido a partir de dados para raios grandes, e em seguida extrapola-se a aproximação exponencial para raios pequenos, sendo possível realizar uma decomposição entre bojo e disco.

O disco descrito na Eq. (4) é um disco de espessura zero. Claramente ele é uma aproximação. É possível ir além dessa aproximação considerando algum modelo para a espessura do disco, e há também modelos adequados para esse caso. Para mais detalhes, ver por exemplo a revisão [31]. O impacto dinâmico da introdução da espessura é pequeno e mais relevante próximo ao centro da galáxia, dado que a densidade do disco ao longo do eixo- z necessariamente decai rapidamente, ou seja, um disco de espessura infinitesimal já é uma boa aproximação; mas, havendo necessidade de maior precisão, pode-se ir além. Há ainda outras

modelagens em princípio mais precisas, mas cuja acurácia não é tão bem estabelecida para galáxias, com exceção da Via Láctea. Este é o caso do uso de dois discos exponenciais com espessuras diferentes. A Via Láctea às vezes é modelada com um disco grosso e um fino [27], mas os dados de galáxias externas comumente não são robustos o suficiente para justificar essa divisão. Outra modelagem da parte estelar que ocorre comumente na nossa galáxia, mas dificilmente encontrada para outras galáxias, é o halo estelar. Além das estrelas que estão no disco, há uma população estelar que está distribuída em aproximadamente um halo esférico. Entretanto, a modelagem desse halo para outras galáxias insere uma complicação que não costuma ser justificável, dado que a massa desse halo estelar é muito menor do que a massa do(s) disco(s) estelar(es).

Cabe comentar que a formação de discos estelares, e ainda com a característica de serem exponenciais, foi durante um bom tempo um sério problema para as simulações numéricas de formação de galáxias. Atualmente, as simulações mais avançadas são capazes de gerar tais discos em boa concordância com as observações [33, 34]. Ressalta-se que isto não quer dizer que não haja nenhuma questão em aberto no assunto, mas que as simulações seguem progredindo, atingindo resultados que anteriormente eram impossíveis.

O bojo das galáxias de disco pode ser modelado de diferentes formas. Para a dinâmica geral da galáxia o bojo tem comumente pouco impacto, seu impacto dinâmico só é dominante próximo ao centro. Para algumas galáxias, uma forma precisa é tratá-lo com um perfil de De Vaucouleurs, ou, de forma mais geral, com um perfil de Sérsic [35], tal como as galáxias elípticas, como abaixo comentado. Entretanto, essas modelagens introduzem novos parâmetros e são computacionalmente muito mais pesadas do que simplesmente inserir um novo disco exponencial com pequena escala de distância (h) e outro I_0 , ou seja, um pseudobojo (tal como usado por de Blok et al. [30], além de outras referências). Pseudobojos podem ser representações realísticas (i.e., o bojo é um disco em rotação mais denso) ou podem ser aproximações um tanto grosseiras, mas suficientemente acuradas, dependendo da galáxia. As populações estelares no bojo, ou pseudobojo, são comumente compostas por estrelas mais velhas (alta metalicidade), com respeito à popula-

ção média do disco em si; logo é comum que a razão massa-luminosidade do bojo difira dessa razão para o disco.

O brilho superficial das galáxias elípticas segue, em média, uma lei que generaliza a exponencial anterior, chamada de perfil de Sérsic, que é dado por

$$I(R) = I_e e^{-b_n \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right]}. \quad (5)$$

Acima, I_e , b_n , R_e e n são constantes que podem mudar de galáxia para galáxia. R_e é o raio efetivo, definido como sendo o raio até o qual a metade da luminosidade total da galáxia se encontra. Ou seja, $L = 2 \times 2\pi \int_0^{R_e} I(R) R dR$.

Ao contrário do caso do disco de Freeman, converter o brilho superficial de Sérsic em uma densidade de massa não é trivial. Isto pois o brilho superficial é uma projeção bidimensional da densidade tridimensional do brilho da galáxia. A desprojeção pode ser feita se a geometria da galáxia for conhecida. O caso mais simples, dentre as elípticas, é o caso em que a galáxia é uma E0 ou outra elíptica de pequena elipticidade. Se for possível considerá-la como esférica (em geral isso é uma hipótese), a desprojeção pode ser feita usando uma transformada de Abel [26, 27, 36].

4.3 A contribuição do gás atômico interestelar

Uma contribuição muito importante para as galáxias espirais é a do gás atômico, em particular a do hidrogênio atômico. Essa contribuição não é relevante para galáxias elípticas pois é um fato observacional que essas galáxias são comumente pobres em regiões com hidrogênio atômico.

Em astronomia, é comum se referir ao hidrogênio atômico por HI e o hidrogênio ionizado por HII. Para um elemento denotado por X, XI se refere a esse elemento não ionizado, enquanto XII se refere ao mesmo elemento X, porém ionizado uma única vez.

O hidrogênio atômico (HI) emite uma radiação muito específica, com um comprimento de onda de 21 cm, que encontra-se na frequência das ondas de rádio. Dependendo do contexto, esse comprimento de onda pode ser classificado como microondas de grande comprimento de onda, próximo às ondas de rádio. No contexto da astronomia é comumente considerado como onda de rádio,

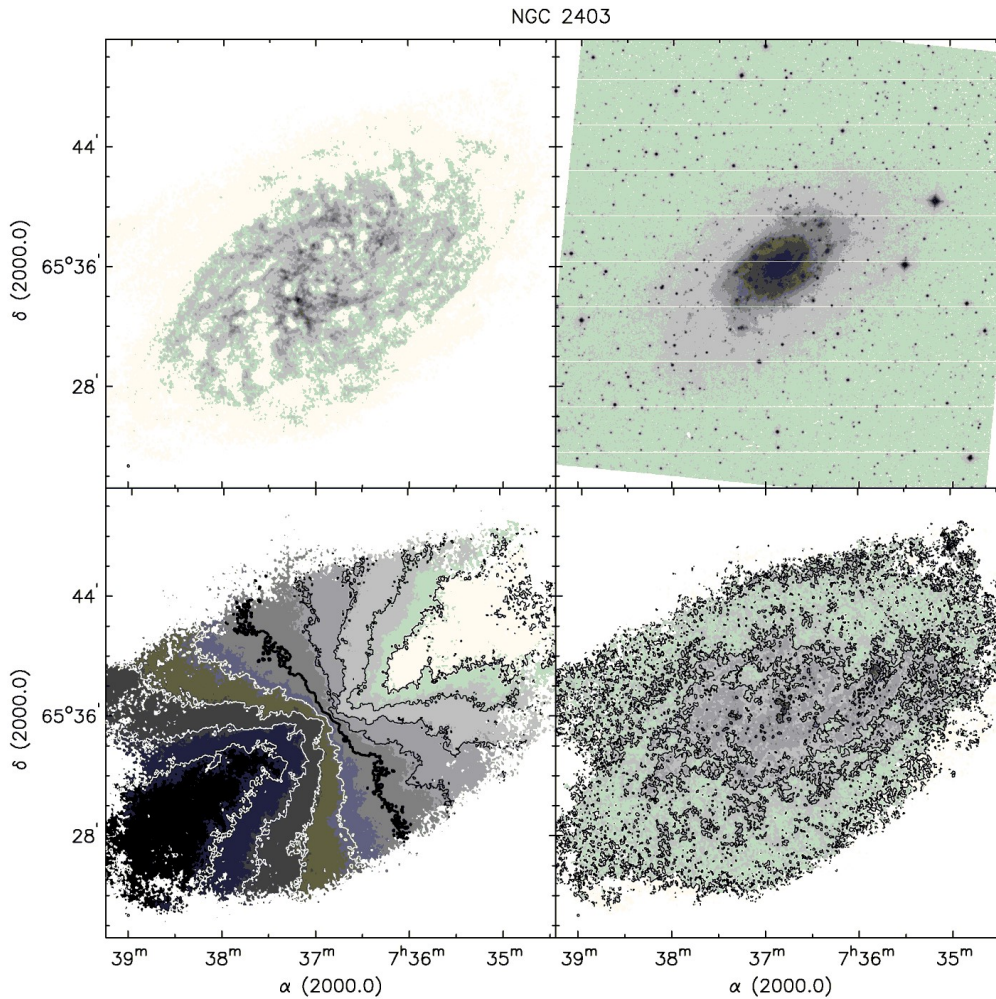


Figura 5: Conjunto de dados da galáxia NGC 2403 (SAcd), figura originalmente publicada na Ref. [32]. *Superior à esquerda:* Distribuição do hidrogênio atômico (dados de 21 cm). *Superior à direita:* Imagem ótica da galáxia. Nota-se que a região observada em 21 cm é significativamente maior que a observável no ótico (os eixos se referem à posição angular no céu e todas as imagens usam a mesma escala). *Inferior à esquerda:* Campo de velocidades referente ao desvio para o vermelho do HI. Cada contorno trata de curvas de igual velocidade. O contorno mais escuro, que passa pelo centro, corresponde à velocidade de 133,1 km/s, que é à velocidade global da galáxia (ela se afasta com essa velocidade). Os demais contornos são mostrados com intervalos de 25 km/s, de forma crescente da direita para a esquerda, logo o lado mais à esquerda dessa galáxia esta se afastando, enquanto o da direita está se aproximando, ou seja, ela roda no sentido horário. É importante notar que essas curvas de igual velocidade são bastante simétricas. *Inferior à direita:* Mapa de dispersão de velocidades. ©AAS. Figura reproduzida com permissão.

tendo sido essencial para a origem da radioastronomia.

A origem dessa radiação é muito bem entendida, vem de uma propriedade quântica chamada de estrutura hiperfina,¹² que se deve à interação entre o spin do núcleo e o da nuvem eletrônica. De forma mais específica, com respeito ao átomo de hidrogênio, van de Hulst foi quem deduziu o comprimento de 21 cm da radiação devido à mudança de spin relativo entre o próton e o elétron num átomo de hidrogênio. A energia do átomo

¹²Trata-se de tópico que faz parte do curso de mecânica quântica para a graduação em física.

é um pouco menor quando os spins não estão no mesmo sentido, logo se os spins estiverem alinhados no mesmo sentido, há uma chance do átomo espontaneamente emitir radiação levando à configuração de spins antialinhados, e essa radiação corresponde a um comprimento de onda de 21 cm. Na época da descoberta de van de Hulst, não era evidente que essas propriedades atômicas poderiam ser observadas quase que diretamente em escalas astronômicas, e inicialmente não estava claro qual seria a densidade do gás de HI na Via Láctea. Por exemplo, se esse gás fosse muito rarefeito, tais emissões poderiam não ser observáveis. Breves relatos sobre a história des-

sas questões, as quais deram origem à radioastronomia, podem ser encontradas nas Refs. [37, 38]. Os artigos originais sobre as observações que verificaram a existência dessa radiação de 21 cm e sua aplicação no contexto astrofísico encontram-se nas Refs. [39, 40]. Um artigo pedagógico de revisão sobre como deduzir, em detalhes, essa radiação (para quem já fez ou está fazendo um curso de mecânica quântica) encontra-se na Ref. [41].

Para estrelas, a conversão da luminosidade para sua massa não é tarefa simples. Embora haja sutilezas relevantes e detalhes técnicos bem específicos, a situação é consideravelmente mais simples para o caso da radiação de 21 cm devido a vários fatores, em particular pois a microfísica do átomo de hidrogênio é muito melhor compreendida do que a emissão de radiação de uma estrela ou de populações estelares. Outros fatores que também descomplicam a análise para o caso do gás de HI são a espessura desse disco, que é significativamente mais fino que o disco estelar, e a inexistência de efeitos de extinção relevantes para esse comprimento de onda de 21 cm.

A radiação das regiões de HI fornecem duas informações importantes: *i*) densidade de massa do gás HI. Isto pode ser obtido pois essa densidade é diretamente proporcional ao fluxo da radiação de 21 cm detectada. *ii*) a velocidade local da galáxia, que é inferida a partir do desvio para o vermelho (ou para o azul) dessa radiação.¹³ Como o comprimento de onda em repouso com respeito ao HI é muito preciso, quaisquer pequenos desvios devem ser devido ao efeito Doppler da luz.¹⁴ Logo pode-se falar de um desvio para o vermelho global da galáxia, o qual trata da velocidade global da galáxia, e, após uma subtração desse desvio global, restará um desvio residual, local, que indicará as velocidades internas da galáxia ao longo da direção de observação. Se, em certo lado de uma galáxia isolada, predominar um desvio para

o vermelho, e o lado oposto da mesma galáxia predominar um desvio para o azul, de forma simétrica, então essa galáxia estará em rotação.

Vários aspectos técnicos dessas observações das regiões de HI dependem dos instrumentos usados. Em particular, para o *Very Large Array*¹⁵ (VLA) ver o artigo original do *The HI Nearby Galaxy Survey* (THINGS) [32]. Num futuro próximo, o *Square Kilometre Array*¹⁶ (SKA) deve conseguir ir significativamente além do VLA para a observação de curvas de rotação de galáxias [42].

Uma importante propriedade dos discos de HI encontrados em galáxias de tipo tardio é a extensão desse disco. O HI pode ser detectado em regiões muito mais distantes do centro da galáxia do que a componente estelar [15, 26, 32, 42], e conseqüentemente são essenciais para determinar a distribuição de massa de galáxias longe de seu centro. Os grandes raios acessíveis às medidas de HI introduzem, porém, uma complicação adicional. É um fato observacional que esses discos, quando observados a grandes distâncias do centro, muitas vezes não se encontram num plano, mas apresentam variações simétricas, indicando que o plano do disco muda suavemente raio a raio, assim como a orientação do eixo principal. Em inglês, essas distorções são chamadas de *warps*. Essas torções podem estar presentes no disco estelar também, mas muitas vezes o disco estelar não é conhecido a raio suficientemente grande para que essas torções sejam relevantes. Para lidar com o fenômeno, Begeman¹⁷ [43] introduziu um método baseado num modelo de anéis inclinados (em inglês, *tilted ring model*). Há códigos abertos comumente usados para a análise dos dados bidimensional de HI e realizar a tarefa de corrigir a inclinação e a orientação do eixo principal raio a raio da galáxia. Em particular citamos o TiRiFiC¹⁸ [44] e o mais recente BBarolo¹⁹ [45].

4.4 Matéria escura

Veremos na próxima seção que as componentes estelares e gasosa não são suficientes para levar a uma concordância com as observações, é necessá-

¹³Um desvio para o vermelho não implica necessariamente uma aproximação à cor vermelha, é um jargão muito comum que quer dizer um desvio que reduz a frequência (ou aumenta o comprimento de onda) de certa radiação. Ou seja, se a radiação de 21 cm estiver com um comprimento de onda um pouco maior, essa radiação está sofrendo um desvio para o vermelho.

¹⁴É um efeito de relatividade especial. Este indica que a velocidade da fonte luminosa, cuja frequência de emissão em repouso é conhecida, pode ser imediatamente inferida a partir de seu desvio para o vermelho ou para o azul. No primeiro caso a fonte se afasta e no segundo se aproxima do observador.

¹⁵www.vla.nrao.edu.

¹⁶www.skatelescope.org.

¹⁷Este artigo do Begeman é também uma boa introdução técnica ao assunto de curvas de rotação de galáxias em geral. Há técnicas mais atuais, mas os fundamentos são bem explicados.

¹⁸[gigjozsa.github.io/tirific/](https://github.com/gigjozsa/tirific/).

¹⁹[editeodoro.github.io/Bbarolo/](https://github.com/editeodoro/Bbarolo/).

rio mais matéria. Ademais, essa matéria faltante precisa ter uma distribuição diferente daquela do gás atômico ou das estrelas.

As possibilidades de trocar toda essa matéria por uma gravitação modificada são pequenas, dados os vários vínculos observacionais que relatividade geral passa. Entretanto, esta ainda é uma área de pesquisa em aberto. Uma outra linha que tem sido explorada recentemente é a de não desenvolver uma gravitação diferente com o objetivo de eliminar matéria escura, mas tratar das consequências de outros tipos de gravitação, motivadas por outros argumentos, e suas inferências para matéria escura. Por exemplo, uma gravitação diferente de relatividade geral poderia alterar a abundância de matéria escura, alterar suas propriedades locais e também as expectativas de interação com a matéria bariônica.

Se há matéria escura no universo e essa é composta de partículas que (essencialmente) só interagem gravitacionalmente, essa matéria não contém os ingredientes necessários para formar disco, ela deve ser estável na forma de uma bola sustentada por dispersões de velocidade que se estende até raios bem além da matéria bariônica (mais detalhes sobre isso na Seção 6). Este, dentre outros argumentos, levaram ao estudo de halos esféricos de matéria escura (mesmo para galáxias de disco).

Podemos notar duas grandes classes de propostas de halos esféricos de matéria escura passaram a ser discutidas. Uma fenomenológica e outra motivada por simulações numéricas. Vamos aqui apenas comentar sobre um exemplo de cada classe, a saber o halo de Burkert [46] e o de Navarro, Frenk e White (NFW) [47, 48]. O primeiro é motivado fenomenologicamente, ou seja, a partir de várias observações inferiu-se que esse é um halo que descreve bem várias galáxias observadas, além de ser razoavelmente simples (depende de dois parâmetros que podem variar de galáxia para galáxia). Esse halo já foi avaliado em vários estudos, e, dentre outros estudos, foi largamente usado por Sallucci e colaboradores [49–51]. Ele costuma ser mais favorecido para galáxias menores (com massas estelares da ordem de $\sim 10^8 M_\odot$), mas mesmo galáxias grandes (com massas estelares de $\sim 10^{10} M_\odot$, como é o caso da Via Láctea) também parecem favorecer esse tipo de halo [52].

Explicitamente, sua densidade é dada por²⁰ [46]

$$\rho_{\text{Bur}}(r) = \frac{\rho_c}{\left(1 + \frac{r}{r_c}\right) \left(1 + \frac{r^2}{r_c^2}\right)}, \quad (6)$$

em que r_c e ρ_c são dois parâmetros do halo, chamados de raio e densidade do núcleo (ou caroço) (o índice “c” se deve a *core*, em inglês). Esses parâmetros podem variar de galáxia para galáxia, refletindo propriedades de sua formação.

Para raios grandes $r \gg r_c$, a densidade acima decai com r^{-3} e, para raios pequenos ($r \ll r_c$), é uma constante, $\rho_{\text{Bur}} \sim \rho_c$. É essa última propriedade que leva esse halo a ser considerado um halo com núcleo, em contraposição aos halos que possuem um grande e rápido crescimento da densidade no centro, como o caso abaixo.

A densidade do halo de NFW, encontrada no contexto de simulações só com matéria escura, sem bárions, é dada por [47, 48]

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s} + 1\right)^2}, \quad (7)$$

em que r_s e ρ_s são dois parâmetros que em geral variam de galáxia para galáxia. É um halo parecido com o de Burkert, mas tem uma diferença crucial, pois para raios muito pequenos, $r \ll r_s$, ρ_{NFW} cresce sem limite. Isso não quer dizer que as simulações numéricas levem a uma densidade que seja verdadeiramente infinita, apenas que, até o limite de resolução das simulações (da ordem ou um pouco menor que 1 kpc), a densidade encontrada segue aumentando conforme o raio diminui. Felizmente, embora a densidade formalmente seja ilimitada próximo ao centro da galáxia ($r = 0$), o perfil de massa $M_{\text{NFW}}(r)$ é sempre finito; ou seja o total de massa contido no raio r é finito, mesmo que a densidade seja infinita (uma integração direta mostra isso). Tanto para Burkert quanto para NFW, pode-se calcular o perfil de massa explicitamente, e são funções suaves, bem comportadas.

Existem várias sutilezas e propriedades referente aos halos inferidos por simulações numéricas, uma boa revisão é o livro [53]. Há grupos que encontram halos que não condizem perfeitamente com o de NFW, e, em geral, a introdução de bárions nas simulações leva a correções que podem ser relevantes (e.g., [54]). Simulações

²⁰Usamos r , e não R , pois o halo é esférico; reservamos R para a coordenada radial cilíndrica.

mais recentes do mesmo grupo que encontrou o halo (7) indicam que esse halo segue funcionando como uma boa aproximação, mas que uma ainda melhor descrição pode ser obtida com um outro halo [55], posteriormente identificado como um perfil de densidade de Einasto.

5 Curvas de rotação de galáxias

Atualmente, devido às vantagens levantadas na seção anterior, é esperado que curvas de rotação de galáxias de boa qualidade incluam sempre dados oriundos do HI. Além desses dados, podem ser usados outros, com o intuito de aumentar a precisão, especialmente no centro das galáxias, aonde o HI é comumente pouco abundante. Por exemplo, a radiação $H\alpha$, que é emitida por átomos de hidrogênio ionizados (ou seja, emitida por regiões de HII), é comumente mais abundante no centro das galáxias. Não é raro encontrar curvas de rotação híbridas, que foram deduzidas considerando mais de um elemento, sendo o HI o principal deles.

5.1 Os dados observacionais da velocidade circular

Depois que os dados de HI foram devidamente analisados, e sendo a galáxia suficientemente simétrica, pode-se tratar os dados bidimensionais (i.e., a imagem da galáxia em certa banda) de forma unidimensional. É possível em particular inferir a velocidade de rotação da galáxia em diferentes valores para o seu raio, tal como ilustrado pelos dados em vermelho na Fig. 6. Códigos como o BBarolo são capazes de gerar os dados observacionais a partir da imagem observada. Nota-se que é essencial saber qual a inclinação da galáxia raio a raio, para poder inferir a velocidade de rotação local. Isto pois a velocidade de rotação é inferida a partir do desvio para o vermelho da radiação de 21 cm, logo só temos acesso direto à velocidade ao longo da linha de visada (i.e., na direção de observação). A informação sobre qualquer componente de velocidade perpendicular à linha de visada é em princípio desconhecida. Assim, a correção por inclinação ao longo do eixo principal (ou seja, do maior eixo da galáxia) é dada por

$$V = \frac{1}{\sin i} V_{\text{ldv}} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{\sin i} \sigma_{\text{ldv}}, \quad (8)$$

em que i é a inclinação da galáxia observada (detalhes abaixo), V_{ldv} e σ_{ldv} são respectivamente a velocidade e sua incerteza correspondente na direção da linha de visada, sendo inferidas pelo desvio para o vermelho; enquanto V e σ se referem à velocidade circular e sua incerteza. Poderíamos usar V_c para deixar claro que essa velocidade se refere à velocidade circular, mas como aqui quase sempre estaremos tratando dessa velocidade, não vamos usar esse índice c . Não é essencial para esta apresentação, mas pode-se tratar dessas expressões fora do eixo principal, neste caso aparece uma divisão adicional por $\cos \theta$, em que θ é o ângulo entre o semieixo principal em que a galáxia está se afastando e o ponto de interesse.

Há uma convenção usual para expressar a inclinação de uma galáxia: galáxias de disco que parecem circulares, chamadas de *face-on* (com a cara para nós), têm $i = 0^\circ$; já as galáxias que estão posicionadas tal como a Via Láctea está posicionada para nós (ver Fig. 3), são chamadas de *edge-on* (com a borda para nós) e têm $i = 90^\circ$. Assim, para galáxias com a borda para nós, $V = V_{\text{ldv}}$. Para as galáxias com a cara para nós, não há velocidade de rotação ao longo da linha de visada, isto é, toda a velocidade associada à rotação será perpendicular ao plano de visada. Consequentemente, $V_{\text{ldv}} = 0$ e V não pode ser determinado.

Como deve estar claro com a apresentação acima, os dados observacionais indicados na Fig. 6 contém uma série de reduções com respeito aos dados brutos do brilho superficial do HI. Um detalhe importante é o significado das barras de erro desses dados. Os erros da velocidade circular têm essencialmente três fontes: *i*) o erro do desvio para o vermelho em si, que depende do instrumento de medida, mas costuma ser um erro relativamente baixo, de alguns quilômetros por segundo. *ii*) As assimetrias entre a curva de rotação que se afasta e a que se aproxima. Se em dado raio R_0 e para um lado da galáxia, a velocidade é $V_c(R_0)$; para o lado oposto, ao longo do eixo principal, esperamos que a velocidade seja $-V_c(R_0)$. Na prática, essa concordância nunca é perfeita. Galáxias que mostram grande assimetria entre a curva de rotação que se aproxima e a que se afasta são comumente descartadas para análise de massa a partir de curva de rotação. Dentre as que são suficientemente simétricas (os critérios específicos vão depender das convenções do grupo que tratou os dados), quanto maior for

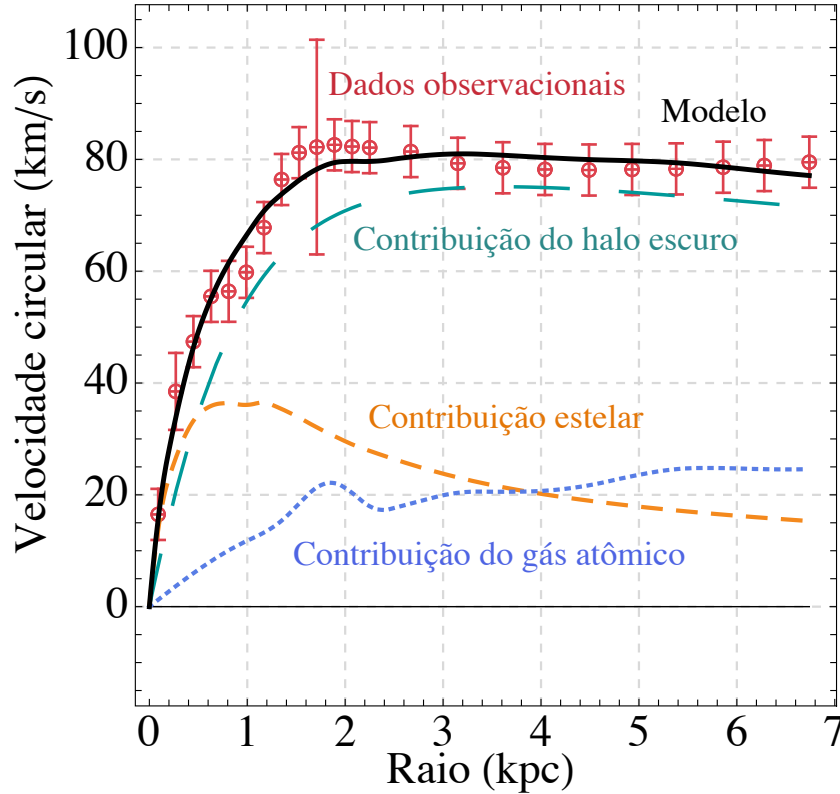


Figura 6: Exemplo de curva de rotação. Embora haja certas semelhanças, não existe uma única curva de rotação que mostre o comportamento de todas, este é apenas um exemplo. Para este exemplo, os dados são da galáxia UGC 05721 [56], o ajuste e a figura (a menos de pequenas edições, como a tradução e a inserção das explicações) foram gerados através do código MAGMA [57], assumindo certo halo de matéria escura. Os pontos vermelhos com barras de erro são os dados observacionais da velocidade circular, a curva pontilhada (azul) é a contribuição do gás atômico (hidrogênio e hélio), a curva tracejada curta (alaranjada) é a contribuição da parte estelar, a curva tracejada longa (esverdeada) é a contribuição do halo de matéria escura (assumido ser o halo de Burkert aqui), e a curva sólida (preta) é o melhor ajuste do modelo completo (tanto para a parte bariônica quanto para a parte não-bariônica). A contribuição total de velocidades circulares é calculada pela raiz da soma dos quadrados, não por uma simples soma.

a diferença dessas velocidades maior deve ser o erro da velocidade circular na curva de rotação. Contudo, não há uma fórmula geral que todos os grupos usem; dados com origens diferentes muitas vezes usam convenções diferentes para estimar esses erros. Os resultados por fim costumam ser bem próximos, mas não idênticos. *iii*) Embora seja um erro sempre presente, é uma convenção largamente usada que os erros de inclinação não entram no cálculo de σ , logo quando a incerteza da inclinação for levada em consideração é necessário reavaliar σ , o que também altera V . Esse processo é simples para o caso de uma mudança global da inclinação, ver a Eq. (8), mais detalhes podem ser vistos por exemplo na Ref. [58]).

Em conclusão, para saber precisamente o significado de σ deve-se ver os artigos específicos no qual esses erros foram determinados, não há uma convenção única, mas comparando vários traba-

lhos nota-se que há semelhanças entre as convenções.

A Ref. [59] faz várias comparações interessantes entre curvas de rotação obtidas por grupos diferentes e instrumentos diferentes para uma mesma galáxia, e, como esperado, encontra algumas diferenças pontuais, mas em geral boa concordância.

5.2 A curva de rotação bariônica

A curva de rotação bariônica possui essencialmente duas componentes: a estelar e a do gás. Embora haja uma série de detalhes técnicos envolvidos, em essência, a partir do brilho de cada uma delas, encontra-se suas respectivas densidades. A densidade do gás é quase sempre designada por uma densidade superficial $\Sigma_{\text{gas}}(R)$, o código BBarolo pode ser usado para encontrá-la. Há possíveis fórmulas

analíticas que descrevem essa densidade de forma aproximada; mas em geral são fórmulas menos simples e sujeitas a mais diferenças com respeito aos dados observacionais que o perfil exponencial estelar. Por isso, não é muito comum usar fórmulas analíticas para o gás no contexto de ajuste de curvas de rotação. Para um exemplo de uso recente, ver por exemplo Green & Moffat [60] e referências citadas. Mesmo para o caso de estrelas, o padrão é não usar a expressão analítica do disco de Freeman (exceto pelo seu uso como uma extensão do perfil estelar além do raio observado). Isto pois muitas vezes é fácil usar a expressão diretamente inferida pela fotometria estelar e calcular o potencial newtoniano de forma numérica (ver Apêndice A).

Abaixo explicamos qualitativamente como se obtém a curva de rotação bariônica. Vários outros detalhes mais específicos, que visam em especial alunos de astronomia, física ou áreas afins, encontram-se nos Apêndices B e C.

5.3 Obtenção da velocidade circular

Em geral a obtenção dessa velocidade requer análise numérica com um computador. Há alguns resultados para algumas distribuições de matéria bem simplificadas que podem ser obtidos à mão, mas, como dito, são aproximações pouco precisas que não capturam as individualidades de cada galáxia. Um estudo aprofundado sobre as relações analíticas entre densidade e potencial newtoniano encontra-se no livro de Binney & Tremaine [27].

Conhecidos os perfis de densidade do bojo e do disco estelar, além do perfil de densidade do gás, pode-se encontrar o potencial newtoniano por meio da Eq. (12), e a velocidade circular devido a cada uma dessas componentes vem da Eq. (14). Ou seja, esquematicamente temos,

$$\rho_i \longrightarrow \Phi_i \longrightarrow V_i^2, \quad (9)$$

em que o índice i está no lugar de qualquer uma das possíveis componentes materiais. Os procedimentos simbolizados pelas setas podem ser difíceis ou impossíveis analiticamente, mas são possíveis numericamente.

Depois de encontrada a velocidade circular de cada componente, o quadrado da velocidade circular total é obtido pela soma dos quadrados das

velocidades das componentes, como indicado na Eq. (20). Não vale a soma linear de velocidades circulares. Mais detalhes encontram-se no Apêndice B.

6 Inferência de matéria escura

Na seção anterior vimos como tratar os principais dados da matéria usual, ou matéria bariônica, em galáxias de tipo espiral. Vimos que as duas principais componentes da matéria bariônica são a do gás atômico (formado primordialmente por HII) e a estelar, esta última tendo como principais subcomponentes uma parte de disco e outra de bojo. Nesta seção veremos como tratar a distribuição de matéria escura.

Há muitos exemplos de galáxias em que toda a matéria bariônica (mesmo considerando suas incertezas) não é capaz de reproduzir a curva de rotação observada, ou seja, algo mais está faltando. O comportamento de muitos casos é bem ilustrado pela Fig. 6. Esse comportamento deixa evidente que a magnitude da curva de rotação observada está muito longe da contribuição bariônica esperada.

Dado que há incertezas na matéria usual (em especial na razão massa luminosidade Υ), como determinar o que está faltando? As primeiras abordagens foram bem simples, usando os chamados disco máximo e mínimo. Em essência consideravam dois casos extremos, um caso usando um Υ tão pequeno que poderia ser aproximado por zero; e outro usando o maior valor de Υ tal que a curva de rotação bariônica não fosse maior que a curva de rotação observada; e mesmo este último caso extremo indica a necessidade de matéria escura (o que está faltando precisa ter uma distribuição diferente da distribuição da matéria luminosa). O que haveria de matéria escura deveria estar entre esses casos extremos. Contudo, essa abordagem é muito qualitativa e não é nada robusto. Além das revisões já mencionadas, ver por exemplo [61], para uma discussão sobre os problemas associados ao disco máximo.

Com o tempo, os erros da parte bariônica foram sendo reduzidos. O advento de medidas e de modelos de população estelar no infravermelho foi essencial para reduzir significativamente as incertezas em Υ . O entendimento de matéria escura num contexto maior, o cosmológico, foi também sendo aprofundado; e novas formas de inferência

de matéria escura foram se solidificando, como por meio de lentes gravitacionais.

Um resultado antigo e que foi importante para consolidar que só incertezas bariônicas não dariam conta de eliminar a matéria escura se refere à estabilidade dos discos estelares [31, 62], pois a existência de halos esféricos de matéria escura seria importante para estabilizar tais discos.

Isso levanta duas questões: *i)* Por que, ao menos para as galáxias espirais, toda a matéria bariônica ficaria aproximadamente na forma de um disco enquanto a matéria escura se distribuiria de forma esférica? *ii)* Como pode uma distribuição esférica de matéria, sem contato interno, só interagindo gravitacionalmente, ser estável?

A última pergunta é mais simples, estabilidade numa distribuição esférica é possível. O que dá suporte dinâmico nesse caso é a dispersão de velocidades, ao invés da rotação. Para o caso esférico, cada partícula estaria constantemente “caindo em direção ao centro”, indo de um lado para o outro da galáxia, mas em tempos e posições diferentes. Assim, localmente, teríamos uma diversidade de trajetórias possíveis, mas globalmente o efeito seria o de uma bola estável. Nesse caso, ao invés da Eq. (14), deve-se usar a equação de Jeans (ver Binney & Tremaine [27] para uma revisão).

A primeira pergunta só pode ser completamente respondida junto de um estudo de formação e evolução das galáxias (ver por exemplo o livro de Mo, Bosh & White [53]). O que causa a diferença nas evoluções das matérias escura e bariônica é a simplicidade da primeira com respeito à segunda. Em princípio, matéria escura só interage gravitacionalmente e assim não pode formar nenhuma estrutura mais complexa do que halos de matéria escura. Já a matéria bariônica emite radiação, perde energia dessa forma, pode colapsar até densidades muito elevadas, formando estrelas, estrelas explodem, espalham matéria pela galáxia e para fora dela, além de aumentar a agitação térmica e alterar a composição química do resto da matéria. Simulações que envolvem matéria bariônica são muito mais complexas do que as com matéria escura somente. Entendemos que a radiação da matéria bariônica retira energia de sua agitação térmica, o que permite atingir densidades inacessíveis para a matéria escura, e por isso no centro de galáxias há mais matéria bariônica do que escura, enquanto para raios grandes a relação entre elas é invertida. Sobre a formação

de discos, há vários fenômenos envolvidos, mas o princípio básico é que nesse processo de colapso dos bárions há perda da energia média das partículas, mas o momento angular se conserva em média.

6.1 Inferência quantitativa

Para dada modelagem bariônica e dado perfil de densidade do halo de matéria escura, podemos nos perguntar qual a configuração mais provável. A modelagem bariônica tem incerteza nas razões massa-luminosidade estelar, mas distância e inclinação da galáxia estudada são outras fontes que podem ser relevantes. Fixado um perfil de halo de matéria escura, há ainda dois parâmetros livres (considerando os halos comentados anteriormente). Para encontrar a configuração mais provável, o que se faz é maximizar certa probabilidade. Que probabilidade é essa?

Os dados observacionais da curva de rotação, como na Fig. 6, informam, para certos valores do raio, o valor mais provável da velocidade de rotação, junto de seu “erro”, ou, mais precisamente, sua incerteza. Cada uma dessas incertezas determina um intervalo de velocidades cuja probabilidade associada é de 68%; ou seja, para cada um dos pontos com dados, há 68% de chance da velocidade estar dentro das barras de erro.²¹ As razões massa-luminosidade não podem ser quaisquer, dependendo dos dados e da modelagem das populações estelares, há ou uma região de valores igualmente prováveis, ou um valor mais provável com certa incerteza associada (também comumente expressa com uma probabilidade de 68%). Normalmente, num contexto padrão de matéria escura, as incertezas na distância e inclinação da galáxia não são tão relevantes, mas na prática isso vai depender da qualidade dos dados de cada galáxia. Esse tipo de problema, de encontrar os valores mais prováveis de certos parâmetros, é comumente reexpresso como um problema de minimização de χ^2 . Há uma estatística bem conhecida associada a esse tipo de problema. Considerando os desenvolvimentos mais recentes, usa-se uma forma mais geral de inferência estatística chamada de inferência bayesiana,²² tal como

²¹Essa probabilidade de 68% corresponde à probabilidade da região de 1σ de uma densidade de probabilidade gaussiana. Para mais detalhes, ver a Ref. [63] por exemplo.

²²Devido a Thomas Bayes (1701-1761).

usada nas Ref. [57,58], aonde mais detalhes sobre como aplicar esse tipo de estatística no contexto de galáxias são abordados. A estatística bayesiana é largamente usada atualmente como o estado da arte para inferir valores de parâmetros e suas incertezas; além de diversas outras aplicações. Curiosamente, durante muito tempo ela teve um papel marginal na ciência, sendo considerada sem sentido pelos adeptos da estatística frequentista. Atualmente, a abordagem frequentista é muitas vezes interpretada como um caso particular da estatística bayesiana. O livro [63] também pode ser usado como uma introdução ao assunto.

Fazer essas análises estatísticas de galáxia em galáxia é trabalho árduo, em geral, especialmente pois os conjuntos de dados atuais de curvas de rotação envolvem mais de uma centena de galáxias. Tratar cada uma delas “artesanalmente” pode ser trabalho inviável. Para esse fim, um código disponível, e por um de nós desenvolvido, é o *Mathematica Automates Galaxy Mass Analysis*²³ (MAGMA). O MAGMA sozinho faz minimização de χ^2 (funciona para modelos com vários parâmetros livres e não lineares, podendo incluir incertezas bariônicas e *priors* gaussianos na versão atual), mas não faz marginalização de parâmetros ou computa regiões de credibilidade ou confiança.²⁴ Contudo, ele tem saída de arquivos que podem ser lidos por outros programas que são úteis para essa análise, como o *emcee*²⁵ e o *mBayes*.²⁶ Ademais, este código pode ser usado para gerar os gráficos de todas as curvas de rotação de todas galáxias que foram por ele analisados (semelhantemente à Fig. 6), além de ter uma função para compilar todos os resultados individuais numa única tabela; o que é útil como ponte de partida para análises de dados posteriores, como busca por correlações entre parâmetros.

Enquanto as primeiras curvas de rotação eram comumente estudadas analisando casos extremos (os chamados discos mínimo e máximo), o uso de inferência baseada na minimização de χ^2 trouxe

²³github.com/davi-rodrigues/MAGMA.

²⁴Como o MAGMA faz minimização a partir de repetidas execuções de evolução diferencial [64,65] em paralelo, para encontrar o mínimo global ele é em geral mais eficiente do que métodos de MCMC. Saber aonde está o mínimo global de χ^2 pode ser muito relevante como ponto de partida para o MCMC. Há vários casos neste contexto em que χ^2 tem múltiplos mínimos locais.

²⁵emcee.readthedocs.io.

²⁶github.com/valerio-marra/mBayes.

critérios quantitativos, ainda que usando algumas aproximações não de todo bem justificadas, em particular sobre o uso do χ^2 -reduzido (comumente denotado por χ_{red}^2), ver [66] para uma crítica geral. Critérios como BIC e AIC, às vezes vistos como superiores ao χ_{red}^2 , também dependem de aproximações que nem sempre são razoáveis, podem ser melhores sim, mas em alguns contextos. Em geral têm de ser usados com cuidado.

Há uma tendência geral, em parte devido ao maior poder computacional atualmente disponível, de rumo a estatísticas mais robustas e em particular baseadas em inferência bayesiana. Uma discussão sobre o assunto, neste contexto de curvas de rotação de galáxias, pode ser vista em [67,68]. Há certamente vários desenvolvimentos na área, envolvendo métodos estatísticos, que ainda podem vir a ser implementados.

6.2 O que pode-se dizer sobre matéria escura em galáxias a partir das curvas de rotação?

Ao avaliar modelos diferentes para matéria escura, seja com gravitação newtoniana ou outra, é possível compará-los e ver qual se sai melhor. A forma mais simples de fazer isso é qualitativamente. Para um pequeno conjunto de galáxias, e para resultados que são sistematicamente ruins, só de olhar para as curvas de rotação inferidas por cada modelo pode ser evidente notar que um modelo possui problemas sistemáticos para se ajustar às curvas esperadas. Por exemplo, vimos que o halo de NFW depende em geral de dois parâmetros. As simulações numéricas indicam que esses parâmetros estão na verdade correlacionados [53]. Caso seja usada uma versão forte da correlação do halo de NFW, assumindo que um parâmetro possa ser escrito em função do outro, obtém-se alguns resultados que estão sistematicamente em conflito com as observações (por exemplo, [50,69]). Há vários outros casos em que comparações qualitativas simples são suficientes para dizer se um modelo é aceitável (ou seja, aparentemente não tem problemas) ou certamente possui problemas; por exemplo, no contexto de gravitação modificada, ver as comparações feitas na Ref. [70]. Para o caso de dois parâmetros livres do halo de NFW, ainda assim o halo de NFW segue sendo inferior ao halo de Burkert (ou outros perfis com um núcleo) para muitas galáxias, mas essas questões são mais sutis (por exemplo, [52,59,71]).

Para esses casos mais sutis, técnicas mais quantitativas são necessárias.

Além de servir de comparação de modelos, buscando ver quais tem problemas e quais podem corresponder com os dados observacionais, a análise da curva de rotação da Via Láctea pode ser usada para estimar a densidade de matéria escura nas vizinhanças do sistema solar (por exemplo, [72–74]), e conseqüentemente com impacto para detecções de partículas de matéria escura em laboratórios [75]. Com respeito a partículas de matéria escura com interações além da gravitacional, entender a distribuição de matéria escura em outras galáxias é útil para estimar a densidade central de matéria escura e a possibilidade de colisões dessas partículas, as quais poderiam gerar outras partículas detectáveis por outras observações [75].

Saber sobre como a matéria escura deve ser distribuída em galáxias é de fundamental importância para entender o que matéria escura pode ser de forma microscópica.

Para uma visão geral sobre as pesquisas brasileiras no tópico de matéria escura, ver a Ref. [76]. Há várias pesquisas em andamento que não foram aqui abordadas.

7 Conclusões

Apresentamos aqui uma revisão sobre curvas de rotação em galáxias, em particular como interpretá-las e o que elas nos dizem sobre matéria escura. Tentamos aqui não sermos muito específicos, mas ao mesmo tempo buscamos entrar em suficientes detalhes para que o leitor possa ter uma ideia de como nosso trabalho é feito. Para aqueles que se interessarem no assunto e tenham interesse em começar a trabalhar, esperamos que esta revisão possa ajudar como um guia inicial, levantando direções de onde procurar por mais informações específicas.

Agradecimentos

A.H.A agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, Brasil) e ao *Deutscher Akademischer Austauschdienst* (DAAD, Alemanha) pelo apoio concedido durante seu doutorado. D.C.R agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e

Tecnológico (CNPq, Brasil) e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES, Brasil) por apoios a projetos de pesquisa. O presente trabalho fez uso da base de dados SIMBAD (operado no CDS, Strasbourg, França) e foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Sobre os autores

Alejandro Hernández-Arboleda (hernandezaa-lejandro100@gmail.com) é graduado em Física e Matemática pela Universidad de los Andes, Colômbia, com Mestrado em Física Teórica na mesma universidade. Atualmente é estudante de doutorado do PPGCosmo e membro do Núcleo de Astrofísica e Gravitação (Cosmo-ufes), ambos da UFES. Seu principal interesse de pesquisa é em astrofísica de galáxias, com ênfase para matéria escura e curvas de rotação, além de gravitação (incluindo relatividade geral e extensões).

Davi C. Rodrigues (davi.rodrigues@cosmo-ufes.org) é professor do Departamento de Física da UFES desde 2010, membro do Núcleo de Astrofísica e Gravitação e dos programas de pós-graduação PPGCosmo e PPGFis. É pesquisador do CNPq. Fez graduação e mestrado na UFJF, em Física, concluiu o Doutorado em Física na UFRJ em 2006 e fez pós-doutorados na Universidad de Santiago de Chile (Usach), na Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC-Chile) e na Unicamp. Atua nas áreas de astrofísica de galáxias, gravitação (relatividade geral e extensões) e cosmologia.

Apêndice A: Gravitação newtoniana para corpos extensos

O modelo assumido na Fig. 2 é simplesmente gravitação newtoniana com uma massa pontual, o Sol. Os planetas são tomados como partículas testes, isto é, suas massas são desprezíveis. Para tratar de galáxias, precisaremos de gravitação newtoniana para corpos extensos, assim apresentamos aqui esta formulação e sua relação com o caso de partículas. Aqui começaremos pelo caso contínuo, que será mais útil para nossas aplicações, e a partir dele veremos que é imediato encontrar a solução de partículas (ou seja, é um

caminho inverso com respeito a vários livros introdutórios à gravitação newtoniana, mas mais próximo da abordagem da pesquisa atual, e coloca os princípios da gravitação newtoniana mais próximos das equações da relatividade geral). É necessário, porém, que haja alguma familiaridade com a delta de Dirac²⁷. A gravitação newtoniana para corpos extensos pode ser expressa pelas equações diferenciais

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (10)$$

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi. \quad (11)$$

Denotamos vetores e operadores vetoriais por símbolos em negrito, em particular $|\mathbf{a}| = a$ e $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$.

Para dada distribuição de massa, $\rho(\mathbf{r})$, a primeira equação diz como encontrar o potencial $\Phi(\mathbf{r})$. Conseqüentemente, esta equação isoladamente não tem conteúdo físico algum. A segunda equação acima é uma equação vetorial e diz como relacionar $\Phi(\mathbf{r})$ com uma força por massa, ou seja, uma aceleração. Esse conjunto de equações descreve a dinâmica da gravitação newtoniana.

Muitas vezes é conveniente reexpressar a Eq. (10) na forma integral, a saber:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (12)$$

A solução acima pode ser facilmente verificada para quem já sabe de algumas propriedades da delta de Dirac (ou, melhor ainda, pode ser facilmente deduzida para quem já sabe o que é função de Green).

Para um corpo que está órbita estável circular, sua aceleração é puramente a centrípeta, que é dada por

$$\mathbf{a} = -\frac{V^2}{r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (13)$$

Conseqüentemente, usando a Eq. (11),

$$\partial_r\Phi = \frac{V^2}{r}, \quad (14)$$

pois só a componente radial é não nula. Em outros momentos vamos usar R no lugar de r . Reservamos r para a coordenada radial das coordenadas esféricas, enquanto R se refere à coordenada radial das coordenadas cilíndricas.

²⁷Ela é definida de forma tal que $\int_a^b \delta(x)dx$ vale 1 se $0 \in (a, b)$, e vale 0 caso contrário. Ela é a forma mais natural de tratar uma densidade que, integrada num volume infinitesimal, resulta numa massa finita positiva e independente do volume infinitesimal escolhido. Para mais detalhes, ver por exemplo a Ref. [77].

Veremos agora como obter as soluções de massas pontuais a partir das equações para o contínuo. A famosa expressão de força entre duas massas pontuais,

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (15)$$

é um caso particular das expressões anteriores. A equação acima, junto da segunda lei de Newton, implica que a aceleração sofrida pela massa m_2 é

$$\mathbf{a}_2 = -G \frac{m_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (16)$$

Para encontrarmos a expressão acima a partir das Eqs. (10, 11), precisamos especificar a densidade de massa de uma partícula pontual. Isso é feito através da delta de Dirac,²⁸

$$\rho(\mathbf{r}) = m_1 \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (17)$$

A massa m_1 é encontra-se em $\mathbf{r} = 0$. Conseqüentemente, usando a Eq. (12),

$$\Phi = -G \frac{m_1}{r}. \quad (18)$$

Por fim, usando a Eq. (11), obtém-se imediatamente a Eq. (16), assim mostrando como obter a expressão da aceleração para partículas massivas.

Apêndice B: Detalhes adicionais sobre a curva de rotação bariônica

Neste apêndice damos continuidade, de forma mais técnica, à Seção 4.2.

B.1 Composição de velocidades circulares

A velocidade V_i é a velocidade circular da componente i . Ou seja, se somente a componente i existisse, partículas testes em equilíbrio por rotação iriam rodar seguindo o perfil radial dado por $V_i(R)$. Falta saber qual a velocidade de rotação obtida a partir da combinação de componentes. Pode ser tentador achar que a velocidade de rotação total devido a duas componentes seria dada pela soma de suas respectivas velocidades, mas

²⁸ $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ é a delta de Dirac tridimensional, isto é, em coordenadas cartesianas $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, e em coordenadas esféricas $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0)/(r^2 \sin \theta)$.

isso é falso. Não há nada na gravitação newtoniana que garanta esse tipo de soma de velocidades. Contudo, pelas equações diferenciais (10) e (11), que são lineares em Φ , ρ e \mathbf{a} , conclui-se que uma soma das densidades leva a uma soma dos potenciais newtonianos correspondentes, que consequentemente leva a acelerações que podem ser somadas. E, como a aceleração em questão é proporcional a V^2 , conclui-se que, para cada valor do raio R , e para duas componentes quaisquer denotadas por 1 e 2, a aceleração total é

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad (19)$$

e a velocidade circular total é

$$V_{Tc}^2 = V_1^2 + V_2^2, \quad (20)$$

ou seja, não vale a soma linear das velocidades circulares.

B.2 Estabilidade e a convenção sobre velocidades circulares negativas

É possível que $V_{Tc}(R)$ descreva uma curva de rotação circular e estável para todos os valores possíveis do raio R , mas que isso não ocorra para uma das componentes de $V_{Tc}(R)$. Se em dado raio a força gravitacional resultante não for direcionada ao centro da simetria, não será possível haver aceleração centrípeta e portanto não pode haver órbita circular estável. Para distribuições esféricas de massa, a força gravitacional é ou nula ou aponta para o centro da distribuição; mas para distribuições de massa na forma de um disco, é possível encontrar forças que apontam no sentido oposto ao centro, ou seja, uma partícula teste pode ser atraída para matéria que está num raio maior que o dela.

Esse fenômeno acima descrito é exemplificado em detalhes no Apêndice C e é frequentemente motivo de confusão para quem está começando a estudar o assunto. A Eq. (19) é uma equação vetorial, cujo sinal de cada componente é arbitrário, e assumindo que a única aceleração seja a centrípeta, temos

$$\mathbf{a}_i = -\frac{V_i^2}{R} \hat{\mathbf{R}}. \quad (21)$$

Se só existir uma componente material, e essa componente material estiver em equilíbrio por rotação, necessariamente tem de ser verdade que

$V_i^2 > 0$ para qualquer valor do raio R . Entretanto, como ilustrado no Apêndice C, é possível que essa aceleração tenha o sentido oposto, dado que estamos lidando com distribuição de matéria sem simetria esférica. Quando isso ocorrer, pode-se continuar a expressar a aceleração pela Eq. (21), desde que seja considerada a possibilidade de $V_i^2 < 0$.

Caso $V_{Tc}^2 < 0$ em dado intervalo de R , nesse intervalo não pode haver curva de rotação, pois não há órbita estável. Caso para uma componente i tenhamos $V_i^2 < 0$, mas $V_{Tc}^2 > 0$, então a componente i segue tendo uma contribuição para a velocidade circular total, sendo sua contribuição responsável por reduzir o valor de V_{Tc}^2 , logo em geral não pode ser ignorada.

É útil que muitos dos dados de curvas de rotação de galáxias disponíveis contenham já dados das velocidades de cada uma das componentes barriônicas, ou seja, cada um dos V_i . Este é o caso por exemplo dos dados do *Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves*²⁹ (SPARC) [56]. Mais difícil é encontrar dados livremente disponíveis que forneçam as densidades de cada uma das componentes. É de praxe no meio o uso de uma peculiar convenção para V_i , a saber

$$V_i = \begin{cases} \sqrt{V_i^2} & , \text{ se } V_i^2 > 0, \\ -\sqrt{|V_i^2|} & , \text{ se } V_i^2 < 0. \end{cases} \quad (22)$$

E esta peculiar convenção implica que não podemos em geral simplesmente calcular o quadrado de V_i da forma usual, deve-se usar

$$V_i^2 = V_i |V_i|. \quad (23)$$

Em algumas situações pode ser mais adequado usar $V_i = \sqrt{V_i^2}$ sempre, o que leva eventualmente a valores imaginários de V_i . Por outro lado, para apresentar gráficos de curvas de rotação, dado que a parte imaginária possui informação relevante, a convenção (22) torna-se útil para evitar o uso de imaginários. Como a convenção (22) é comumente usada, é bom os interessados estarem já cientes dela.

B.3 O efeito da razão massa-luminosidade estelar

Como explicado na Seção 4.2, a conversão de brilho estelar em massa requer o conhecimento

²⁹astroweb.cwru.edu/SPARC/.

da razão massa-luminosidade estelar de cada uma das componentes estelares, isto é, do bojo e do disco, denotadas por Υ_B e Υ_D . A colaboração THINGS apresenta diversos detalhes de como essa constante foi obtida para cada uma das galáxias [30], tendo por base, em especial, um modelo de cor $J - K$ para a banda de $3.6 \mu\text{m}$ do satélite Spitzer (i.e., é a mesma banda usada pelo SPARC, mas a modelagem de massa a partir da luz estelar é diferente). Essa referência apresenta também vários outros detalhes de como a contribuição estelar foi obtida. Considerando referências mais recentes, o modelo que eles usaram para inferir Υ parece não ser favorecido [28, 78, 79], mas, ainda assim, aos interessados nos detalhes técnicos, recomenda-se uma leitura atenta para entender os procedimentos utilizados.

A prática usual de disposição dos dados de curvas de rotação é fornecer os valores de das velocidades circulares do disco e do bojo (V_D e V_B) com certo valor de Υ . O SPARC adota a apresentação de dados com a normalização $\Upsilon = \Upsilon_\odot = 1M_\odot/L_\odot$, em que M_\odot é a massa do Sol e L_\odot é a luminosidade do Sol na banda considerada. Essa normalização de Υ tem valor que difere dos favorecidos pelos modelos de população estelar, mas é uma normalização conveniente, a qual assumiremos para simplificar a notação. É útil introduzir as quantidades adimensionais Υ_D e Υ_B referente às razões massa-luminosidade do disco e do bojo. Caso essas últimas não fossem adotadas como adimensionais, seria necessário usar, na equação abaixo, $\Upsilon_D/\Upsilon_\odot$ no lugar de Υ_D . A velocidade circular total estelar, a partir dos dados das velocidades do disco e do bojo (V_D , V_B) pode então ser expressa por

$$V_*^2 = \Upsilon_B V_B |V_B| + \Upsilon_D V_D |V_D|. \quad (24)$$

Acima levamos em consideração que V_B e V_D podem ser negativos para alguns valores do raio R , assim usamos a Eq. (23). Na prática, não é comum encontrar V_B ou V_D com valores negativos para qualquer raio, isto pois comumente o perfil de distribuição estelar, tanto para o bojo quanto para o disco, é tal que a densidade de estrelas cai quase que monotonamente ao longo do raio. Velocidades circulares negativas (ou imaginárias) requerem um crescimento significativo de massa com o raio em alguma região, sendo comuns para a contribuição gasosa, não para a estelar.

B.4 O efeito da variação da distância

As distâncias esperadas das galáxias têm incertezas, e, dependendo do contexto, do modelo tratado, e da qualidade dos dados, essa incerteza pode ser relevante. Às vezes pode ser interessante simplesmente reavaliar a mesma galáxia usando uma outra distância. Por exemplo, um conjunto de dados de galáxias usou certa distância D em todos os seus dados, mas posteriormente uma nova medida encontra $D' \neq D$ como uma melhor estimativa para a distância; assim é importante saber como adaptar os dados para a novo valor de distância. A demonstração a seguir é baseada no material suplementar da Ref. [57].

Estamos interessados numa mudança da distância estimada, não numa mudança física da distância, logo o brilho aparente da galáxia é invariante por esta transformação.

As distâncias angulares (comumente medidas em segundos de arco, arcsec) entre diferentes pontos da galáxia são invariantes perante esta transformação de distância (isto é, o tamanho aparente da galáxia não pode mudar, dado que é um dado observacional direto e não estamos considerando uma mudança física da distância). Por outro lado, as distâncias internas da galáxia medidas com dimensão de distância, como kpc por exemplo, vão mudar com a mudança da distância D .

Seja D' a outra distância da galáxia que se pretende usar e seja

$$\delta = \frac{D'}{D}. \quad (25)$$

Assim, a luminosidade interna da galáxia muda por³⁰

$$L' = L\delta^2, \quad (26)$$

e a posição radial interna à galáxia muda por

$$R' = R\delta. \quad (27)$$

Nota-se que a distância adimensional, construída pela razão de uma posição radial R e uma distância fixa de referência R_{ref} , é invariante $\bar{R} = R/R_{\text{ref}} = R'/R'_{\text{ref}} = \bar{R}'$.

Para um disco infinitesimalmente fino, a relação entre sua luminosidade L e seu brilho superficial (ou densidade superficial de luminosidade)

³⁰É consequência de um efeito simples geométrico, pois a área da superfície de uma esfera cresce com o quadrado de seu raio. Isso é comumente discutido no contexto de luminosidade aparente e luminosidade absoluta [27].

Σ_L é

$$L = 2\pi \int \Sigma_L(R) R dR. \quad (28)$$

Portanto, usando as transformações acima para L e R conclui-se que a luminosidade superficial é invariante por mudança da distância no seguinte sentido:

$$\Sigma'_L(R') = \Sigma_L(R). \quad (29)$$

O potencial newtoniano é explicitamente computado usando um caso particular da Eq. (12),

$$\Phi(R) = -G \Upsilon \int \frac{\Sigma_L(R)}{|\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}|} \tilde{R} d\theta d\tilde{R}. \quad (30)$$

Acima usamos \tilde{R} como variável muda de integração.

Como G e Υ não podem variar com a distância,

$$\Phi'(R') = \Phi(R)\delta. \quad (31)$$

E por fim temos

$$V'(R') = V(R)\sqrt{\delta}. \quad (32)$$

A demonstração acima é válida tanto para um disco estelar quanto para o disco de gás. Ela pode ser facilmente estendida para um disco de espessura finita desde que a densidade de luminosidade tridimensional seja separável no seguinte sentido: $j(R, z) = \Sigma_L(R)Z(z)$.

B.5 A curva de rotação bariônica total

Juntando todos os resultados até aqui, e levando em conta possíveis variações de inclinação, distância e da razão massa-luminosidade estelar, podemos concluir que a curva de rotação bariônica (V_b) pode ser expressa em função das dadas velocidades circulares V_D , V_B e de V_g , em que V_g se refere à velocidade da componente gasosa isoladamente, a saber,

$$V_b^2 = V_*^2 \delta + V_g |V_g| \delta. \quad (33)$$

Acima, V_*^2 é dado pela Eq. (24). Nota-se que a inclinação i não aparece na expressão acima, isto pois mudanças de inclinação não alteram a velocidade circular bariônica estimada, alteram por outro lado os dados da velocidade circular inferida pelo desvio para o vermelho, como indicado na Eq. (8). Existe um porém na afirmativa anterior, pois caso efeitos de extinção sejam considerados como relevantes, mudanças de inclinação podem ter impacto na luminosidade superficial, e consequentemente, nesse caso, terão impacto para V_b^2 .

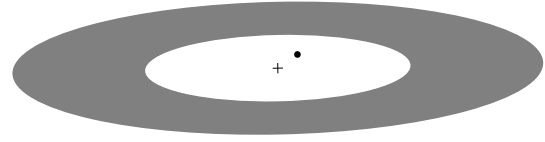


Figura 7: Um anel bidimensional de matéria. A matéria, distribuída com densidade constante encontra-se em $1 < R < 2$ e no plano $z = 0$, simbolizada pela região em cinza na figura. A cruz marca o centro de simetria. Uma partícula teste numa posição $R < 1$, como o ponto preto na figura, sente uma força em sentido *oposto* ao centro de simetria. Ou seja, ela sente a força gravitacional da distribuição de matéria que está em posição radial além da dela, em contraste com o caso de simetria esférica.

Apêndice C: Potencial e velocidade circular devido a um anel de matéria

Considere uma distribuição de matéria bidimensional, com simetria axial e no plano $z = 0$, sendo dada por

$$\begin{aligned} \rho(R, z) &= \Sigma(R)\delta(z), \\ \Sigma(R) &= 1, \text{ se } 1 < R < 2, \text{ e} \\ \Sigma(R) &= 0 \text{ caso contrário.} \end{aligned} \quad (34)$$

A Fig. 7 ilustra este caso.

O potencial newtoniano é encontrado a partir da Eq. (12). Contudo, para essa distribuição de matéria desconhecemos uma solução explícita completa, mas podemos fazer analiticamente ao menos parte da integração, só a integral na parte radial será feita numericamente, a saber, no plano $z = 0$ e usando $G = 1$,

$$\Phi(R, \theta) = - \int_{\Sigma} \frac{R'}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}'}} d\theta dR'. \quad (35)$$

Acima usamos Σ como índice da integral para lembrar que essa integral deve ser feita somente na região em que Σ for não nulo. Como este exemplo visa ser qualitativo, não estamos interessados em fixar unidades tais como as usadas em galáxias, por isso usamos coordenadas, densidades e constantes como adimensionais.

Acima, podemos usar que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}' = RR' \cos(\theta_R), \quad (36)$$

em que θ_R é o ângulo entre esses vetores. Para que esse último ângulo coincida com o ângulo θ que aparece na integral, basta considerar uma rotação do eixo que corresponde a $\theta = 0$, de forma

com que $\theta_R = \theta$. Ademais, na integração, podemos integrar de 0 a 2π , mas também podemos fazer uma simples transformação e integrar de $-\pi$ a π . Com estas convenções, a integral em θ se aproxima da definição de uma função especial, a integral elíptica completa de primeiro tipo, que é definida por³¹

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}}. \quad (37)$$

Usando algumas simples relações trigonométricas, dentre elas que $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)$, e prestando atenção aos limites de integração, conclui-se que

$$\Phi(R, \theta) = - \int_1^2 \frac{4R'}{R + R'} K \left(\frac{4RR'}{(R + R')^2} \right) dR'. \quad (38)$$

Pode parecer que não houve grande mérito na passagem da Eq. (35) para a Eq. (38), dado que a última expressão será resolvida numericamente. Mas mesmo resolvendo numericamente houve sim, pois várias linguagens de computação algébrica e numérica atuais já possuem a integral elíptica predefinida de forma com que sua computação é mais rápida do que a integral em θ original.

Os resultados para Φ e $\Phi' = \partial_R \Phi$ encontram-se na Fig. 8. O principal comportamento que nos interessa aqui é a inexistência de curva de rotação estável na região $1,00 < R < 1,30$, ou seja, mesmo além do raio do início do anel não há curva de rotação estável.

Para o caso de disco infinitesimalmente fino, há uma forma de encontrar essas mesmas soluções de forma analítica em termos de funções de Bessel, e pode-se verificar que a resposta encontrada numericamente é a mesma da forma exata. Sobre o procedimento para a forma exata, ver [27] (seção *Disk potentials via Bessel functions*). Uma das vantagens da forma numérica acima, que usa a integral elíptica, é ser mais flexível, podendo ser aplicada para discos mais gerais. Ademais, nem sempre soluções exatas são as mais rápidas para serem processadas computacionalmente.

³¹Dependendo da referência, pode-se encontrar m ou m^2 dentro da integral. Qualquer uma dessas definições pode ser usada, desde que consistentemente.

Referências

- [1] K. de Oliveira e M. de Fátima Saraiva, *Astronomia e Astrofísica*, 3ª ed. (Livraria da Física, São Paulo, 2013).
- [2] G. B. Lima Neto, *Astronomia extragaláctica e cosmologia*, Notas de aula [online], disponível em www.astro.iag.usp.br/~gastao/Extragal.html, acesso em jan. 2021.
- [3] K. Akiyama et al., *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, *Astrophys. J.* **875** L1 (2019), arXiv:1906.11238.
- [4] E. Opik, *An estimate of the distance of the Andromeda Nebula*, *Astrophys. J.* **55** 406 (1922).
- [5] E. P. Hubble, *A spiral nebula as a stellar system, Messier 31*, *Astrophys. J.* **69** 103 (1929).
- [6] D. A. Gurnett, W. S. Kurth, L. F. Burlaga e N. F. Ness, *In Situ Observations of Interstellar Plasma with Voyager 1*, *Science* **341** 1489 (2013).
- [7] D. A. Gurnett e W. S. Kurth, *Plasma densities near and beyond the heliopause from the Voyager 1 and 2 plasma wave instruments*, *Nature Astronomy* **3** 1024 (2019).
- [8] B. Luque e F. J. Ballesteros, *To the Sun and beyond*, *Nature Physics* **15** 1302 (2019).
- [9] R. Schodel et al., *A Star in a 15.2 year orbit around the supermassive black hole at the center of the Milky Way*, *Nature* **419** 694 (2002), arXiv:astro-ph/0210426.
- [10] H. G. Wells, *A short history of the world* (Macmillan, New York, 1922).
- [11] E. P. Hubble, *The Realm of the Nebulae* (Yale University Press, 1936).
- [12] G. Vaucouleurs, *Classification and Morphology of External Galaxies*, *Handbuch der Physik* **11** 275 (1959).
- [13] Figura baseada na versão de A. Ciccolella de 2016, [Wikimedia, Hubble - de Vaucouleurs Galaxy Morphology Diagram.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hubble_-_de_Vaucouleurs_Galaxy_Morphology_Diagram.png). A versão deste artigo foi traduzida e as cores foram trocadas. *Creative Commons CC-BY 4.0*.

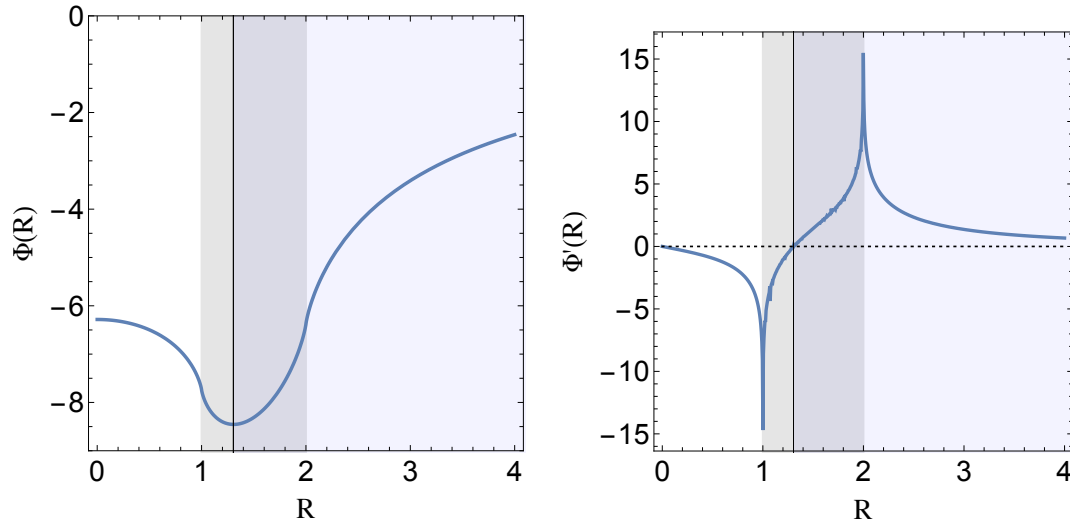


Figura 8: À esquerda: o potencial newtoniano (em unidades adimensionais) no plano $z = 0$ referente ao anel da Fig. 7. A faixa cinza em $1 < R < 2$ indica a região radial aonde há matéria, a região azulada indica os valores de R para os quais há órbitas circulares estáveis, a saber $R > 1,30$. À direita: semelhantemente ao gráfico anterior, mas agora a curva apresentada é a derivada do potencial newtoniano. Para $R < 1,30$, não há velocidade circular que possa manter uma partícula em órbita estável, pois a força gravitacional tem sentido oposto ao centro. Pode-se também dizer que $V^2(R < 1,30) < 0$.

- [14] G. Bertone e D. Hooper, *History of dark matter*, Rev. Mod. Phys. **90** 045002 (2018), arXiv:1605.04909.
- [15] Y. Sofue e V. Rubin, *Rotation curves of spiral galaxies*, Astron. and Astrophys. Review **39** 137 (2001), arXiv:astro-ph/0010594.
- [16] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, Helvetica Physica Acta **6** 110 (1933).
- [17] J. H. Oort, *Some Problems Concerning the Structure and Dynamics of the Galactic System and the Elliptical Nebulae NGC 3115 and 4494*, Astrophys. J. **91** 273 (1940).
- [18] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones e D. Zaritsky, *A direct empirical proof of the existence of dark matter*, Astrophys. J. Lett. **648** L109 (2006), arXiv:astro-ph/0608407.
- [19] J. Wu, Q. Li, J. Liu, C. Xue, S. Yang, C. Shao, L. Tu, Z. Hu e J. Luo, *Progress in Precise Measurements of the Gravitational Constant*, Annalen Phys. **531** 1900013 (2019).
- [20] J. Friedlander e S. Digel, *The multiwavelength Milky Way* [online], disponível em asd.gsfc.nasa.gov/archive/mwmw/mmw_sci.html, acesso em jan. 2021.
- [21] B. W. Carroll e D. A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics*, Cambridge University Press 2nd edition (2017).
- [22] C. Alcock et al., *The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations*, Astrophys. J. **542** 281 (2000), arXiv:astro-ph/0001272.
- [23] P. Tisserand et al., *Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds*, Astron. Astrophys. **469** 387 (2007), arXiv:astro-ph/0607207.
- [24] L. Chemin, C. Carignan e T. Foster, *HI kinematics and dynamics of Messier 31*, Astrophys. J. **705** 1395 (2009), arXiv:0909.3846.
- [25] E. F. Bell e R. S. de Jong, *Stellar mass-to-light ratios and the Tully-Fisher relation*, Astrophys. J. **550** 212 (2001), arXiv:astro-ph/0011493.
- [26] S. Courteau et al., *Galaxy Masses*, Rev. Mod. Phys. **86** 47 (2014), arXiv:1309.3276.
- [27] J. Binney e S. Tremaine, *Galactic Dynamics (Princeton Series in Astrophysics)* (Princeton University Press, 1988).

- [28] S. E. Meidt et al., *Reconstructing the stellar mass distributions of galaxies using S^4G IRAC 3.6 and 4.5 μm images: II. The conversion from light to mass*, *Astrophys. J.* **788** 144 (2014), arXiv:1402.5210.
- [29] K. C. Freeman, *On the Disks of Spiral and so Galaxies*, *Astrophys. J.* **160** 811 (1970).
- [30] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S. H. Oh e R. C. Kennicutt Jr., *High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS*, *Astronom. J.* **136** 2648 (2008), arXiv:0810.2100.
- [31] P. C. van der Kruit e K. C. Freeman, *Galaxy Disks*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **49** 301 (2011), arXiv:1101.1771.
- [32] F. Walter, E. Brinks, W. J. G. de Blok, F. Bigiel, R. C. Kennicutt, Jr., M. D. Thornley e A. Leroy, *THINGS: The H I Nearby Galaxy Survey*, *Astronom. J.* **136** 2563 (2008), arXiv:0810.2125.
- [33] L. Mayer, F. Governato e T. Kaufmann, *The formation of disk galaxies in computer simulations*, *Adv. Sci. Lett.* **1** 7 (2008), arXiv:0801.3845.
- [34] M. Vogelsberger, F. Marinacci, P. Torrey e E. Puchwein, *Cosmological Simulations of Galaxy Formation*, *Nature Rev. Phys.* **2** 42 (2020), arXiv:1909.07976.
- [35] J. L. Sersic, *Atlas de galaxias australes* (1968).
- [36] G. A. Mamon e E. L. Lokas, *Confronting lambda-CDM with the optical observations of elliptical galaxies. 2. Weighing the dark matter component*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **363** 705 (2005), arXiv:astro-ph/0405491.
- [37] G. Westerhout, *The Pioneers of H I*, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* **276** 3 (2002).
- [38] R. G. Strom, *How was Atomic HI ($\lambda = 21$ CM Line) in Space Discovered?* *International Journal of Modern Physics Conference Series* **23**, 472 (2013).
- [39] H. I. Ewen e E. M. Purcell, *Observation of a Line in the Galactic Radio Spectrum: Radiation from Galactic Hydrogen at 1,420 Mc./sec.*, *Nature* **168** 356 (1951).
- [40] C. A. Muller e J. H. Oort, *Observation of a Line in the Galactic Radio Spectrum: The Interstellar Hydrogen Line at 1,420 Mc./sec., and an Estimate of Galactic Rotation*, *Nature* **168** 357 (1951).
- [41] D. J. Griffiths, *Hyperfine splitting in the ground state of hydrogen*, *American Journal of Physics* **50** 698 (1982).
- [42] W. de Blok, F. Fraternali, G. Heald, E. Adams, A. Bosma e B. S. Koribalski, *The SKA view of the Neutral Interstellar Medium in Galaxies*, *PoS AASKA14* 129 (2015), arXiv:1501.01211.
- [43] K. G. Begeman, *HI rotation curves of spiral galaxies. I. NGC 3198*, *Astronomy & Astrophysics* **223** 47 (1989).
- [44] G. I. G. Józsa, F. Kenn, T. A. Oosterloo e U. Klein, *TiRiFiC: Tilted Ring Fitting Code*, arXiv:1208.008 (2012).
- [45] E. M. Di Teodoro e F. Fraternali, *3D BAROLO: a new 3D algorithm to derive rotation curves of galaxies*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **451** 3021 (2015), arXiv:1505.07834.
- [46] A. Burkert, *The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies*, *Astrophys. J. Letters* **447** L25 (1995), arXiv:astro-ph/9504041.
- [47] J. F. Navarro, C. S. Frenk e S. D. White, *A Universal density profile from hierarchical clustering*, *Astrophys. J.* **490** 493 (1997), arXiv:astro-ph/9611107.
- [48] J. F. Navarro, C. S. Frenk e S. D. M. White, *The Structure of Cold Dark Matter Halos*, *Astrophys. J.* **462** 563 (1996), arXiv:astro-ph/9508025.
- [49] M. Persic, P. Salucci e F. Stel, *The Universal rotation curve of spiral galaxies: 1. The Dark matter connection*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281** 27 (1996), arXiv:astro-ph/9506004.

- [50] G. Gentile, P. Salucci, U. Klein, D. Vergani e P. Kalberla, *The Cored distribution of dark matter in spiral galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **351** 903 (2004), arXiv:astro-ph/0403154.
- [51] P. Salucci, A. Lapi, C. Tonini, G. Gentile, I. Yegorova e U. Klein, *The Universal Rotation Curve of Spiral Galaxies. 2. The Dark Matter Distribution out to the Virial Radius*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **378** 41 (2007), arXiv:astro-ph/0703115.
- [52] D. C. Rodrigues, A. del Popolo, V. Marra e P. L. C. de Oliveira, *Evidence against cuspy dark matter haloes in large galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **470** 2410 (2017), arXiv:1701.02698.
- [53] H. Mo, F. van den Bosch e S. White, *Galaxy Formation and Evolution* (Cambridge University Press, 2010).
- [54] A. Di Cintio, C. B. Brook, A. V. Macciò, G. S. Stinson, A. Knebe, A. A. Dutton e J. Wadsley, *The dependence of dark matter profiles on the stellar-to-halo mass ratio: a prediction for cusps versus cores*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **437** 415 (2014), arXiv:1306.0898.
- [55] J. F. Navarro, E. Hayashi, C. Power, A. Jenkins, C. S. Frenk, S. D. White, V. Springel, J. Stadel e T. R. Quinn, *The Inner structure of Lambda-CDM halos 3: Universality and asymptotic slopes*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **349** 1039 (2004), arXiv:astro-ph/0311231.
- [56] F. Lelli, S. S. McGaugh e J. M. Schombert, *SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves*, Astronom. J. **152** 157 (2016), arXiv:1606.09251.
- [57] D. C. Rodrigues, V. Marra, A. Del Popolo e Z. Davari, *Absence of a fundamental acceleration scale in galaxies*, Nature Astronomy **2** 668 (2018), arXiv:1806.06803.
- [58] V. Marra, D. C. Rodrigues e Á. O. de Almeida, *A fundamental test for MOND*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **494** 2875 (2020), arXiv:2002.03946.
- [59] W. de Blok e A. Bosma, *High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies*, Astronomy & Astrophysics **385** 816 (2002), arXiv:astro-ph/0201276.
- [60] M. A. Green e J. W. Moffat, *Modified Gravity (MOG) fits to observed radial acceleration of SPARC galaxies*, Phys. Dark Univ. **25** 100323 (2019), arXiv:1905.09476.
- [61] R. Swaters, R. Sancisi, T. van Albada e J. van der Hulst, *Are Dwarf Galaxies Dominated by Dark Matter?* Astrophys. J. **729** 118 (2011), arXiv:1101.3120.
- [62] G. Efstathiou, G. Lake e J. Negroponte, *The stability and masses of disc galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **199** 1069 (1982).
- [63] P. C. Gregory, *Bayesian logical data analysis for the physical sciences : a comparative approach with Mathematica support* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [64] K. Price, R. M. Storn e J. A. Lampinen, *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization (Natural Computing Series)* (Springer, 2006).
- [65] R. Storn e K. Price, *Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces*, Journal of Global Optimization **11** 341 (1997).
- [66] R. Andrae, T. Schulze-Hartung e P. Melchior, *Dos and don'ts of reduced chi-squared*, 2010), arXiv:1012.3754.
- [67] E. Cameron, G. W. Angus e J. M. Burgess, *Overconfidence in Bayesian analyses of galaxy rotation curves*, Nature Astronomy **4** 132 (2020).
- [68] D. C. Rodrigues, V. Marra, A. Del Popolo e Z. Davari, *Reply to: Overconfidence in Bayesian analyses of galaxy rotation curves*, Nature Astronomy **4** 134 (2020), arXiv:2002.01970.
- [69] G. Gentile, A. Burkert, P. Salucci, U. Klein e F. Walter, *The dwarf galaxy DDO 47 as a dark matter laboratory: testing cusps hiding in triaxial halos*, Astrophys. J. Letters **634** L145 (2005), arXiv:astro-ph/0506538.

- [70] D. C. Rodrigues, P. S. Letelier e I. L. Shapiro, *Galaxy rotation curves from General Relativity with Renormalization Group corrections*, JCAP **1004** 020 (2010), arXiv:0911.4967.
- [71] D. C. Rodrigues, P. L. de Oliveira, J. C. Fabris e G. Gentile, *Modified gravity models and the central cusp of dark matter halos in galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **445** 3823 (2014), arXiv:1409.7524.
- [72] P. Salucci, F. Nesti, G. Gentile e C. Martins, *The dark matter density at the Sun's location*, Astron. Astrophys. **523** A83 (2010), arXiv:1003.3101.
- [73] F. Iocco, M. Pato e G. Bertone, *Evidence for dark matter in the inner Milky Way*, Nature Phys. **11** 245 (2015), arXiv:1502.03821.
- [74] P. F. de Salas, K. Malhan, K. Freese, K. Hattori e M. Valluri, *On the estimation of the local dark matter density using the rotation curve of the Milky Way*, JCAP **2019** 037 (2019), arXiv:1906.06133.
- [75] S. Profumo, *An Introduction To Particle Dark Matter (Advanced Textbooks in Physics)*, (WSPC-Europe, 2017).
- [76] E. Abdalla et al., *Brazilian Community Report on Dark Matter*, (2019), arXiv:1912.10076.
- [77] S. Hassani, *Mathematical physics : a modern introduction to its foundations*, (Springer, Cham, 2013).
- [78] S. S. McGaugh e J. M. Schombert, *Color-Mass-to-light-ratio Relations for Disk Galaxies*, Astronom. J. **148** 77 (2014), arXiv:1407.1839.
- [79] J. Schombert, S. McGaugh e F. Lelli, *The mass-to-light ratios and the star formation histories of disc galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **483** 1496 (2019), arXiv:1811.10579.