

# A equação do equilíbrio estelar em teorias modificadas da gravitação

Túlio Ottoni, Vinícius Barcellos, Matheus Bregonci e Júlio C. Fabris

Universidade Federal do Espírito Santo

---

## Resumo

No presente artigo fazemos uma introdução ao estudo do equilíbrio estelar na teoria newtoniana. Usando uma forma politrópica para a equação de estado chegamos em uma única equação para a estrutura estelar: a famosa equação de Lane-Emden. Ao fazermos um estudo geral dessa equação somos capazes de discutir a física das anãs brancas, estrelas colapsadas cuja matéria se sustenta contra sua própria gravidade devido a efeitos puramente quânticos. Em seguida fazemos também uma breve introdução às teorias de gravitação modificada e como a equação de Lane-Emden newtoniana pode ser alterada nesse contexto. Ilustramos a diferença entre os casos fazendo um estudo de uma estrela com densidade constante. Apesar de ser um caso bem simples, serve para ilustrar as modificações oriundas de teorias alternativas da gravidade, onde somos capazes de escrever uma solução analítica simples.

## Abstract

In this article we introduce the study of stellar equilibrium in Newtonian theory. Using a polytropic equation of state we derive a single equation for the stellar structure: the famous Lane-Emden equation. By making a general study of this equation we are able to discuss the physics of white dwarfs, collapsed stars whose matter sustains itself against its own gravity due to purely quantum effects. Then we also give a brief introduction to modified theories of gravity and how the Newtonian Lane-Emden equation can be affected. We illustrate the difference between the cases by studying a star with constant density. Despite being a very simple case, it serves to illustrate the modifications arising from alternative theories of gravity, where we are able to write a simple analytical solution.

---

**Palavras-chave:** equilíbrio estelar, equação de Lane-Emden, gravidade modificada.

**Keywords:** stellar equilibrium, Lane-Emden equation, modified gravity.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v2n2.35939](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v2n2.35939)

## 1 Introdução

A teoria da relatividade geral é a moderna teoria da gravitação. Ela tomou o lugar da teoria newtoniana da gravitação na descrição do fenômeno gravitacional. Essa mudança de paradigma, para usarmos a terminologia de Thomas Kuhn [1], se deveu a motivos observacionais e teóricos. Do ponto de vista observacional, pequenas anomalias na órbita de Mercúrio, por exemplo, se revelaram inexplicáveis no contexto newtoniano. Do ponto de vista teórico, a teoria newtoniana não é invariante pelas transformações de Lorentz e, como consequência, na teoria newtoniana a interação gravitacional se propaga instantaneamente. Com o advento da teoria da relatividade

restrita, fundamentada nas transformações de Lorentz, que estabelece que nenhum processo físico pode se propagar com velocidade superior à da luz, se tornou inevitável modificar tanto a mecânica quanto a gravitação newtoniana. A teoria da relatividade restrita estabelece uma nova mecânica, invariante por transformações de Lorentz. Por sua vez, a teoria da relatividade geral cria uma nova visão do fenômeno gravitacional, agora visto como geometria do espaço-tempo quadridimensional. A noção de força gravitacional é abolida: a gravitação é explicada pela curvatura do espaço-tempo gerada pela distribuição de matéria. Para uma descrição acessível sobre a teoria da relatividade geral, ver os artigos sobre gravitação no primeiro número da revista *Cadernos de*

*Astronomia* [2].

A teoria da relatividade geral tem como predição notável a existência de buracos negros, objetos estelares colapsados com uma singularidade coberta por uma hipersuperfície denominada horizonte de eventos, que separa a região externa da interna, esta última inacessível para um observador externo. Outra predição crucial da teoria da relatividade geral é a existência de ondas gravitacionais, flutuações do próprio espaço-tempo que se propagam com a velocidade da luz. Ambas estas predições foram comprovadas recentemente, resultando nos prêmios Nobel de 2017 e 2020. A teoria da relatividade geral explica de forma notável a deflexão da luz por corpos massivos e a precessão das órbitas elípticas em sistemas planetários e de estrelas duplas (em especial os pulsares binários). O status teórico da relatividade geral é considerado bem estabelecido.

Há necessidade de modificar a teoria da relatividade geral? A discussão sobre possíveis extensões tem se tornado um dos principais tópicos de pesquisa da atualidade. Novamente, o motivo é tanto teórico quanto observacional. Do ponto de vista teórico, em várias situações a teoria da relatividade geral prevê a existência de singularidades, pontos do espaço-tempo onde a curvatura diverge: a descrição geométrica da gravitação se torna ali impossível. Do ponto de vista observacional o grande problema se encontra no modelo cosmológico padrão construído a partir da teoria da relatividade geral: ele explica muito bem as observações mas à condição de introduzir um setor escuro, formado pela matéria e energia escuras, responsáveis por 95% do conteúdo de matéria e energia do universo (ver os artigos sobre cosmologia e matéria escura no primeiro e segundo números dos Cadernos de Astronomia [2,3]). Essas duas componentes não são contempladas no modelo padrão das partículas elementares, se manifestando apenas indiretamente através dos seus efeitos gravitacionais. Elas têm resistido também a qualquer detecção direta, permanecendo como propostas, de uma certa forma ainda especulativas, apesar das fortes evidências observacionais.

Os problemas das singularidades e do setor escuro que surgem nas aplicações astrofísicas e cosmológicas da teoria da relatividade geral deram origem a um amplo programa de pesquisa que busca novas teorias gravitacionais que mantenham os sucessos da relatividade geral e que

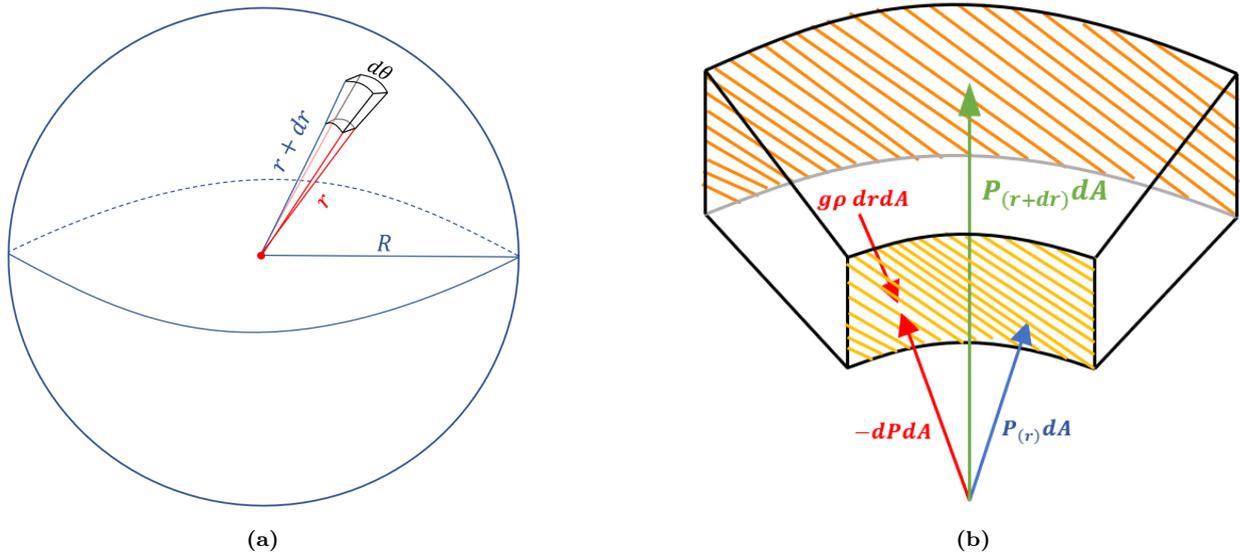
possam dar respostas satisfatórias para aqueles problemas. Genericamente, estas extensões da teoria da relatividade geral são denominadas de teorias de gravidade modificada. Elas podem tanto buscar configurações geométricas mais complexas, quanto introduzir novos campos fundamentais no setor gravitacional como, por exemplo, campos escalares.

A descrição de objetos estelares é um dos objetivos maiores de qualquer teoria gravitacional. Estrelas existem, em grande diversidade, com diferentes massas, raios, perfis de temperatura, composição química, e são objetos que podem se manter estáveis por escalas de tempo de centenas de milhões de anos a dezenas de bilhões de anos. Após sua evolução, elas podem, dependendo de sua massa, resultar em anãs brancas, estrelas de nêutrons ou buracos negros. Como se realiza o estado de equilíbrio na maior parte da vida de uma estrela e como se processa sua evolução em direção àqueles estados finais, é algo que deve ser explicado e descrito em detalhes pela teoria gravitacional.

A maior parte das estrelas pode ser explicada usando a teoria newtoniana usual. A equação que rege o equilíbrio estelar na gravitação newtoniana, para uma gama considerável das estrelas que existem, é conhecida como equação de Lane-Emden. No entanto, para estrelas de nêutrons, por exemplo, a teoria newtoniana se revela incapaz de descrever suas propriedades, e o uso da teoria da relatividade geral se torna inevitável. Neste caso, a equação de Lane-Emden deve ser substituída por sua versão relativista, a equação TOV,<sup>1</sup> que contém a equação de Lane-Emden como limite não relativista.

Teorias de gravidade modificada generalizam a equação TOV. Um aspecto muito interessante é que elas também, em vários casos, conduzem, no regime newtoniano, a uma equação do tipo Lane-Emden, mas com importantes novos elementos em relação ao caso usual. É esta equação de Lane-Emden modificada que é o objeto do presente artigo. Ilustraremos estas peculiaridades das teorias de gravidade modificada e suas implicações para as equações básicas do equilíbrio estelar através de um caso simples, referente ao de um objeto estelar de densidade constante. Apesar de sua simplicidade, este caso contém, qualitati-

<sup>1</sup>Acrônimo para Tolman, Oppenheimer e Volkoff, os autores que primeiro deduziram tal equação [4,5].



**Figura 1:** (a) Elemento de volume em uma esfera de raio  $R$  função de  $r$  e  $\theta$ . (b) A condição de equilíbrio hidrostático é de que o gradiente da pressão  $\vec{\nabla}p$  seja igual à força volumétrica, i.e., igual à densidade de matéria  $\rho$  multiplicada pela aceleração da gravidade  $g$  [6].

vamente, as características essenciais que surgem em situações mais complexas. O presente trabalho pretende sobretudo expor àqueles que se iniciam no estudo de teorias de gravitacionais as suas aplicações à descrição das estrelas, realçando alguns aspectos de pesquisa nesta área.

Procuraremos fazer uma exposição do problema do equilíbrio estelar de uma forma geral na próxima seção, depois descreveremos o programa de gravidade modificada e suas consequências para o equilíbrio estelar, Seções 3 e 4, apresentando por fim nossas conclusões na Seção 5.

## 2 Equilíbrio estelar

Podemos pensar em uma estrela como um sistema gasoso auto gravitante, ou seja, que mantém sua estrutura devido à sua própria gravidade. Na verdade as estrelas não são exatamente gasosas, uma vez que as altas temperaturas em seu interior são capazes de ionizar a matéria formando um plasma de elétrons e núcleos atômicos. De forma geral, tratamos esse material como um fluido.

Como uma primeira aproximação mais simples, podemos considerar uma estrela esférica e estática. Com isso estamos desconsiderando efeitos de rotação, pulsação e oscilação que acabam modificando a geometria esférica da estrela. Além disso, desprezamos possíveis efeitos de campos eletromagnéticos.

Como estamos lidando com um sistema esfericamente simétrico, todas as quantidades relevantes terão somente uma dependência na variável radial independente  $r$ . Por exemplo, a massa da estrela contida em um raio  $r$  é dada por

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (1)$$

onde  $\rho(r)$  é a densidade da estrela, uma das quantidades de interesse no equilíbrio estelar. Para escrever essa equação para a massa consideramos somente a simetria esférica do problema e a relação direta entre massa e a densidade integrada no volume, ou seja, ela representa a conservação da matéria. No centro da estrela temos  $M(0) = 0$  e na superfície  $M(R) = M$  é a massa gravitacional total da estrela.

A equação (1) pode ser posta em forma diferencial, que será mais útil para um tratamento numérico completo,

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (2)$$

A equação (2) será nossa primeira equação fundamental da estrutura estelar.

Consideramos agora a pressão do fluido no interior da estrela. A diferença entre a pressão em um raio  $r$  e um raio  $r + dr$  será dada pelo peso da casca esférica entre esses dois raios, conforme ilustrado na Figura 1, levando em conta a aceleração gravitacional local,

Peso do elemento  
de volume entre  $r$   
e  $r + dr$

$$= g(r)\rho(r)dV = \left(\frac{GM(r)}{r^2}\right)\rho(r)dAdr$$

Logo, podemos escrever uma equação diferencial para a pressão (força/área) na forma

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2}, \quad (3)$$

onde o sinal de menos é devido ao fato de que a pressão decresce quando  $r$  aumenta. A equação (3) será nossa segunda equação fundamental da estrutura estelar e seu significado físico é claro: do lado esquerdo temos o gradiente de pressão que é equilibrado pela densidade de força gravitacional do lado direito. Em resumo, esse é o balanço de forças fundamental da vida de uma estrela.

No centro da estrela temos um certo valor  $P_c$  da pressão central. Ao integrarmos a equação diferencial, a pressão vai caindo até atingir o valor zero,  $P(R) = 0$ , o que define o raio da estrela.

No contexto da Relatividade Geral, a equação de equilíbrio hidrostático newtoniana dá lugar à equação TOV,

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2} \left[ \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right)^{-1} \right] \quad (4)$$

que constitui do termo newtoniano usual  $-G\rho(r)M(r)/r^2$  multiplicado pelos três termos de origem relativista entre colchetes. No limite em que  $(P(r) \ll \rho(r)c^2, P(r)r^3 \ll M(r)c^2, r \ll 2GM(r)/c^2)$ , recuperamos a equação newtoniana (3). Vemos que no caso relativista a própria pressão entra no balanço de forças, no lado direito da equação, indicando que ela também servirá como fonte de gravidade. Esse é um aspecto interessante da teoria, sem análogo newtoniano. Para mais detalhes dos aspectos relativistas da teoria estelar ver [7].

As equações exibidas acima serão suficientes na análise do modelo particular que vamos considerar na próxima seção. No entanto, em casos mais gerais, ao se estudar estrelas de uma forma realista, é preciso considerar também o perfil de temperatura e o processo de transporte de energia ao longo da estrela. Muito embora isto não seja abordado neste trabalho, por razões a serem

discutidas posteriormente, vamos descrever brevemente como deveríamos proceder no caso mais geral.

De fato, para entender realmente a estrutura de uma estrela, além das equações de equilíbrio hidrostático, precisamos de equações que descrevem como a energia é gerada e transportada através da estrela, desde o núcleo até a superfície. Primeiramente, temos uma equação que descreve a conservação da energia, análoga à conservação da massa,

$$L(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \epsilon(r') \rho(r') dr', \quad (5)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r) \rho(r), \quad (6)$$

onde  $L$  é a luminosidade e  $\epsilon(r)$  é a taxa de produção de energia via reações nucleares por unidade de massa.

A última equação fundamental da estrutura da estrela irá depender se o transporte de energia é via mecanismo de radiação ou convecção. Em cada caso, a derivação da equação não é trivial como as outras. Considerando que o transporte é majoritariamente radiativo, temos [8]

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4caT^3(r)} \frac{L(r)}{4\pi r^2}, \quad (7)$$

onde  $T(r)$  é a temperatura,  $\kappa(r)$  é a opacidade da estrela (que descreve o efeito da absorção e espalhamento da radiação que se propaga no interior de uma estrela),  $c$  é a velocidade da luz e  $a$  uma constante. A equação (7) representa a variação da temperatura no interior da estrela, que irá depender de sua opacidade e da quantidade de energia que está sendo gerada em seu interior.

Temos então quatro equações e cinco variáveis ( $M(r), P(r), \rho(r), L(r), T(r)$ ). Para completarmos o sistema precisamos de uma equação de estado, que descreve o comportamento termodinâmico da matéria, relacionando a pressão com a densidade e temperatura  $P = P(\rho, T)$ .

## 2.1 Equação de Lane-Emden

Podemos considerar as equações de estrutura da estrela como sendo composta por dois pares. Primeiro temos as equações (2) e (3), e segundo as equações (5) e (7). Por inspeção, vemos que os dois pares de equações só se acoplam via a dependência da pressão com a temperatura na equação

de estado. Assim, consideremos uma equação de estado chamada barotrópica, onde

$$P = P(\rho), \tag{8}$$

de forma que podemos resolver somente o primeiro par de equação, onde no segundo podemos simplesmente usar a solução  $\rho(r)$  obtida. Tal situação, que simplifica a análise do equilíbrio estelar, possui muitas aplicações relevantes como veremos posteriormente.

Consideramos agora um caso particular de uma equação de estado barotrópica, onde a pressão é proporcional a uma potência da densidade na forma chamada politrópica,

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \tag{9}$$

onde  $K$  é uma constante e  $\gamma \equiv 1 + 1/n$  é chamado de índice adiabático, enquanto  $n$  é o índice politrópico. Tal aproximação foi muito explorada nos primeiros anos da pesquisa em estrutura estelar, devido à sua simplicidade e capacidade de reproduzir situações reais específicas. O índice adiabático  $\gamma$  pode ser escrito como a derivada  $\gamma = d(\log P)/d(\log \rho)$  e codifica a dependência da pressão com a densidade. Na termodinâmica dos fluidos, temos que a velocidade do som, ou seja, das perturbações mecânicas, depende diretamente dessa grandeza.

Podemos dessa forma obter uma única equação para a estrutura da estrela, combinando as duas equações fundamentais e a equação de estado na forma politrópica.

Primeiramente diferenciamos a equação (3),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right) &= -G \frac{dM(r)}{dr}, \\ &= -4\pi G r^2 \rho(r), \end{aligned} \tag{10}$$

onde usamos a equação (2) na última igualdade. Assumimos agora a forma politrópica da pressão, equação (9), juntamente com a definição das seguintes quantidades,

$$\xi = \frac{r}{r_0} \tag{11}$$

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r), \tag{12}$$

onde  $r_0$  é uma constante que possui unidade de uma distância característica, de forma que  $\xi$  é adimensional,  $\rho_c$  é a densidade central da estrela

e  $\theta(r)$  é uma variável adimensional tal que, por construção,  $\theta(r = 0) = 1$ .

Substituindo essas quantidades na equação (10) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2 \xi^2} \frac{1}{r_0} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{r_0^2 \xi^2}{\rho_c \theta^n} \frac{1}{r_0} \frac{d}{d\xi} \left( K \rho_c^{1+\frac{1}{n}} \theta^{1+n} \right) \right] &= -4\pi G \rho_c \theta^n \\ \frac{1}{r_0^2 \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{\xi^2}{\rho_c \theta^n} K \rho_c^{1+\frac{1}{n}} (1+n) \theta^n \frac{d\theta}{d\xi} \right] &= -4\pi G \rho_c \theta^n \\ \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^n \left( \frac{4\pi G r_0^2}{(1+n) \rho_c^{\frac{1-n}{n}} K} \right). \end{aligned}$$

Se definirmos então o comprimento característico como

$$r_0 = \sqrt{\frac{(1+n) \rho_c^{\frac{1-n}{n}} K}{4\pi G}}, \tag{13}$$

obtemos

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \tag{14}$$

que é a chamada equação de Lane-Emden.

A primeira condição de contorno, no centro  $r = 0$ , é  $\theta(0) = 1$ , pela definição da equação (12). Para obtermos uma condição na derivada, notamos que  $dP/dr = 0$  no centro, pois lá a aceleração local da gravidade é nula. Assim, temos

$$P \propto \rho^{1+\frac{1}{n}} \propto \theta^{n+1}, \tag{15}$$

$$\frac{dP}{dr} \propto (n+1) \theta^n \frac{d\theta}{dr} = 0. \tag{16}$$

Como  $\theta^n(0) = 1$ , temos que então que  $\theta'(0) = 0$ .

Usando então as condições de contorno adequadas, integramos a equação de Lane-Emden até o ponto em que  $\theta = 0$ , que equivale ao ponto em que a pressão se anula. Chamando  $\xi_1$  o ponto em que isso ocorre, i.e.,  $\theta(\xi_1) = 0$ , temos então um valor para o raio da estrela,

$$R = r_0 \xi_1 = \sqrt{\frac{(1+n) \rho_c^{\frac{1-n}{n}} K}{4\pi G}} \xi_1. \tag{17}$$

Já a massa da estrela é dada por

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^R 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \\ &= 4\pi r_0^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi'^2 \theta^n d\xi'. \end{aligned} \tag{18}$$

Consequimos obter uma expressão para o integrando acima multiplicando a equação de Lane-Emden (14) por  $\xi^2$  e integrando de 0 a  $\xi_1$

$$\left[ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1} = - \int_0^{\xi_1} \xi'^2 \theta^n d\xi'. \quad (19)$$

Assim conseguimos escrever a seguinte expressão para a massa gravitacional total da estrela

$$M = -4\pi r_0^3 \rho_c \left[ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1} \\ = - \frac{\rho_c^{3-n}}{\sqrt{4\pi}} \left[ \frac{(n+1)K}{G} \right]^{3/2} \left[ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1}. \quad (20)$$

Podemos encontrar uma relação Massa x Raio para estrelas politrópicas eliminando a dependência em  $\rho_c$  nas duas equações (20) e (17). Para isso, basta elevar a equação (17) à potência  $(3-n)/(1-n)$ , de tal forma que temos a relação

$$M \propto R^{\frac{3-n}{1-n}}. \quad (21)$$

## 2.2 Anãs brancas e a massa de Chandrasekhar

O que significa dizer que o fluido da estrela obedece uma equação politrópica? Ao assumirmos uma forma politrópica para a equação de estado, estamos dizendo que em todo o interior da estrela, desde a superfície até o centro, vale a relação global

$$P = K\rho^\gamma, \quad (22)$$

com uma única constante  $K$  e um único expoente  $\gamma$ . Isso em geral não é verdade para estrelas reais.

Anãs brancas são estrelas em que podemos usar uma aproximação politrópica com segurança. Essas estrelas pertencem à classe dos objetos compactos, um objeto de dimensões planetárias porém com a massa da ordem da massa solar. Tais objetos não produzem mais reações nucleares em seu centro, sendo a pressão que entra no balanço gravitacional de origem totalmente diversa.

O que ocorre, é que tendo densidades tão altas, a matéria é fortemente comprimida. Porém a mecânica quântica impede que as partículas constituintes estejam todas juntas, devido ao Princípio da Incerteza que as força a se moverem de forma violenta. Além disso, ao considerarmos que essas partículas são férmions (caso dos elétrons, nêutrons e prótons), temos que elas não podem

ocupar o mesmo estado quântico, o Princípio da Exclusão proíbe.

Sendo assim, temos elétrons que ocupam níveis quânticos cada vez mais energéticos. A pressão que sustenta a anã branca é devido ao gás degenerado de elétrons e seu comportamento quântico “claustrofóbico”. Para incluir um novo elétron nesse sistema, precisamos fornecer uma grande energia a ele, uma vez que todos os estados menos energéticos já estão ocupados até um dado valor de energia, chamada Energia de Fermi ( $E_F$ ). É por isso que mesmo a alta temperatura no interior da anã branca não é capaz de perturbar essa distribuição eletrônica ( $E_F \gg K_B T$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann), de forma que negligenciamos na equação de estado a dependência na temperatura.

Um cálculo detalhado, envolvendo a função de distribuição dos férmions, mostra que para um gás de elétrons degenerado não-relativístico temos [7]

$$P = K_1 \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (23)$$

onde  $K_1$  é uma constante que depende de quantidades fundamentais, tais como  $h, c, m_e$ . Esse é o caso de um politropo de índice  $n = 1,5$ . De acordo com a relação Massa  $\times$  Raio (21), temos

$$M \propto R^{-3}, \quad (24)$$

o que indica que quanto mais massiva a estrela menor o seu raio. Porém, quanto mais compacta a estrela, maior será o momento dos elétrons (pela incerteza quântica), de forma que entraremos no limite relativístico. Nesse caso, um cálculo detalhado mostra que [7]

$$P = K_1 \rho^{\frac{4}{3}}, \quad (25)$$

que corresponde a um politropo de índice  $n = 3$ .

Ora, o caso politrópico  $n = 3$  é especial e de grande importância. Ao usarmos a relação Massa x Raio (21) vemos que a dependência no raio desaparece. Pela equação (20) que fornece a massa da estrela, vemos que a dependência com a densidade central também desaparece, de forma que todas as configurações estelares possuem a mesma massa.

Sendo assim, essa é uma massa limite, uma vez que a matéria já se encontra no estado relativístico. A estrela não se mantém em equilíbrio para uma massa além desse limite, indicando que se atingiu um regime de instabilidade. Essa

massa limite é conhecida como Massa de Chandrasekhar, em homenagem ao grande físico indiano que primeiro derivou tal relação [9]. Para se ter uma ideia, essa massa é da ordem de

$$M_{CH} = 1,46M_{\odot}. \quad (26)$$

Uma estrela de nêutrons é um objeto compacto assim como uma anã branca, porém com densidades mais elevadas, cujo valor no centro da estrela atinge algumas vezes a densidade nuclear [10]. Como primeira aproximação para a descrição microscópica da matéria dessas estrelas, podemos utilizar um gás de nêutrons não interagentes. Como os nêutrons também são férmions, teremos um fluido politrópico com os mesmos índices das anãs brancas ( $n = 1,5$ ,  $n = 3$ ), porém com a constante  $K$  agora tendo outro valor, dependente da massa do nêutron.

Acontece que tal aproximação é muito pobre para descrever os estados da matéria no interior de uma estrela de nêutrons, uma vez que precisamos levar em conta detalhes da física das interações fortes a medida que a densidade atinge valores nucleares. Uma aproximação melhor que podemos usar é considerar a estrela formada por um fluido politrópico, porém por partes. Dessa forma podemos dividir a estrela em várias regiões, cada uma com sua própria constante  $K$  e índice politrópico  $\gamma$ , de forma que podemos captar os diferentes nuances de comportamento termodinâmico, à medida que aumentamos a densidade. Para o leitor interessado, tal formalismo está ilustrado em [11].

### 3 Teorias modificadas da gravitação

A análise da maior parte das estrelas pode ser feita em um contexto newtoniano, como foi desenvolvido acima. A equação de Lane-Emden deduzida anteriormente utiliza diretamente a mecânica e a gravidade newtoniana. No entanto, a moderna teoria da gravitação é a teoria da relatividade geral que substitui a noção de força gravitacional pela de curvatura do espaço-tempo quadridimensional. No entanto, a teoria newtoniana, que é obtida da teoria da relatividade geral no regime de baixas velocidades e campo fraco, tem ainda um amplo regime de aplicação e pode ser usada para estudar a maior parte das estrelas.

O que indica a aplicabilidade ou não da teoria newtoniana em um dado sistema gravitacional é

o fator de compacidade  $C$ , definido como

$$C = \frac{GM}{c^2R}, \quad (27)$$

onde  $M$  e  $R$  são a massa e a dimensão típica do sistema sob estudo, enquanto  $G$  e  $c$  são a constante gravitacional e a velocidade da luz, duas das constantes fundamentais da física. Observem que a presença de  $G$  nesta expressão indica que estamos falando de um sistema gravitacional, enquanto a presença de  $c$  caracteriza o regime relativista. Quando  $C \ll 1$ , a teoria newtoniana é aplicável; quando  $C \sim 1$ , como nas estrelas de nêutrons por exemplo, não é possível ignorar efeitos típicos da teoria da relatividade geral. Para o Sol,  $C \sim 10^{-6}$ , e a equação de Lane-Emden pode ser usada, muito embora, no caso do Sol, um modelo mais realista deva levar em consideração as equações de transporte de energia. Mas para uma estrela de nêutrons,  $C \sim 0,3$ , enquanto para um buraco negro  $C = 1/2$  e, nesses dois casos, devemos tratar o problema usando a teoria da relatividade geral. A generalização da equação de Lane-Emden para o caso relativista é a equação TOV que é, obviamente, mais complexa [7].

A existência de um setor escuro no modelo cosmológico padrão, baseado na teoria da relatividade geral, que é composto de matéria e energia escura, motivou a busca de extensões da teoria relativista. Tanto a matéria quanto a energia escuras resistem a qualquer detecção direta, sendo suas evidências oriundas de seus efeitos gravitacionais unicamente. Isto leva à suspeita que, a partir de certas escalas em astrofísica e cosmologia, a teoria da relatividade geral deixaria de ser válida e uma outra teoria (possivelmente baseada também na geometrização da interação gravitacional) deve substituí-la. Estas seriam as teorias de gravidade modificada. Vamos discutir um pouco essas propostas e suas consequências para o estudo de estruturas estelares.

Como podemos modificar a teoria da relatividade? Um aspecto importante em qualquer extensão de uma teoria física que é bem testada mas que apresenta problemas específicos é que a generalização teórica proposta deve guardar os sucessos da teoria original e ao mesmo tempo solucionar os problemas que ela apresenta. Isto é seguramente uma tarefa não trivial.

A teoria da relatividade geral é baseada na la-

grangiana<sup>2</sup> de Einstein-Hilbert dada por,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R, \quad (28)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica do espaço-tempo e  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci. Temos nesta Lagrangiana apenas termos geométricos. Uma forma de generalizar esta Lagrangiana é introduzir uma função geral da curvatura,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}f(R). \quad (29)$$

Estas são as atualmente muito estudadas teorias  $f(R)$ . Existem vários requisitos para a função  $f(R)$  para que ela forneça os bons resultados esperados. O leitor interessado pode consultar a referência [12].

Outra possibilidade, ainda mais geral, é introduzir um campo escalar  $\phi$ , e considerando uma Lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}f(\phi, X, R), \quad (30)$$

onde  $X = \phi_\rho\phi^\rho$  é o termo cinético (quadrídimoensional) associado ao campo escalar. Esta formulação geral pode ser melhor especificada através de alguns requisitos. Um deles é exigir que as equações correspondentes sejam de segunda ordem nas derivadas. Isto é importante para evitar problemas de estabilidade. Nesta caso, obtemos a classe de teorias de Horndeski, a teoria gravitacional envolvendo termos geométricos e campo escalares conduzindo a equações diferenciais de segunda ordem.

As teorias esboçadas formalmente acima podem dar boas respostas ao problema do setor escuro exigido pela teoria da relatividade geral. Mas, temos aí o problema do cobertor curto: ao resolver os problemas da relatividade geral em grandes escalas, estas teorias destroem os sucessos obtidos em pequenas escalas, como os dos testes em escalas do sistema solar. Para contornar esta dificuldade, foi proposto um engenhoso mecanismo, conhecido como *blindagem*. Os testes locais, onde a relatividade geral é bem sucedida, são feitos em ambientes com densidades muito maiores (por um fator superior a  $10^3$ ) que as densidades verificadas em escalas cosmológicas. Pelo mecanismo de blindagem, os novos modos físicos (também chamados graus de liberdade) que surgem nas teorias de Horndeski ou  $f(R)$  têm sua

propagação inibida em sistemas que apresentam grande densidade. Assim, essas teorias se reduzem localmente à teoria da relatividade geral ao mesmo tempo que guardam suas características próprias em escalas cosmológicas.

Existem dois principais mecanismos de blindagem, o mecanismo Camaleão [13, 14] e o de Vainshtein [15, 16]. O primeiro estabelece que os campos escalares introduzidos se tornam mais massivos em ambientes densos, o que inibe sua propagação, e menos massivos em ambientes menos densos. Essa modificação advém de uma dependência da forma do termo potencial do campo com a densidade do meio. O mecanismo de Vainshtein, por outro lado, afeta o termo cinético do campo escalar, que envolve suas derivadas, passando a depender da densidade do meio, o que resulta na sua supressão em meios densos. Por esse motivo, pode-se dizer que a inércia associada ao campo escalar é afetada. Para uma revisão geral sobre mecanismo de blindagem ver [17].

Nos interessa aqui principalmente o mecanismo de Vainshtein. O que se percebeu, mais recentemente, é que o próprio mecanismo de Vainshtein pode ser destruído no interior de corpos muito massivos, como estrelas, em extensões da teoria de Horndeski, conhecidas como teorias *beyond-Horndeski*. A descrição de como isto ocorre é longa e tecnicamente sofisticada. Mas, grosso modo consiste em considerar uma teoria como (30) mas onde certos vínculos usuais da teoria de Horndeski original são relaxados. Isto dá origem a novos termos de interação, com derivadas superiores, mas ainda assim livres de instabilidades. A análise do impacto destes novos termos de interação revela que o mecanismo de Vainshtein no interior de um corpo massivo não se torna mais eficaz, mantendo por outro lado sua validade nas proximidades do corpo.

A análise essencialmente considera a métrica quadrídimoensional<sup>3</sup> aproximada em pequenas escalas, tal que

$$ds^2 = [1 + 2\Phi(t, \vec{x})]dt^2 - a(t)^2[1 + 2\Psi(t, \vec{x})]\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (31)$$

$$\phi = \varphi(t) + \pi(t, \vec{x}), \quad (32)$$

Nesta expressão,  $\Phi(t, \vec{x})$  e  $\Psi(t, \vec{x})$  são os potenciais gravitacionais locais e  $\pi(t, \vec{x})$  é a perturba-

<sup>2</sup>A lagrangiana pode ser entendida como uma função que define o conteúdo de um sistema físico, inclusive suas simetrias.

<sup>3</sup>Uma métrica quadrídimoensional define a geometria do espaço-tempo.

ção local no campo escalar homogêneo representado por  $\varphi(t)$ . Para o mecanismo de Vainshtein ser efetivo é necessário que  $\Phi(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x})$  [16]. Os novos termos de interação preditos pelas teorias de Horndeski estendidas destroem esta condição no interior dos corpos massivos (estrelas, por exemplo), e o mecanismo de Vainshtein deixa de ser efetivo, guardando no entanto suas propriedades usuais nas proximidades do corpo. O leitor interessado pode consultar a referência [18–20] e referências indicadas neste texto. No final a força gravitacional sobre uma partícula teste de massa  $m$ , dentro de um corpo esférico de massa total  $M$  e raio  $R$ , se torna,

$$F = -G \frac{M(r)m}{r^2} - \frac{\Upsilon}{4} G \frac{d^2 M(r)}{dr^2} m, \quad (33)$$

em que  $M(r)$  é a massa no interior do corpo contida em uma esfera de raio  $r$ ,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (34)$$

A constante (sem dimensão)  $\Upsilon$  depende dos parâmetros característicos da teoria definida por (30).

Podemos observar que, de fato, a expressão (33) implica em uma modificação da força gravitacional no interior do corpo, mantendo a expressão usual para a força na região exterior, para raios  $r > R$ . Efetivamente, quando  $r > R$  a massa  $M(r)$  se torna constante e igual a massa total do corpo  $M$ . Assim, sua derivada se torna nula, e reobtemos a força newtoniana normal.

É instrutivo desenvolver a expressão (33) para o caso de um corpo de densidade  $\rho$  constante. Nestas circunstâncias, considerando a força no interior do corpo, (33) se torna,

$$F = -\left(1 + \frac{3}{2}\Upsilon\right) \frac{4\pi G}{3} \rho r. \quad (35)$$

Podemos observar que, neste caso, o efeito do mecanismo de blindagem corresponde a uma mudança da constante  $G$  efetiva. Em particular, ela se torna nula para  $\Upsilon = -2/3$  e a gravidade se torna repulsiva para  $\Upsilon < -2/3$ . Nós reencontraremos este valor crítico na análise que faremos a seguir para o problema do equilíbrio estelar. Esse exemplo já revela qualitativamente o possível impacto das modificações da teoria da relatividade geral mesmo no regime newtoniano.

## 4 Análise do caso $n = 0$

Para ilustrar agora uma solução exata da equação de Lane-Emden e como essa solução é modificada no contexto da gravitação modificada introduzido na seção anterior, faremos uma análise do caso  $n = 0$ .

Esse caso representa um fluido com densidade constante. Para esse fluido se manter em equilíbrio com a gravidade, sua pressão terá que variar, porém não a densidade. Esse é o caso de um fluido incompressível, como o oceano por exemplo. Como a densidade é constante mas a pressão varia, o raio da estrela será definido pela condição  $P = 0$ . Veremos que a massa e o raio da estrela estarão diretamente relacionados com a pressão central.

O caso  $n = 0$  corresponde a uma simplificação importante quando se considera uma estrela, visto que implica uma densidade constante. No entanto, é uma boa descrição para outros objetos astronômicos como os planetas rochosos [21]. Devido a densidade ser constante, a temperatura é também essencialmente constante, o que justifica ignorar as equações de transporte radiativo, como já realçado anteriormente. Por outro lado, este caso contém várias características que se repetem em modelos estelares mais realistas, como as condições gerais para se obter o raio e a massa da estrela, sem ter a contrapartida de uma grande complexidade matemática. O que nos interessa aqui, com este caso particular, é identificar os principais efeitos do parâmetro  $\Upsilon$  na configuração estelar que voltam, do ponto de vista qualitativo, a ocorrer em situações mais complexas quando  $n \neq 0$ .

A relação entre pressão e densidade politrópica, dada por (9), fica mal definida, uma vez que o expoente diverge. Porém como a densidade é constante, é mais fácil usar diretamente as duas equações de equilíbrio hidrostático para encontrar a massa e a pressão. É o que faremos nas subseções seguintes.

### 4.1 Caso $n = 0$ na teoria newtoniana

Quando  $n = 0$  a Equação de Lane-Emden (14) fica

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -1, \quad (36)$$

que integrando duas vezes nos leva à

$$\theta = -\frac{\xi^2}{6} + \frac{C_1}{\xi} + C_2, \quad (37)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Usando as condições de contorno que caracterizam a equação de Lane-Emden ( $\theta(0) = 1$ ;  $\theta'(0) = 0$ ) fixa-se  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 1$ . Dessa forma, a solução para  $n = 0$  é

$$\theta_0 = -\frac{\xi^2}{6} + 1, \quad (38)$$

e o primeiro zero desta função,  $\theta(\xi_1) = 0$ , é encontrado em  $\xi_1 = \sqrt{6}$ . O caso  $n = 0$  caracteriza uma esfera de densidade constante,  $\rho = \rho_c$ , como afirmado anteriormente. Tal configuração caracteriza um fluido incompressível, i.e., que não pode ser comprimido. Para densidade constante a equação de conservação da massa (1) é facilmente integrada de 0 a  $r$ , resultando em

$$M = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_c. \quad (39)$$

Assim, a equação de equilíbrio hidrostático se torna

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_c^2r, \quad (40)$$

que podemos integrar de 0 a  $r$ , de forma a obter

$$P = P_c - \frac{2\pi}{3}G\rho_c^2r^2, \quad (41)$$

para a constante de integração definida como sendo a pressão central,  $P_c = P(0)$ .

Para o caso de um fluido incompressível o raio  $R$  da estrela é encontrado onde a pressão se anula, ou seja,  $P(r = R) = 0$ . Portanto, o raio  $R$  é dado por

$$R = \sqrt{\frac{3P_c}{2\pi G\rho_c^2}}. \quad (42)$$

#### 4.2 Caso $n = 0$ em gravidade modificada

No contexto da gravidade modificada as teorias de *beyond-Horndeski* utilizam o mecanismo de Vainshtein, que funciona fora de uma estrutura de matéria, mas dentro funciona somente parcialmente. Isto implica numa mudança das equações de equilíbrio para estrelas que possuem assimetria de pressão [22], uma vez que a força gravitacional fica modificada de acordo com (33).

Somos assim levados a uma equação de equilíbrio modificada. As equações de equilíbrio hidrostático e conservação da massa se tornam

$$\frac{dP(\xi)}{d\xi} = -\frac{G\rho_c}{r_0} \frac{\theta^n}{\xi^2} M(\xi) - \frac{\Upsilon G\rho_c \theta^n}{4r_0} \frac{d^2M(\xi)}{d\xi^2}, \quad (43)$$

$$\frac{dM(\xi)}{d\xi} = 4\pi\rho_c r_0^3 \xi^2 \theta^n(\xi). \quad (44)$$

Combinando as equações acima é possível obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \left( 1 + \frac{\Upsilon n \xi^2 \theta^{n-1}}{4} \right) \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\Upsilon \xi^3 \theta^n}{2} \right] \\ = -\theta^n, \quad (45) \end{aligned}$$

que é a equação de Lane-Emden modificada. Notamos que no limite em que  $\Upsilon = 0$  recuperamos a equação de Lane-Emden (14) usual, de forma que  $\Upsilon$  codifica a modificação da gravidade, advinda dessas teorias *beyond-Horndeski*.

No caso  $n = 0$  a equação de conservação da massa é a mesma da teoria newtoniana, dada em (39). Já a equação de equilíbrio hidrostático modificada é dada por

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2r - 2\pi G\Upsilon\rho^2r, \quad (46)$$

$$= -\left(\frac{2}{3} + \Upsilon\right) 2\pi G\rho^2r, \quad (47)$$

que integrada de 0 a  $r$ , obtém-se

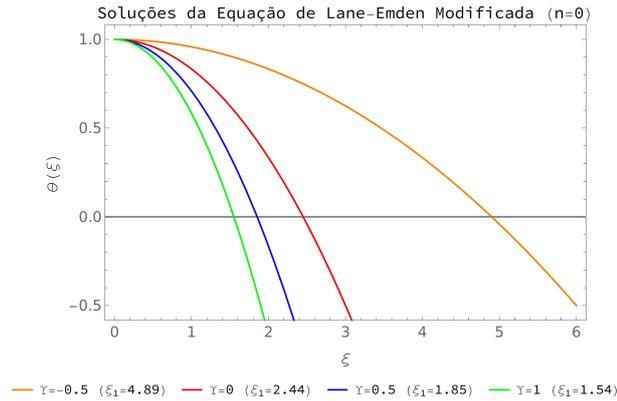
$$P = P_c - \left(\frac{2}{3} + \Upsilon\right) \pi G\rho^2r^2. \quad (48)$$

onde a constante de integração é a pressão central  $P_c$ , definida da mesma forma que na teoria newtoniana.

Aqui, no contexto da gravidade modificada, a densidade também é constante para  $n = 0$ , representando também um fluido incompressível. De forma análoga, o raio é obtido quando a pressão se anula. Portanto,

$$R = \sqrt{\frac{3P_c}{\pi G\rho^2(2 + 3\Upsilon)}}. \quad (49)$$

Olhando para equação acima é possível observar que: o raio da estrela diminui a medida que  $\Upsilon$  aumenta; quando  $\Upsilon = -2/3$  o raio da estrela é infinito; para  $\Upsilon < -2/3$  não há configuração estelar. A solução gráfica do problema está ilustrada na Figura 2.



**Figura 2:** Soluções para a Equação de Lane-Emden modificada. Em vermelho temos a gravidade puramente Newtoniana ( $\Upsilon = 0$ ). Para valores negativos a estrela fica menos massiva. Para valores positivos de  $\Upsilon$  temos que a estrela fica cada vez mais compacta. Entre parênteses mostramos o valor do zero da função, que é proporcional ao raio da estrela.

Com a modificação do equilíbrio hidrostático, temos a possibilidade de usar observações experimentais para colocar vínculos nos possíveis valores de  $\Upsilon$ . Segundo Barnejee et al [22], usando vínculos oriundos de efeitos de deformação provocada pelo campo de maré em sistemas binários, é possível obter o vínculo  $0 < \Upsilon < 0,5$ .

## 5 Conclusão

O problema do equilíbrio estelar é um dos mais importantes em astrofísica. Estrelas existem e vivem por longos períodos de tempo, exibindo uma situação de equilíbrio que será rompida no final, levando à formação de objetos compactos como anãs brancas, estrelas de nêutrons, buracos negros. O que mantém aquele equilíbrio na maior parte da vida de uma estrela? A teoria newtoniana revela um mecanismo simples baseado no balanço da atração gravitacional e da pressão gerada pelas reações nucleares na região central da estrela. Quando a pressão pode ser modelizada através unicamente de uma relação com a densidade, temos como resultado a equação de Lane-Emden. Frequentemente, em situações mais realistas, é preciso levar em conta o processo de transferência de energia e o perfil de temperatura no interior da estrela. No entanto, a equação de Lane-Emden constitui uma excelente aproximação sobretudo para algumas configurações estelares.

No regime relativista, a equação de Lane-

Emden é substituída pela equação TOV. A equação de Lane-Emden permanece sendo a expressão limite da equação TOV quando o campo gravitacional é fraco. O limite entre um caso e outro pode ser estabelecido pelo parâmetro de compactidade definido acima em (27). Muitos objetos estelares, em especial estrelas de nêutrons, requerem um tratamento inteiramente relativista, mas a maior parte das estrelas pode ser estudada usando a formulação newtoniana.

Teorias de gravidade modificada, concebidas para curar alguns problemas da teoria da relatividade geral, usam mecanismos de blindagem para preservar o acordo da relatividade geral em escalas locais, ao mesmo tempo que fornecem alternativas para grandes escalas. Em alguns casos, considerados de grande relevância atualmente, as teorias de gravidade modificada implicam desvios da formulação newtoniana usual no interior de corpos celestes. Em particular, elas modificam, no regime local, a equação de Lane-Emden. Tais modificações da equação de Lane-Emden são codificadas em um parâmetro  $\Upsilon$  que contém elementos da teoria modificada da gravitação relativista original.

Neste trabalho, nós revisamos o problema do equilíbrio estelar primeiramente usando a equação de Lane-Emden na sua forma original. Nos concentramos em um caso simples em que a densidade do objeto estelar é constante mas a pressão varia (o que é necessário para manter o equilíbrio estelar). Em seguida, utilizamos a equação de Lane-Emden modificada pelos efeitos oriundos de teorias de gravidade modificada e verificamos o impacto no equilíbrio estelar. Pudemos verificar que há mudanças qualitativas profundas. Em particular, para valores  $\Upsilon < -2/3$ , estruturas estelares simplesmente não podem existir. Para valores de  $\Upsilon > -2/3$  objetos estelares podem existir, mas com uma diferente predição para sua massa e para o seu raio. Tais propriedades se repetem para casos mais gerais [23].

## Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) pelo apoio concedido.

---

### Sobre os autores

T. Ottoni ([tulioottoni@id.uff.br](mailto:tulioottoni@id.uff.br)) é doutorando no programa de pós-graduação em astrofísica, cosmologia e gravitação (PPGCosmo).

Vinícius Barcellos ([vinicius.barcellos7@hotmail.com](mailto:vinicius.barcellos7@hotmail.com)) e Matheus Bregonci ([bregonci-tube@gmail.com](mailto:bregonci-tube@gmail.com)) são graduandos do curso de Física da UFES.

Júlio C. Fabris ([julio.fabris@cosmo-ufes.org](mailto:julio.fabris@cosmo-ufes.org)) é professor do Departamento de Física da UFES.

### Referências

- [1] T. S. Kuhn, *A estrutura das revoluções científicas* (Editora Perspectiva, São Paulo, 1978).
- [2] J. C. Fabris, J. Toniato et al., *Gravitação - Seção Temática*, Cadernos de Astronomia **1**(1), 5 (2020). Disponível em <https://www.periodicos.ufes.br/astrofisica/issue/view/1212>, acesso em jul. 2021.
- [3] A. Hernández-Arboleda, D. C. Rodrigues et al., *Matéria escura - Seção Temática*, Cadernos de Astronomia **2**(1), 5 (2021). Disponível em <https://www.periodicos.ufes.br/astrofisica/issue/view/1265>, acesso em jul. 2021.
- [4] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, *On massive neutron cores*, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
- [5] R. C. Tolman, *Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid*, *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939).
- [6] R. K. Madejsky, *Curso básico de astrofísica e cosmologia* (UFES Editora, Vitória, 2014).
- [7] S. L. Shapiro e S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarves and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (John Wiley & Sons, Nova York, 1983).
- [8] S. Weinberg, *Lectures on Astrophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2019).
- [9] S. Chandrasekhar, *The maximum mass of ideal white dwarfs*, *Astrophysical Journal* **74**, 81 (1931).
- [10] J. M. Lattimer e M. Prakash, *The physics of neutron stars*, *Science* **304**, 536 (2004). [ArXiv:astro-ph/0405262](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0405262).
- [11] J. S. Read, B. D. Lackey et al., *Constraints on a phenomenologically parameterized neutron-star equation of state*, *Phys. Rev. D* **79**, 124032 (2009). [ArXiv:0812.2163](https://arxiv.org/abs/0812.2163).
- [12] A. De Felice e S. Tsujikawa, *f(R) theories*, *Living Reviews in Relativity* **13**(1), 3 (2010).
- [13] J. Khoury e A. Weltman, *Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171104 (2004).
- [14] J. Khoury e A. Weltman, *Chameleon cosmology*, *Phys. Rev. D* **69**, 044026 (2004). [ArXiv:astro-ph/0309411](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0309411).
- [15] A. I. Vainshtein, *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, *Phys. Lett. B* **39**, 393 (1972).
- [16] A. Nicolis, R. Rattazzi e E. Trincherini, *Galileon as a local modification of gravity*, *Phys. Rev. D* **79**, 064036 (2009).
- [17] C. Burrage e J. Sakstein, *Tests of chameleon gravity*, *Living Reviews in Relativity* **21**(1), 1 (2018).
- [18] T. Kobayashi, Y. Watanabe e D. Yamauchi, *Breaking of vainshtein screening in scalar-tensor theories beyond horndeski*, *Phys. Rev. D* **91**, 064013 (2015).
- [19] R. Saito, D. Yamauchi et al., *Modified gravity inside astrophysical bodies*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2015**(06), 8 (2015).
- [20] M. Crisostomi e K. Koyama, *Vainshtein mechanism after GW170817*, *Phys. Rev. D* **97**, 021301 (2018).
- [21] S. Seager, M. Kuchner et al., *Mass-radius relationships for solid exoplanets*, *The Astrophysical Journal* **669**(2), 1279 (2007).

- [22] P. Banerjee, D. Garain et al., *Constraining modified gravity from tidal phenomena in binary stars*, [The Astrophysical Journal](#) **910**(1), 23 (2021).
- [23] R. Saito, D. Langlois et al., *Modified gravity inside astrophysical bodies*, [Everything about Gravity: Proceedings of the Second LeCosPA International Symposium](#) 398–403 (2017).