O modelo de universo de Kurt Gödel

Mário Novello

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Resumo
Esse artigo discute a questão temporal em cosmologia, em particular a crítica de Gödel ao uso de um tempo cósmico global. Examina também os sistemas de coordenadas que permitem a separação da variedade espaço-tempo em três dimensões de espaço e um tempo único comum. Descreve a possibilidade de usar um sistema gaussiano que permite tal separação, e examina ainda as condições em que um tempo cósmico não pode ser usado para cobrir toda a variedade, como no modelo de Gödel.

Abstract
This paper discuss the temporal question in cosmology, specially the Gödel's cristicism about the global cosmological time. It is also examined coordinate systems that allows one to separate spacetimes in tridimensional spaces with a single time coordinate. We describe the possibility to use a Gaussian system which allows such separation, and analysis the conditions in a which a cosmical time cannot be used to cover the whole manifold, as in the case of Gödel's model.

Palavras-chave: modelo de Gödel, cosmologia, tempo cosmológico.
Keywords: Gödel's model, cosmology, cosmological time

DOI: 10.47456/Cad.Astro.v2n2.36050

1 Introdução

Meu interesse em apresentar o modelo de universo elaborado por Kurt Gödel está relacionado ao fato de que ele é um exemplo contundente de um cenário cosmológico que não aceita o apriorismo de Einstein quando este postulou a existência de um tempo global. Isto é, na geometria proposta por Gödel - uma solução exata das equações de Einstein da gravitação - a separação do mundo quadridimensional em três dimensões de espaço e uma de tempo não é possível de ser estendida para todo o espaço-tempo [1].

A comunidade dos relativistas sempre considerou este modelo com grande incômodo. Não é de estranhar que um dos cosmólogos americanos mais famosos, H. P. Robertson, tenha se referido, em sua intervenção sobre a geometria de Gödel, no *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie*, na cidade suíça de Berna em 1956, do seguinte modo: "I consider it a defect in the field equations of general relativity that they allow such a solution". Isto é, a proposta de Gödel para gerar um movimento capaz de fugir ao quadro convencional da cosmologia foi considerado como um "defeito teórico" das equações da relatividade geral e que deveria ser eliminado, colocado à margem, posto que indesejável!

E, no entanto, eu ousaria dizer que o momento mais original de toda a história da cosmologia moderna, no que diz respeito ao tratamento da questão do tempo, ocorreu precisamente com a entrada em cena do matemático e filósofo austríaco Kurt Gödel. Sua temática é tão especial, tão estranha, tão pouco comum que, embora passados mais de setenta anos desde sua formulação original, ainda hoje ocupa um lugar de destaque no pensamento científico sobre o Universo. Com relação ao problema do tempo, não seria exagero afirmar que nada semelhante aconteceu na cosmologia, nem antes nem depois.

Para entender o que é tão singular no ponto de vista de Gödel e porque ele é tão difícil de conciliar com as ideias convencionais, é suficiente limitar-nos a dizer que este modelo cosmológico é o exemplo mais famoso de violação global de causalidade – mantendo, no entanto, em cada ponto do espaço-tempo a causalidade local – sem que nenhuma lei da física seja desrespeitada. Embora reconhecido imediatamente como incompatível com algumas propriedades observadas, tal como a expansão do Universo, ainda assim desperta enorme interesse na comunidade científica e mesmo além dela, constituindo-se em verdadeiro paradigma da possibilidade de conciliar a ciência com a ideia de caminhos que levam ao passado. A razão para isso se prende a algumas particularidades da proposta de Gödel, no contexto cosmológico que, de imediato, a tornaram especial. A que teve consequências mais contundente foi seu abandono, na construção de seu modelo de geometria, do apriorismo paradigmático da existência de um tempo cósmico global. Deliberadamente ou não, essa escolha levou à produção de um cenário de ordem cósmica completamente fora do contexto convencional.[1]

O sistema usado para tratar e descrever os acontecimentos no mundo valia-se, desde a descrição unificada feita por Minkowski, no começo do século XX, da separação do mundo na configuração caracterizada por uma estrutura possuindo três dimensões de espaço e uma de tempo. O modelo padrão da cosmologia se sustenta precisamente sobre esta separação, dita $3+1$, que se realiza na geometria de Minkowski, graças às propriedades da descrição de uma variedade diferencial feita por Gauss. Gödel rompe com esta tradição. Abandona a hipótese de que a cosmologia deve ser escrita usando-se um tempo cósmico único, global, comum a todos os observadores. Cria assim, um modelo que, embora tendo a mesma distribuição de energia/matéria utilizada na formulação do universo de Einstein e incluindo a mesma constante cosmológica que este havia introduzido, possui propriedades radicalmente diferentes. Dentre estas, a que singularizou este modelo, consiste na existência de curvas do tipo tempo fechadas, e que se denota pelas iniciais do termo em inglês CTC (Closed Timelike Curves). Em outras palavras, caminhos que levam ao passado.

2 Tempo no universo de Gödel

O elemento principal na análise feita por Gödel da questão cosmológica é o tempo. Para ele, o cenário iniciado por Einstein ao demarcar as fronteiras e estabelecer os fundamentos da cosmologia, tem como objetivo a tentativa de eliminação do tempo da descrição do universo.[2] Por que essa eliminação servia à visão einsteniana do universo? Por diversas razões que examinei em outras ocasiões (ver referências [2] e [3]) e que podem ser sintetizadas em uma só frase: trata-se de uma versão científica da argumentação derivada de Platão de um mundo ideal, sem necessidade de movimento. Com efeito, pensava ele, para onde deveria caminhar um universo perfeito? E por que? Estas questões, subentendidas no cenário colocado por Einstein, são rejeitadas a priori por Gödel. Mas aqui, em sua análise, não se trata de uma observação da natureza – como a que sustentou o modelo de Friedmann – que toma a iniciativa da crítica ao imobilismo einsteniano. Não. Para Gödel, é a própria estrutura do tempo, independentemente do contexto cosmológico, que está em causa e que deve ser examinada.

A formulação de Friedmann, por seu convencionalismo, não avança nesta questão. A descrição do mundo deveria vir a reboque desta orquestração preliminar da ordem temporal do mundo. Como se anunciasse uma crise. Costuma-se argumentar que uma das consequências mais notáveis da revolução conceitual realizada em torno da teoria da relatividade especial foi a eliminação do tempo absoluto. A evolução da cosmologia, a partir da solução de Friedmann, trouxe a possibilidade de uma análise complementar, pelo exame da questão que ela se permite fazer: é esta ciência o lugar onde o tempo absoluto newtoniano adquire uma re-interpretação e recupera sua significância? Seria a cosmologia, ou melhor, as geometrias associadas aos modelos cosmológicos, o território natural onde aquele absoluto newtoniano voltaria a ser útil ou até mesmo verdadeiro? A maior parte dos cosmólogos ao responder sim a esta questão se apressa a esclarecer que não consideram a opção por um tempo absoluto como um problema, como se fora um retrocesso, pois ele é entendido como nada mais do que isso: uma esco-

[1] A ausência de um tal tempo gaussiano global levou alguns autores a argumentarem que a geometria de Gödel não deveria ser sequer considerada como um modelo cosmológico!

[2] Uma tal eliminação do tempo seria, na visão de alguns – como o físico brasileiro J. M. Salim - a única possibilidade da cosmologia não se envolver em paradoxos, em questões circulares, sem solução.

lha conveniente, útil e que permite uma descrição dentro do antigo cânone pré-relativista de estudo do Universo.

3 Revolução dentro da revolução

Gödel executa um novo movimento crítico, uma mudança de paradigma que nem mesmo Einstein havia ousado, e produz uma verdadeira revolução dentro da revolução relativista, indo muito além do que a ciência convencional pode aceitar. Ele começa por arguir que a representação que usa um tempo global pode ser conveniente, mas não deve ser alçada à condição de absoluta e que, ao contrário, deve sair do território nebuloso do apriorismo[3]. Deve-se investigar se seu uso pode ser globalmente possível em qualquer solução das equações da teoria da relatividade geral. Isto é, mesmo que escolhamos localmente uma ordem temporal capaz de exibir - e para todos os observadores - uma distinção clara e operacional entre passado e futuro, mesmo que todos os observadores coincidam na caracterização desta ordem, Gödel se pergunta se é indispensável que a universalidade desta ordenação seja extrapolada para além das observações locais, isto é, seja entendida como global, típica do universo, com todas as consequências que uma tal extrapolação induz. A resposta que ele oferece é um veemente não! Enquanto não possuirmos meios materiais para decidir através da observação, todas as diferentes alternativas possíveis, compatíveis com as leis da física, devem ser consideradas e a estrutura gaussiana de um tempo global - como qualquer outra escolha - deve ser entendida como provisória. É o que Gödel nos ensina.

4 O modelo cosmológico de Gödel

A geometria desse modelo parte da hipótese de que as equações que descrevem o comportamento da gravitação no universo são dadas no interior da relatividade geral contendo, como no caso do modelo de Einstein, uma fonte de matéria identificada a um fluido perfeito incoerente (isto é, sem interação entre suas partes) além da resposta global do universo, consubstanciada na expressão da constante cosmológica Λ. O fluido não mostra dependência temporal, mas possui uma propriedade que o singulariza: ele está dotado de uma rotação local. Isto é, em cada ponto do espaço onde a matéria inerte se apresenta, existe um eixo de rotação em torno do qual a matéria gira. Esta rotação é local, isto é, não se trata de uma rotação global do Universo como um todo, posto que isto seria impossível de ser observado. A intensidade desta rotação é determinada pela densidade de energia local do fluido. As equações da teoria impõem uma relação direta entre este valor da rotação e o valor da constante Λ. Este eixo de rotação local permite associar naturalmente uma direção privilegiada em cada ponto, de tal modo a definir naturalmente um sistema de coordenadas cilíndricas. Podemos então descrever, neste sistema de coordenadas, a situação especial desta geometria. Gödel mostrou, analisando o comportamento de uma classe de observadores livres que eles poderiam girar em torno deste eixo realizando uma trajetória fechada sobre si mesmo. O ponto crucial, e que produz toda a estranheza deste modelo, consiste na propriedade de que esta trajetória fechada ocorre na estrutura completa do espaço-tempo, isto é, trata-se de uma curva na qual um viajante que por ela caminhasse poderia passar mais de uma vez pelo mesmo ponto. Nesta trajetória, ele poderia realizar a experiência que chamaríamos de "volta ao passado".

5 Observadores gaussianos no universo de Gödel

Para mostrar que também no modelo de Gödel é possível produzir, para uma classe de observadores especiais, um tempo único, que funcionaria para estes observadores como um tempo cósmico, podemos proceder como o matemático Gauss ensinou e produzir de modo prático este tempo global. Talvez fosse conveniente nos dedicarmos um pouco a essa questão, para que ela e outras que lhe estão associadas, fiquem mais claramente compreendidas.

Na escolha de um sistema gaussiano de coordenadas, na qual um tempo único e comum é estabelecido, devemos começar por construir a classe de observadores privilegiados que irão utilizar este tempo. Como sobre estes observadores nenhuma força deve ser exercida, pois eles

[3] É o mesmo procedimento adotado por Einstein ao empreender sua crítica ao apriorismo da física newtoniana.

são caracterizados como observadores livres, devemos começar por procurar este conjunto particular de observadores sem aceleração. Sabemos que uma tal propriedade é típica de curvas geodésicas. Assim, o primeiro passo consiste em conhecer as curvas geodésicas na geometria de Gödel. Ademais, como queremos que estas curvas sejam caminhos reais, pelas quais observadores reais possam se locomover, elas devem ser do tipo tempo. Realizada esta etapa (ver referência [4] para maiores detalhes técnicos), escolhida uma classe de observadores especiais, definimos para estes, um tempo único, pela sincronização de seus relógios. A partir desta classe construímos uma estrutura espacial, que nada mais é do que uma mera imitação do que ocorre na geometria euclideana, e como estamos acostumados a fazer na geometria de Minkowski. Segue então que para cada observador pode ser atribuído um tempo (que será o mesmo para todos os observadores desta classe) e, perpendicularmente a esta curva especial no quadri-espaço que caracteriza o movimento destes observadores gaussianos (as geodésicas), associa-se um correspondente espaço tridimensional, que chamamos simplificadamente de "espaço". Dessa forma, um sistema de coordenadas (tempo e espaço) capaz de caracterizar cada acontecimento do mundo, se estabelece. O próximo passo é crucial, pois trata-se de responder à questão: até onde podemos estender, a partir de um dado ponto qualquer P na geometria de Gödel, um tal sistema gaussiano de coordenadas? Pois é precisamente neste momento que a geometria de Gödel se distancia radicalmente das demais conhecidas. Ao tentarmos realizar a extensão deste sistema, uma análise matemática (ver referência [5]) mostra que ele não pode ir além de uma determinada região; que ele se interrompe em um dado lugar, que além deste lugar, ele se torna inaceitável como um sistema de coordenadas regular. E qual é este ponto ou conjunto de pontos, além dos quais este sistema gaussiano em Gödel não pode se estender? O que ocorre de especial ali e de tal modo que, além deste ponto, se encontra um território para o qual este sistema gaussiano, gerado a partir de P, não é mais aplicável? E o que ocorre com este sistema para que deixe de ser aplicável?

Muitas questões, que iremos responder agora. O que impede este sistema de ser estendido além de um raio crítico – que chamaremos de R(P), pois ele depende de cada observador e de cada ponto P onde a caracterização do sistema gaussiano foi estabelecido – é simples de descrever: ele se torna singular, isto é, ele não caracteriza as distâncias entre pontos deste universo por números reais finitos. Tudo se passa como se chegássemos, em R(P), a uma fronteira, além da qual o universo não mais existiria: chegaríamos a uma barreira intransponível, às bordas que delimitariam este universo. Entretanto, não se trata de um impedimento verdadeiro, real, pois nada mais é do que uma propriedade desta particular classe de descrição do universo de Gödel. Outras caracterizações, não gaussianas, podem ir além deste ponto crítico R(P). Mas como é isso possível? O que está afinal de contas, acontecendo naquele ponto? Para melhor e mais facilmente entendermos isso, é conveniente fazermos um pequeno intervalo nesta análise e examinarmos uma situação semelhante – mas bem mais simples – que acontece em uma geometria mais elementar, a geometria de Minkowski.

6 Geometria de Minkowski, observadores de Rindler

Uma escolha de sistema de coordenadas, isto é, o modo pelo qual se representam os pontos ou eventos no espaço-tempo quadridimensional, é arbitrária. Alguns sistemas podem ser estendidos para todo o espaço-tempo, e outros têm seu domínio de aplicação limitado a uma dada região. Esta escolha depende de várias motivações e até mesmo seu alcance pode fazer parte dos critérios desta escolha. Poder-se-ia pensar que a escolha normal fosse aquela no qual o sistema de coordenadas pudesse ser estendido sobre toda a variedade. Entretanto, por diferentes razões, às vezes, é mais conveniente usar uma dada representação, mesmo que ela não seja global, isto é, mesmo que ela possua uma fronteira a partir da qual este sistema não seja mais utilizável. Um exemplo bastante esclarecedor desta situação na qual o sistema de representação usado é restrito a uma parte limitada da geometria é o sistema de coordenadas de Rindler. A origem de um tal sistema está no fato – ditado por alguma conveniência local – de que se escolhe para representar o espaço-tempo, uma classe particular de observadores privilegiados aos quais um sistema de coordenadas está associado, uma classe especial de observadores não-inerciais. Isto é, seleciona-se, por algum critério, um conjunto de observadores. No caso de Rindler, escolhe-se observadores não livres, aos quais uma força é aplicada continuamente, gerando uma aceleração constante. Assim, ao se estabelecer um sistema de coordenadas mais adaptado a estes observadores, descobre-se que este sistema só pode descrever um quarto da totalidade do espaço-tempo convencional de Minkowski. Neste caso, uma simples inspeção em sua interpretação, mostra que as fronteiras que delimitam o domínio da validade do sistema de coordenadas de Rindler são determinadas pelo valor máximo da correspondente aceleração.

7 *Geometria de Minkowski, observadores de Milne*

Um outro sistema especial de coordenadas foi caracterizado pelo astrônomo inglês Milne. Ele pode ser entendido como constituindo uma espécie de sistema complementar ao de Rindler, embora sua origem seja totalmente distinta. Com efeito, enquanto os observadores de Rindler constituem sistemas acelerados, e consequentemente não possuem um tempo único gaussiano, a classe dos observadores de Milne constituem observadores inerciais, livres, e que descrevem um só tempo global comum a todos estes observadores. Isto é, como em Gödel, este sistema gaussiano é limitado. Mas então, de onde vem o horizonte, esta fronteira que impede que este sistema cubra todo o espaço-tempo? Para entendermos isso, devemos conhecer o modo pelo qual o sistema de Milne é gerado, como se descreve sua criação, como pode ele ser construído. Com efeito, o sistema de Milne é gerado fixando-se arbitrariamente um momento singular de criação artificial e formal do espaço-tempo minkowskiano. Tudo se passa, para este sistema de coordenadas como se, a partir de um dado momento previamente selecionado e arbitrário, caracterizado por um valor que convencionamos chamar de tempo zero, uma quantidade infinita de observadores inerciais são hipoteticamente enviados para todas direções, a partir de um ponto central do espaço, escolhido para constituir a origem espacial deste sistema de coordenadas. Assim, a partir deste centro, todo o espaço seria atingido. Entretanto, como os observadores só podem se movimentar para o futuro, o passado deste ponto e, consequentemente todos os pontos que estariam no espaço associado a um tempo anterior ao escolhido no sistema de Milne como seu tempo inicial, não poderiam ser atingidos pelos observadores de Milne. Consequentemente, eles representariam eventos, acontecimentos do passado que estariam fora desta descrição. Entende-se assim, a razão pela qual o sistema de coordenadas de Milne só é capaz de descrever uma parte da totalidade da geometria de Minkowski: trata-se de uma consequência direta do modo de formação deste sistema. Os observadores de Milne ao começarem sua descrição do universo, postulam que toda a história passada está definitivamente apagada para eles, ou, para usar a palavra correta associada a esta definição: este passado não existiu, não pode fazer parte de sua representação do universo. E, no entanto, trata-se de descrever o bem-comportado espaço-tempo de Minkowski. Sabemos que é possível, escolhendo outra classe de observadores fundamentais, estabelecer um sistema gaussiano completo, capaz de representar toda esta geometria. Isso nos mostra claramente que a limitação do sistema gaussiano de Milne não é uma propriedade inerente ao espaço-tempo que ele descreve, mas sim uma limitação do alcance dessa particular escolha de representação (o leitor interessado pode ver mais detalhes na referência [3]).

8 *Sistema gaussiano na geometria de Gödel*

Depois deste pequeno desvio para entendermos como se estrutura, em geral, um sistema de observadores gaussianos, e como se pode limitar e estender sua descrição, podemos voltar ao caso que nos interessa aqui. Vamos proceder de modo semelhante. Suponhamos que na geometria de Gödel um conjunto de observadores geodésicos são enviados para todas as direções a partir de um ponto qualquer 0. Cada um destes observadores irá descobrir que ao se aproximar de um certo valor de distância D de seu ponto original (valor este que depende somente da intensidade de rotação existente neste modelo) aparece uma barreira impossibilitando a extensão daquele sistema além de D. E qual a origem dessa barreira, dessa curiosa propriedade de confinamento? Por que este sistema limita ao raio D a possibilidade de construção de um tempo único, do tempo gaussiano, nesta geometria? Um exame mais detalhado mostra o que se passa na fronteira: além de D é possível o aparecimento de curvas do tipo tempo fechadas. Isto é, um observador real poderia, em princípio, voltar a seu passado e, consequentemente, um tal sistema de coordenadas gaussianos se torna impossível de ser estendido além de D. Notemos, entretanto, que a situação na geometria de Gödel é diferente do caso anterior de Minkowski. Tanto na representação de Milne quanto na de Rindler, a limitação de que tratamos é artificial, está associada a uma escolha especial de observadores. Podemos passar para outra categoria de observadores — os inerciais, por exemplo, — que podem realizar a tarefa de descrever a totalidade do universo de Minkowski. A diferença entre esta limitação de alguns observadores gaussianos desta geometria e aquela, bem mais dramática, existente na geometria de Gödel, reside precisamente nesta característica que devemos repetir e enfatizar: enquanto em Minkowski trata-se de uma escolha de observadores que não podem utilizar um tempo cósmico global, único, para toda a geometria, no caso de Gödel, trata-se de uma proibição inerente a esse modelo que independe de qualquer escolha especial de observadores.

9 Uma comparação dos modelos de universo de Einstein e Gödel

No modelo de universo de Einstein não há dinâmica, o universo é estático. Isso é afirmado ao começo de sua caracterização e isso pôde ser feito, pois existe um tempo global de referência ao qual os observadores fundamentais gaussianos podem comparar as diferentes propriedades desta geometria. Nada semelhante em Gödel. Não somente a dinâmica aqui não existe, mas nem mesmo aquele tempo global de referência em relação ao qual nos questionamos sobre esta dinâmica, não existe. Ademais, torna-se extremamente difícil – e, em certas situações, mesmo impossível examinar propriedades convencionais da física nesta geometria. Vamos dar um exemplo simples, mas esclarecedor.

Como vimos, a geometria de Einstein admite a construção de um sistema gaussiano no qual este universo pode ser separado em uma estrutura tridimensional chamada "espaço" e um tempo. Uma tal construção é global, isto é, pode ser estendida sobre todo este universo. Desta forma, é possível organizar uma ciência convencional, semelhante à construída na relatividade especial, que guardaria muitas – se não todas – características com as quais se descreve o mundo. Em particular, por exemplo, uma física de campos seria possível ser construída, semelhantemente ao que ocorre na geometria de Minkowski, transportando-a para o cenário de Einstein. Nada semelhante na geometria de Gödel. Com efeito, embora seja possível instituir um sistema gaussiano local nesta geometria, o fato de que ele não possa ser estendido globalmente produz resultados estranhos e inesperados. Só para citar um exemplo, poderíamos considerar as dificuldades quase insuperáveis de produzir uma física convencional de campos nesta geometria e construir um problema de Cauchy para eles. Isto significa, de um modo simbólico e preciso, a impossibilidade de que um corpo material, uma partícula, possa ser descrita como uma estrutura única e permanente. Uma partícula, vista por um observador nesta geometria, poderia não ser reconhecida como tal por outro observador. Como é isso possível?

Não entrarei em mais detalhes neste texto, encaminhando o leitor interessado para os artigos citados abaixo.

Sobre o autor

Mário Novello (novello@cbpf.br) é Pesquisador Emérito do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Mestre em Física pelo CBPF, sob a orientação de José Leite Lopes e Doutor em Física pela Université de Genève (Suíça), sob a orientação de Josef-Maria Jauch (1972). Em 2004 recebeu o título Doutor Honoris Causa pela Université de Lyon (França) por seus estudos sobre modelos cosmológicos sem singularidade. Autor de vários livros técnicos e de divulgação científica, dentre os quais Cosmos et Contexte (Ed. Masson, Paris), O que é Cosmologia (Ed. Zahar). Publicou mais de uma centena de artigos científicos e orientou dezenas de dissertações de mestrado e teses de doutorado.

Referências

[1] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation*, Reviews of Modern Physics **21**, 447 (1949).

[2] M. Novello, *O que é cosmologia: a revolucao do pensamento cosmológico* (Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 2010).

[3] M. Novello, *Maquina do tempo: um olhar científico* (Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 2005).

[4] M. Novello, I. D. Soares e J. Tiomno, *Geodesic motion and confinement in gödel's universe*, Phys. Rev. D **27**, 779 (1983).

[5] M. Novello, N. F. Svaiter e M. E. X. Guimarães, *Synchronized frames for Gödel's universe*, General Relativity and Gravitation **25**(2), 137 (1993).