

# Um primeiro passo em direção à modificação da gravidade: teorias escalar-tensoriais e $f(R)$

Pedro Bessa e Túlio Ottoni

Programa de Pós-Graduação em Cosmologia, Gravitação e Astrofísica - PPGCosmo

## Resumo

A relatividade geral, apesar de seus sucessos, é hoje entendida como uma teoria aberta a possibilidades de modificação. Neste artigo buscamos introduzir de maneira didática a base de uma classe de teorias que busca preencher algumas lacunas deixadas pela relatividade geral, as teorias  $f(R)$  e escalar-tensoriais. Construimos as teorias a partir de um princípio de ação e obtemos suas equações de campo. Mostramos a equivalência entre as duas teorias e comentamos sobre mecanismos de blindagem. Por fim, mostramos alguns resultados observacionais sobre modificações da relatividade geral dentro do contexto dessas teorias.

## Abstract

Today, after its triumphs, general relativity is considered a theory with viable modifications. In this review, we introduce in a pedagogical way the fundamentals of a class of theories that try to fill the gaps left by general relativity, the class of  $f(R)$  and scalar-tensor theories. We build the theories from the action principle and obtain their field equations. We also show the equivalence between the two theories and comment on the screening mechanism. At the end, we show some observational results on modifications of general relativity with these types of theory on mind.

**Palavras-chave:** Gravidade Modificada, Astrofísica, cosmologia.

**Keywords:** Modified Gravity, Astrophysics, Cosmology.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v3n2.37208](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v3n2.37208)

## 1 Introdução

A relatividade geral, ao lado da mecânica quântica e sua extensão natural, a teoria quântica de campos, forma a base da física moderna. Sua descrição e predições em problemas específicos da interação gravitacional desde distâncias da ordem de unidades astronômicas (1 u.a.  $\approx 1,5 \times 10^8$  km) até gigaparsecs (1 Gpc  $\approx 3,1 \times 10^{19}$  km), assim como de potenciais gravitacionais desde  $\phi \sim GM/c^2 r \sim 10^{-5}$  até  $\phi/c^2 \sim 0,3$  a estabelece firmemente como uma das teorias científicas mais bem sucedidas [1–3]. Uma introdução a sua matemática e física pode ser encontrada facilmente no primeiro volume destes Cadernos de Astronomia [4, 5].

Entretanto, com seus mais de 100 anos, se a teoria se mostra repetidamente testada e comprovada, sabemos hoje que ela é, pelo menos, incompleta. Essa incompletude pode ser resumida em dois fatos consumados que a física do século XX estabeleceu:

- A natureza fundamental das interações é quântica. Se desejamos acessar os regimes de pequenas distâncias ou de altíssimas energias da interação gravitacional, precisamos encontrar uma formulação devidamente quântica da mesma. A relatividade geral não pode ser essa formulação [6, 7], e logo ela deve ser o limite clássico de alguma outra teoria de gravitação quântica [8].
- O Universo está expandindo aceleradamente [9]. O mecanismo por trás dessa aceleração não é conhecido, mas a sua observação garante que a relatividade geral, sozinha, não descreve completamente a evolução do Universo – ao menos a adição de uma constante cosmológica  $\Lambda$  é necessária se queremos descrever a gravitação nas escalas relevantes para a cosmologia [10, 11].

Dado que a relatividade geral (RG) não pode ser a teoria final da gravitação, é fundamental explorar outras teorias da interação gravitacional.

Essa exploração precisa sempre levar em conta que a RG é consolidada em um espectro de regimes de energia e distância [10–12], e por isso qualquer alternativa à RG precisa contê-la nos regimes em que ela é consolidada.

Um bom princípio para guiar-se na busca por teorias físicas é o da parcimônia: ao tentar estender uma teoria, começamos por adicionar ou modificar apenas o mínimo possível, de forma a não adicionar elementos demais à teoria já estabelecida, e acabar por perder tanto a semelhança com a teoria consolidada, quanto o controle sobre a teoria modificada. Tendo em vista esse princípio, podemos pensar na mais fundamental das modificações de uma teoria: a adição de um grau de liberdade. Em teorias de campo clássicas (ou quânticas) como a relatividade geral ou o eletromagnetismo maxwelliano, isso se traduz em um campo escalar [13].

A ideia deste artigo é dar uma visão geral sobre as modificações da relatividade geral que possuem esse grau de liberdade a mais: um campo escalar. Veremos também uma classe de teorias, as teorias  $f(R)$ , que podem ser entendidas como teorias que adicionam um grau de liberdade escalar a mais na RG.

É instrutivo estudar esse tipo de teoria não apenas por serem teorias relativamente simples em sua construção, mas porque mesmo esse tipo prototípico de modificação de gravidade já apresenta uma rica complexidade que nos permite entender melhor a dificuldade de se ir além da relatividade geral [10]. Além disso, essas teorias são algumas das mais estudadas no cenário de gravitação, e apresentam uma vasta literatura que data ao menos da década de 60 do século passado [14, 15].

Ilustramos aqui esses tipos de teoria da seguinte forma: Primeiro, enunciamos a estrutura básica das teorias, assim como suas principais características. Depois, mostramos sua equivalência, ao mesmo tempo que definimos quantidades relevantes para testar as teorias. Por fim, mostramos de forma resumida formas de testar essas teorias no cenário astrofísico e cosmológico, e como elas estão restringidas em relação à RG.

Usamos no decorrer do texto, a convenção  $\hbar = c = 1$ , exceto quando explicitamente notado.

## 2 Teorias escalar-tensoriais

A mais simples generalização da relatividade geral, consiste na inclusão de um campo escalar no fenômeno gravitacional. Dessa forma, a gravidade seria descrita pela métrica usual do espaço-tempo, representada por um tensor, e por um campo escalar fundamental. Dizemos que essa generalização é simples pois um campo escalar é a entidade física mais simples que existe, uma vez que é um invariante de Lorentz [16].

Um campo escalar no setor gravitacional surge por exemplo no contexto de teorias do tipo Kaluza-Klein e teorias de cordas, ao considerarmos dimensões superiores [17].

Historicamente, a ideia de um campo escalar atuando no setor gravitacional foi primeiramente motivada por Paul Dirac (1902-1984) e sua hipótese dos números grandes. Dirac, tentando buscar uma explicação para os valores de constantes da natureza, introduziu a ideia de que constantes adimensionais não devem ser puros números matemáticos que aparecem nas leis fundamentais da física, mas sim variáveis que caracterizam o estado atual do universo [18].

A constante física que aparece na interação gravitacional é a constante newtoniana  $G$ . Na ação de Einstein-Hilbert, ela aparece como um parâmetro livre, cujo valor é medido experimentalmente

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi], \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{\kappa} + L_m \right), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $\kappa = 16\pi G$  e  $L_m$  a densidade lagrangiana dos campos de matéria, denotados coletivamente por  $\Psi$ . Ao integrarmos esse termo com o elemento de volume invariante  $\sqrt{-g}d^4x$  temos a ação da matéria  $S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi]$ .

Na forma como está escrita, a ação (1) respeita o princípio da equivalência Fraco, uma vez que os campos de matéria se acoplam minimamente com a geometria, por meio de  $\sqrt{-g}$ , de forma que o movimento das partículas será descrito por uma geodésica da métrica. Ou seja, partículas teste irão seguir o menor caminho na geometria curva do espaço-tempo.

Podemos então explorar a ideia de Dirac e promover  $\kappa$  a um campo escalar dinâmico, que pode possuir uma dependência espaço-temporal  $\kappa \rightarrow \kappa(\vec{x}, t)$ . Se então definirmos nosso campo es-

calar como sendo  $\phi \equiv 1/\kappa$ , a ação da teoria passa a ser

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R + L_m). \quad (2)$$

Temos agora uma ação que representa uma teoria bem distinta da relatividade geral, onde os efeitos novos surgem do primeiro termo  $\phi R$ , conhecido como acoplamento não-mínimo. Tal termo representa um novo grau de liberdade da teoria, no caso um grau de liberdade escalar.

Para tornar o campo escalar um campo dinâmico, precisamos adicionar novos termos à lagrangiana. Para nossas equações de movimento serem de segunda ordem, livres de instabilidade [19], os termos devem conter somente funções do campo e de sua derivada primeira  $L_\phi = L(\phi, \nabla_\mu \phi)$ . Incluímos então primeiramente um termo cinético

$$L_\phi = -\frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi, \quad (3)$$

onde  $\omega$  é uma constante e dividimos pelo próprio campo para não termos nenhuma constante com dimensão na teoria, conforme a ideia original de Dirac.

Sendo assim, a ação da teoria fica sendo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + L_m \right). \quad (4)$$

Vemos que agora o campo  $\phi$  se acopla diretamente com a geometria, e como a gravidade se acopla com todos os fenômenos físicos,  $\phi$  deve entrar nessa universalidade de alguma forma.

Segundo o princípio da equivalência, localmente a relatividade restrita é válida, o que significa que matematicamente devemos fazer a substituição  $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ ,  $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$ . O termo cinético do campo escalar, no contexto da relatividade restrita, se reduz à forma usual  $L_\phi \approx \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ . Assim, dizemos que o termo cinético se acopla minimamente com a métrica, somente através de  $\sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ .

Já o termo que contém o produto  $\phi R$  não pode ser obtido dessa forma, pois no limite da Relatividade Restrita ele simplesmente não existe, pois  $R = 0$ , uma vez que o espaço-tempo de Minkowski não possui curvatura. Essa é portanto a origem do nome acoplamento não-mínimo.

A teoria descrita pela ação (4) é conhecida como teoria de Brans-Dicke [14] e possui  $\omega$  como único parâmetro livre. Atualmente essa é uma

teoria escalar-tensorial protótipo, com grande relevância histórica e que serve como base para desdobramentos mais modernos.

A ação mais geral de uma classe de teorias escalar-tensorial com um acoplamento não-mínimo de um único campo escalar com a geometria, que generaliza a ação de Brans-Dicke (4), pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( F(\Phi) R - \frac{Z(\Phi)}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - V(\Phi) \right) + S^m [e^{2a(\Phi)} g_{\mu\nu}, \Psi_m], \quad (5)$$

onde permitimos que os fatores que multiplicam o escalar de curvatura  $R$  e o termo cinético sejam funções genéricas  $F(\Phi)$  e  $Z(\Phi)$  do campo. Adicionamos também um possível termo potencial  $V(\Phi)$  na dinâmica do campo escalar e também permitimos um acoplamento direto com a matéria através do termo  $e^{2a(\Phi)} g_{\mu\nu}$ .

A ação (5) leva em conta a ideia de variar a constante gravitacional, na medida que podemos interpretar  $G_{eff} = G/F(\Phi)$  como um novo acoplamento gravitacional, não mais constante, mas dependente do campo  $\Phi$ , que por sua vez varia no espaço e no tempo. O termo potencial  $V(\Phi)$  indica que existe uma auto-interação do campo.

Uma análise direta da ação tensor-escalar geral (5) nos levaria a pensar que a teoria possui 4 funções livres  $F(\Phi)$ ,  $Z(\Phi)$ ,  $V(\Phi)$  e  $a(\Phi)$ . Porém esse não é o caso. Temos duas liberdades de transformação, expressas por uma transformação conforme da métrica e pela redefinição do campo escalar

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(\Phi) g_{\mu\nu}, \quad (6)$$

$$\Phi \rightarrow f(\Phi), \quad (7)$$

de forma que podemos eliminar duas das quatro funções livres. Ao fazermos isso, a ação permanece invariante.<sup>1</sup> Quando escolhemos uma definição do campo e uma transformação específica da métrica, no fundo o que estamos escolhendo é uma representação da teoria e experimentos não

<sup>1</sup>Ao fazermos a transformação conforme 31 na métrica, seu determinante muda como [20]  $g \rightarrow \Omega^2(\Phi)g$  e o escalar de Ricci  $R \rightarrow \Omega^{-2}(\Phi)(R - 6g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \log \Omega(\Phi) - 6g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega(\Phi)) \nabla_\nu \log \Omega(\Phi))$ . A ação permanece invariante na medida que podemos englobar os termos com o fator conforme  $\Omega^2(\Phi)$  e suas derivadas nas funções arbitrárias  $F(\Phi)$ ,  $Z(\Phi)$ ,  $V(\Phi)$  e  $a(\Phi)$ .

são sensíveis à representação, sendo portanto, puramente uma convenção [21]. A seguir exploramos duas representações mais usadas.

## 2.1 Representação de Jordan

Na representação de Jordan, escolhemos  $a = 0$  e  $Z = 1$  e a ação assume a forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( F(\Phi)R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - V(\Phi) \right) + S^m[g_{\mu\nu}, \Psi_m], \quad (8)$$

onde o acoplamento não-mínimo com a geometria é determinado pela função  $F(\Phi)$ .

Como a parte da ação que descreve a matéria é a mesma da relatividade geral, concluímos que  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , e partículas irão seguir geodésicas da métrica  $g_{\mu\nu}$ , em acordo com o princípio da equivalência de Einstein.

## 2.2 Representação de Einstein

Para obtermos a representação de Einstein, fazemos  $F = 1$  e  $Z = 1$ , usando a invariância da ação (5) por transformações conformes da métrica. A ação nessa representação pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - V(\Phi) \right) + S^m[e^{2a(\Phi)} g_{\mu\nu}, \Psi_m]. \quad (9)$$

Vemos que na ação da representação de Einstein, temos o termo usual da relatividade geral com o escalar de Ricci, e o campo escalar agora está minimamente acoplado com a geometria através dos termos cinético e potencial. Porém aparece um acoplamento direto com a matéria, a partir da nova métrica que depende do campo escalar. Transferimos assim o acoplamento direto, não-mínimo, com a geometria, para um acoplamento direto com a matéria.

Como alteramos a parte da ação que descreve a matéria, partículas não irão mais seguir geodésicas da nova métrica. Apesar de parecer uma violação do princípio da equivalência, a representação de Einstein é fisicamente equivalente à representação de Jordan, onde só estamos usando variáveis diferentes para representar os observáveis. Assim, o movimento descrito por partículas será o mesmo nos dois casos, porém só será uma

geodésica da métrica de Jordan, que muitos autores chamam de métrica física. Essa equivalência entre as representações é motivo de debate. Para mais detalhes ver [21] e as referências citadas.

Para definirmos uma notação que evidencia o intercambiamento entre as duas representações, vamos chamar a métrica na representação de Einstein de  $g_{\mu\nu}^*$  e todas as quantidades calculadas a partir dela serão denotadas com \*. Além disso, denotamos o campo escalar nessa representação por  $\varphi$  e o potencial por  $U(\varphi)$ .

De fato, existe uma transformação particular que leva a ação de Jordan (8) na ação de Einstein (9), onde simplesmente particularizamos a classe de transformações (6) e (7) na forma

$$g_{\mu\nu}^* \equiv F(\Phi)g_{\mu\nu}, \quad (10)$$

$$\left( \frac{d\varphi}{d\Phi} \right)^2 \equiv \frac{3}{4F(\Phi)^2} \left( \frac{dF(\Phi)}{d\Phi} \right)^2 + \frac{1}{4F(\Phi)}. \quad (11)$$

Agora, reescrevemos a ação usando as novas definições e o conhecido resultado de que a derivada covariante coincide com a derivada usual para campos escalares. Assim,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^*} \left( R^* - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^* \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - U(\varphi) \right) + S^m[g_{\mu\nu}^*/F(\Phi(\varphi)), \Psi_m], \quad (12)$$

onde  $U(\varphi) \equiv V(\Phi)F^{-2}(\Phi)/4$ .

As equações de campo, derivadas da ação (12), assumem uma forma matemática mais simples, própria para um tratamento numérico, dada por

$$R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} R^* g_{\mu\nu}^* - 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu}^* g_{\alpha\beta}^* \partial_\beta \varphi \partial_\alpha \varphi = 8\pi G T_{\mu\nu}^* - 2U(\varphi)g_{\mu\nu}^*, \quad (13)$$

$$\square^* \varphi = -4\pi G \alpha(\varphi) T^* + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (14)$$

onde

$$\alpha(\varphi) \equiv -\frac{1}{2} \frac{d \ln F(\Phi(\varphi))}{d\varphi}. \quad (15)$$

Como na representação de Einstein temos um acoplamento direto com a matéria, ao mantermos a definição do Tensor Energia-Momento como sendo  $T_{\mu\nu}^* \equiv -(2/\sqrt{-g^*})\delta S^{(m)}/\delta g_{\mu\nu}^*$  temos que a equação de movimento não terá a mesma forma, uma vez que  $T_{\mu\nu}^* = F^{-3}T_{\mu\nu}$ .

Vemos, assim, que o que falta agora é especificar a forma do acoplamento  $F(\phi(\varphi))$  e a forma do potencial  $V(\varphi)$ , para escolhermos uma teoria, dentro dessa classe geral de teorias escalar-tensorial. Usualmente temos essas duas avenidas para explorar a física dessas teorias.

### 2.3 Um exemplo de teoria escalar-tensorial

Como exemplo simples de teoria, podemos considerar uma ação sem potencial  $V(\varphi) = 0$ . Fisicamente isso significa que o campo não possui auto-interação. Pela equação (14) vemos que um termo quadrático no potencial irá funcionar como a massa do campo escalar. Dessa forma estamos tratando um campo não massivo, que irá mediar uma interação de longo alcance.

Para a função de acoplamento, podemos escolher

$$F(\Phi) = 1 - 8\pi\xi\Phi^2 \tag{16}$$

onde  $\xi \in \mathfrak{R}$ . As motivações para essa forma do acoplamento vão de considerações fundamentais, que surgem, por exemplo, da quantização de campos clássicos em espaços curvos [22], até cenários cosmológicos com modelos de inflação [23, 24].

Como veremos a seguir, do ponto de vista experimental, vínculos são colocados ao expandirmos a função de acoplamento em torno de um valor de fundo do campo escalar. Podemos então considerar um modelo para a função de acoplamento, já no frame de Einstein, dado por

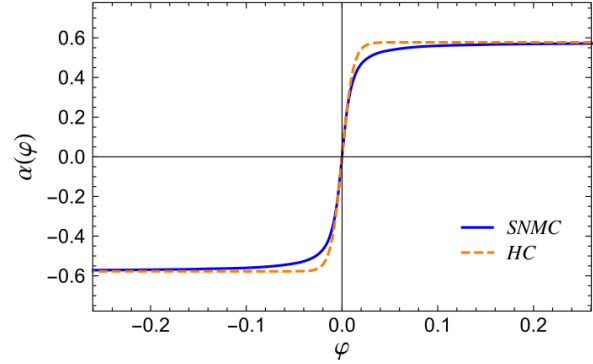
$$F(\varphi) = \left[ \cosh(2\sqrt{3}\xi\varphi) \right]^{-1/(3\xi)}, \tag{17}$$

$$\alpha(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh(2\sqrt{3}\xi\varphi). \tag{18}$$

A função dessa forma tem como motivação uma aproximação analítica do acoplamento não-mínimo (16) já na representação de Einstein [25]. Essa aproximação pode ser vista na Figura 1.

Podemos vincular a teoria, com o acoplamento na forma (16), por meio de experimentos feitos no sistema solar. Para isso consideramos o chamado formalismo pós-newtoniano parametrizado (PPN) [1] que consiste em expandir o campo gravitacional (a métrica  $g_{\mu\nu}$ ) em torno do valor newtoniano (a métrica de Minkowski  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ). Tal aproximação vale para baixas velocidade e campos fracos.

De forma análoga, podemos fazer uma expansão do campo escalar, em torno de um valor de



**Figura 1:** Comparação entre o acoplamento não-mínimo (SNMC) e o modelo com funções hiperbólicas (HC), ambos na representação de Einstein para  $\xi = 25$ . O modelo hiperbólico reproduz o comportamento do acoplamento não-mínimo, aumentando a concordância a medida que  $|\varphi|$  aumenta. Figura retirado do artigo de um dos autores [26].

fundo, que denotamos por  $\varphi_\infty$ . Assim o acoplamento pode ser escrito como

$$F(\varphi) = F(\varphi_\infty) + (dF/d\varphi)_{\varphi_\infty}(\varphi - \varphi_\infty) + O[(\varphi - \varphi_\infty)^2]. \tag{19}$$

Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ , chamados parâmetros de Eddington, são os mais importantes, se tratando de experimentos realizados no sistema solar. O primeiro mede o quanto de curvatura é produzido em uma distância  $r$  por uma massa  $M$ , já o segundo mede o desvio da linearidade na lei de superposição gravitacional. No contexto da relatividade geral eles são identicamente iguais a 1, i. e.,  $\gamma = \beta = 1$ . Na classe de teorias escalar-tensorial que estamos tratando eles assumem a forma [27]

$$1 - \gamma = 2 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{(dF/d\Phi)^2}{F/2 + 2(dF/d\Phi)^2}, \tag{20}$$

$$1 - \beta = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{1}{4} \frac{F(dF/d\Phi)}{F + 3(dF/d\Phi)^2} \frac{d\gamma}{d\Phi}, \tag{21}$$

onde  $\alpha$ ,  $F$  e suas derivadas são avaliadas em  $\varphi = \varphi_\infty$ .

O parâmetro  $\gamma$  foi medido através do atraso de Shapiro feito pela nave Cassini [28], e possui um valor  $1 - \gamma \lesssim 2,3 \times 10^{-5}$ . Já o parâmetro  $\beta$  é medido através de observações do avanço do periélio de Mercúrio [29] e possui um vínculo de

$1 - \beta \lesssim 8 \times 10^{-5}$ . Considerando o vínculo da Casini em  $\gamma$  e usando a expressão do acoplamento do modelo hiperbólico (18), vemos que vínculo se manifesta como  $|\xi\varphi_\infty| < 0,0017$ , ou seja, o valor assintótico do campo deve ser pequeno, se tornando menor à medida que  $|\xi|$  aumenta.

### 3 Teorias $f(R)$

Weyl, em 1918, na tentativa de formular uma teoria unificada da gravitação com o eletromagnetismo, postulou que um termo quadrático no lugar de  $R$  na ação de Einsein-Hilbert poderia dar conta da interação eletromagnética dentro de seu formalismo [15]. Nas décadas de 60 e 70, à medida que a questão da renormalizabilidade de uma teoria tornou-se importante para a física de campos e partículas, tornou-se importante encontrar uma extensão renormalizável da relatividade geral, que dependesse apenas de escalares de curvatura [8]. Entre outras, no fim da década de 70, uma extensão da relatividade geral com  $R^2$  na ação, proposta por Starobinsky mostrou-se capaz de reproduzir, sem a inclusão de um novo campo escalar, as mesmas previsões da inflação, um paradigma moderno da cosmologia que encontrava-se em sua inepção [30].

Historicamente postuladas para resolver questões de regimes de altas energias, após a descoberta da aceleração da expansão do Universo, teorias  $f(R)$  foram redescobertas como modelos prototípicos de modificações geométricas da relatividade geral para dar conta da fase de expansão acelerada do Universo sem a necessidade de invocar uma nova interação fundamental (como um campo escalar), ou uma componente exótica de energia (como uma energia escura). A ideia básica consiste em substituir o escalar de Ricci na ação (1) por uma função, a princípio arbitrária,  $f(R)$ :

$$\sqrt{-g}Rd^4x \longrightarrow \sqrt{-g}f(R)d^4x. \quad (22)$$

A arbitrariedade da função  $f(R)$  torna esse tipo de teoria particularmente conveniente para testar hipóteses sobre a estrutura do setor gravitacional para além da relatividade geral. É possível tanto construir *toy models* para entender como termos de ordem maior no escalar de curvatura ajudam a construir uma teoria renormalizável (teorias de ordem maior em  $R$ ); para

acelerar a expansão do Universo (teorias cosmicamente viáveis); como limites a baixas energias de teorias de gravidade quântica (teorias efetivas); e também como modelos do Universo primordial (a inflação de Starobinsky).

A necessidade de que as teorias reproduzam a relatividade geral nos regimes já conhecido, entretanto, impõe restrições à função  $f$  [31]. Não apenas isso, mas o fato de que nossas equações de movimento não devem possuir mais de duas derivadas na variável dinâmica, que no caso são a métrica e o campo escalar essas variáveis, ou possuir os chamados campos "fantasma", também limita a forma de  $f$  [19]. Por fim, como cada teoria é em geral construída de forma a entender algum regime particular de energia, teorias que buscam explicar a aceleração cósmica precisam reproduzir o Universo observado [32], e teorias que buscam ser o limite de uma teoria quântica da gravidade [33] possuem cada uma complexidades e limitações particulares.

Como veremos adiante, a dinâmica obtida da variação da lagrangiana de teorias  $f(R)$  possui uma equivalência com certos tipos de teorias escalar-tensoriais. Essa conexão nos permite reinterpretar a teoria também como uma teoria com um grau de liberdade a mais do que a relatividade geral, e um potencial efetivo  $V_{\text{eff}}$ , da forma heurística

$$\frac{df}{dR} \longleftrightarrow \phi \quad (23)$$

$$R\phi - f(R) \longleftrightarrow V_{\text{eff}}(\phi). \quad (24)$$

Esse tipo de equivalência é importante, novamente, para limitar também a forma da função  $f$ . Para além das restrições já discutidas, potenciais efetivos são uma maneira de entender como a teoria retorna ao limite da relatividade geral nos regimes já conhecidos.

Antes de explorarmos da melhor forma possível que uma introdução nos permite a enorme complexidade e vastidão de teorias desse tipo, uma última nota é importante: Não existe apenas uma forma de variar a ação de uma teoria gravitacional. Aqui trabalharemos com o formalismo métrico, onde tratamos a métrica como única variável dinâmica da nossa teoria. No formalismo métrico-afim, por exemplo, tratamos a conexão  $\Gamma$  como variável completamente independente de  $g$ ; enquanto que no formalismo de Palatini, assumimos que a conexão é independente e ademais que

os campos de matéria também não dependem da conexão. Em ambos os casos, nas ações do tipo  $f(R)$ , os diferentes formalismos levam a teorias distintas do formalismo métrico. Por brevidade e necessidade de introdução, nos restringiremos a esse tipo de formalismo. O leitor interessado pode checar as limitações, especificidades e possibilidades dentro do formalismo de Palatini, por exemplo, nas referências [10, 31]

### 3.1 Equações de campo

Com a substituição (23) na ação de Einstein-Hilbert, temos a ação

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (25)$$

Para obter as equações da teoria no formalismo métrico, variamos (25) em relação a  $g_{\mu\nu}$ :

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0,$$

e obtemos as equações de campo, onde incluímos uma fonte de matéria na variação, dando o tensor energia-momento,

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (26)$$

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = 8\pi GT, \quad (27)$$

onde a última equação é a equação do traço.

Essa é a forma geral das equações de campo para uma teoria  $f(R)$  arbitrária.

### 3.2 Um exemplo de teoria $f(R)$

Como exemplo, considere a ação de uma teoria  $f(R)$  com a função do escalar de Ricci escolhida por

$$f(R) = R - m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}, \quad n > 0. \quad (28)$$

$c_1$ ,  $c_2$  e  $n$  são parâmetros livres do modelo, e  $m$  é uma escala de massa característica, comumente associada à densidade média de matéria no Universo.

Note que no limite de alta curvatura ( $R \rightarrow \infty$ ),  $f(R) = R - m^2 \frac{c_1}{c_2}$ , retornamos à ação da relatividade geral com constante cosmológica  $\Lambda = \frac{m^2 c_1}{2 c_2}$ , e no limite de baixa curvatura ( $R \rightarrow 0$ ), resgatamos a relatividade geral  $f(R) = R$ . Esse modelo

é conhecido como o modelo de Hu-Sawicki [34], e essas características são comuns a modelos de teoria  $f(R)$  que buscam explicar a aceleração da expansão cósmica.

#### 3.2.1 Outro exemplo de teoria $f(R)$

Uma teoria que possui a forma da ação relativamente simples, com uma função exponencial no escalar de curvatura é a considerada por Linder [35], com a função  $f(R)$  dada por

$$f(R) = R - \alpha\beta(1 - \exp(-R/\alpha)). \quad (29)$$

Esse modelo, chamado de *exponencial*, possui características assintóticas semelhantes ao modelo de Hu-Sawicki, visto que sua proposta se inclui na de modelar a aceleração cósmica, logo necessitando se encaixar nas restrições de teorias  $f(R)$  cosmologicamente viáveis.

## 4 Equivalência entre teorias e blindagem

Nesse capítulo vamos definir a constante  $\kappa \equiv 8\pi G$ . Considere a ação de uma teoria  $f(R)$  genérica, que se acopla minimamente aos campos de matéria (ou seja, a única interação entre matéria e curvatura é a universal, dada pelo princípio da equivalência):

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{f(R)}{2\kappa} + \mathcal{S}_m[g_{\mu\nu}, \Psi]. \quad (30)$$

A dinâmica da ação total  $\mathcal{S}$  não possui interação entre os campos de matéria  $\Psi$  e o campo gravitacional  $g$ , por construção [36]. A independência dinâmica entre campo gravitacional e matéria deve permanecer verdadeira independente do sistema de coordenadas que usamos, em particular, isso deve ser verdadeiro por uma mudança de coordenadas conforme; isto é, uma mudança de coordenadas como em (6) que transforma a métrica como

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\mu) g_{\mu\nu}, \quad (31)$$

$\Omega$  um função arbitrária das coordenadas espaço-temporais.

Essa discussão se torna interessante por conta do seguinte procedimento [37], que mostra a equivalência dinâmica entre teorias escalar-tensoriais e teorias  $f(R)$ .

A partir da ação (30), defina um campo escalar auxiliar  $\chi(R)$ , função explícita de  $R$ , a princípio

arbitrário. Considere agora a seguinte ação:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(\chi) + \frac{df(\chi)}{d\chi} (R - \chi) \right]. \quad (32)$$

Integrando por partes o segundo termo da densidade lagrangeana, obtemos

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(\chi) + f(\chi) \left( \frac{dR}{d\chi} - 1 \right) \right]. \quad (33)$$

Não é difícil mostrar que variar esta ação em relação a  $\delta\chi$  é equivalente a variar a ação (30) em relação à mesma variável. Isto prova que as ações são dinamicamente equivalentes. A extremização nos dá a equação de vínculo

$$\frac{d^2 f}{d\chi^2} (R - \chi) = 0, \quad (34)$$

que é válida se e somente se  $d^2 f/dR^2 = 0$  ou  $(R - \chi) = 0$ . Não é desejável (mas não impossível)<sup>2</sup> que nossa teoria possua  $d^2 f/dR^2 = 0$ , por motivos que se esclarecerão logo em seguida; por isso, chegamos à igualdade

$$\chi = R.$$

Isso prova que podemos reparametrizar nossa teoria em termos de uma função escalar, que teremos as mesmas equações de movimento (equivalência dinâmica). Agora simplesmente definimos as duas funções

$$\phi \equiv \frac{df}{d\chi} \quad (35)$$

$$V(\phi) \equiv \chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi)), \quad (36)$$

obtemos uma ação idêntica a (4), com a constante  $\omega = 0$ :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)] + \mathcal{S}_m[g_{\mu\nu}, \Psi]. \quad (37)$$

Com isso concluímos a prova da equivalência entre teorias  $f(R)$  no formalismo métrico e teorias de Brans-Dicke com  $\omega = 0$ .

Note que, se  $f''(R) = 0$ , não poderíamos ter realizado a mudança de variáveis  $f'(R) \rightarrow \phi$ . O fato de que obtemos a mesma ação, com a mesma quantidade de graus de liberdade, e logo a mesmas equações de movimento, apenas redefinindo

<sup>2</sup>De fato, a condição matemática suficiente para que possamos realizar esse procedimento é que  $df/dR$  seja uma função injetiva e  $C^0$  [31].

parâmetros, mostra o poder do formalismo lagrangiano.

Com a equivalência dinâmica das duas teorias estabelecida, podemos explorar ainda a liberdade de transformações de coordenadas de (30), para explicitar certas propriedades físicas da teoria  $f(R)$ . Considere a transformação (31), definida, como em (6) por

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv f'(R)g_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}, \quad (38)$$

e a redefinição do campo escalar, a menos de uma constante,

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \frac{d\phi}{\phi}. \quad (39)$$

Essas transformações, que não modificam a dinâmica da teoria (invariante por mudança de coordenadas), colocam a ação (37) na forma

$$\mathcal{S}' = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{R} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\alpha \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right] + \mathcal{S}_m[e^{\sqrt{2\kappa/3}\tilde{\phi}} g_{\mu\nu}, \Psi], \quad (40)$$

onde

$$\phi \equiv f'(R) = e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\phi}} \quad (41)$$

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{Rf'(R) - f(R)}{2\kappa(f'(R))^2}. \quad (42)$$

Esta ação é idêntica a (12), o que mostra também a possibilidade de entender a teoria como uma teoria de Brans-Dicke na representação de Einstein. De fato, a equivalência entre as duas teorias (e também as teorias  $f(R)$  no formalismo de Palatini) é tal que as propriedades matemáticas de uma podem ser imediatamente estendidas à outra, como, por exemplo, a existência de singularidades e a propriedades de espaço-tempos [31, 38].

#### 4.1 Blindagem

Por generalidade, ou falta de criatividade, o campo  $\phi$  definido na seção anterior é comumente chamado de *scalaron*. Entender o comportamento de uma teoria a transformando para a forma de uma teoria escalar-tensorial é por vezes útil na hora de estudar os efeitos da modificação da gravidade uma vez que podemos escrever esses efeitos em termos da equação de movimento e do potencial da partícula escalar – o *scalaron* nesse caso.



Considere a equação do traço (26). Ao escrever a ação de uma teoria  $f(R)$  na forma (37), a equação do traço se torna

$$\square\phi + \frac{dV_{\text{eff}}(\phi)}{d\phi} = \frac{\kappa}{3}T, \quad (43)$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} \equiv \frac{2}{3}V(\phi) - \frac{\phi}{3} \frac{dV}{d\phi}, \quad (44)$$

que é muito semelhante à segunda equação (12), com a forma de uma equação de Klein-Gordon com um potencial.

Essa forma de escrever a equação de campo, aparentemente uma simples redefinição de variáveis, na verdade mostra exatamente a ideia que discutimos: podemos entender a dinâmica da modificação na ação pela função  $f(R)$  como a dinâmica de um campo escalar  $\phi$  sujeito a um potencial  $V_{\text{eff}}$  – que pode ser interpretada como a dinâmica de uma partícula escalar relativística.

Esse fato não é apenas uma mera reinterpretção da teoria. De fato, à equação de Klein Gordon geral

$$\square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (45)$$

podemos atribuir uma massa efetiva  $m_{\text{eff}}$ , que é função de  $V$  e  $T$ , para colocá-la na forma de uma equação de Klein-Gordon para uma partícula massiva

$$\square\phi + \mu^2\phi = 0, \quad (46)$$

quando temos  $|\phi|/\kappa \ll 1$ , também chamado de limite de campo fraco, podemos expandir  $V_{\text{eff}}$  em uma série de Taylor, que nos permite escrever a importante relação

$$m_{\text{eff}}^2 = \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial\phi^2}. \quad (47)$$

O fato de que o *scalaron* ganha uma massa efetiva, que é função das densidades de matéria  $T$  e da curvatura  $R$  é o que gera o chamado mecanismo de blindagem.

No vácuo, ou seja, quando  $T = R = 0$ , o *scalaron* possui uma massa  $m^2 \propto \mathcal{O}(\Lambda)$  [12] da ordem da constante cosmológica, que faz com que a teoria tenha o comportamento da relatividade geral mais uma constante cosmológica.

A função de Green da equação (46) nos fornece uma interação da forma

$$\mathcal{G}(|r|) = \frac{A}{r} e^{-\alpha m_{\text{eff}} r}, \quad (48)$$

A e  $\alpha$  constantes;  $r \equiv |x - x'|$  a distância entre duas partículas pontuais interagindo, e  $m_{\text{eff}} = \mu$ , em unidades geométricas. Em termos de interações de campos, isso significa que a distância característica da interação, dada pelo comprimento de onda Compton do *scalaron*, é

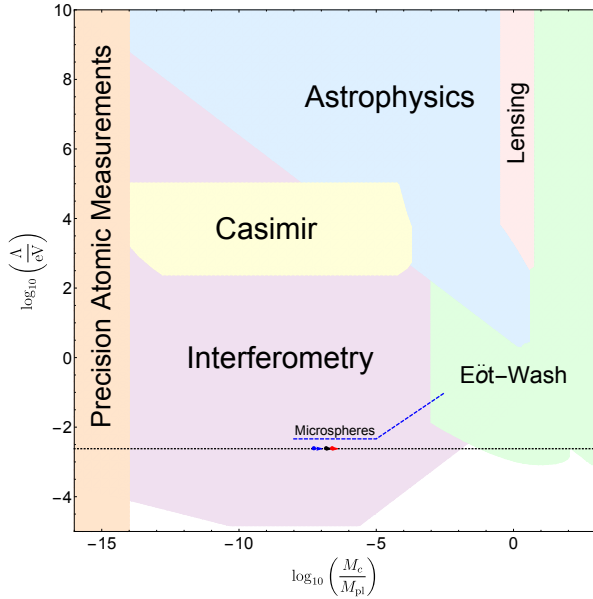
$$\lambda \propto \frac{1}{m_{\text{eff}}}.$$

Essa interação, por vezes chamada de quinta força, não é detectada nos regimes em que a relatividade geral é bem testada, e é necessário que  $m_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ , já que a interação não pode ter alcance algum nesses regimes. Isso nos leva a uma conclusão importante: nos limites em que já testamos a relatividade geral, podemos colocar restrições na massa efetiva do campo escalar, que vamos chamar apenas de  $m$ . Em particular, como  $m$  depende da modificação da gravidade, isto é, da forma do potencial (43), esse potencial na ação (9) não pode ser arbitrário. Como já provamos a equivalência entre as teorias, isso também restringe a forma da função  $f(R)$ .

Esse tipo de mecanismo, onde a massa do potencial escalar se torna uma função da densidade de energia-momento do espaço tempo, é conhecido como mecanismo *chameleon*, e foi estudado pela primeira vez no contexto das teorias aqui discutidas por Khoury e Weltman [39, 40]. Outros tipos de mecanismo de blindagem são possíveis, mas sua construção é mais delicada [41], ou envolve, por exemplo, a exigência de que o bóson responsável pela interação gravitacional seja massivo [42].

Podemos resumir a ideia por trás desse mecanismo de blindagem da interação de um campo escalar da seguinte maneira:

1. Campos escalares conseguem alterar a interação gravitacional em grandes escalas, que equivalem a baixas densidades em cosmologia.
2. A interação gravitacional deve, na escala do Sistema Solar, de altas densidades, obedecer à relatividade geral.
3. Podemos conciliar esses dois regimes assumindo que o campo escalar possui uma massa efetiva  $m_{\text{eff}}$ , dependente da densidade de matéria.



**Figura 2:** Regiões do espaço de parâmetro do *scalaron* em excluídas por testes em laboratório e astrofísicos. Partes do gráfico coloridas não são permitidas para partículas escalares com escala de energia característica  $\Lambda/MeV$  e massa efetiva  $M/M_{pl}$  excluam Retirado de [43]

- Essa dependência do contraste de densidade possui uma escala de interação  $\lambda \approx 1/m_{\text{eff}}$ . Podemos restringir a massa efetiva do campo escalar testando a gravitação em regiões de diferentes densidades.

Na Figura 2 estão ilustradas algumas regiões do espaço de parâmetros massa efetiva  $M/M_{pl}$  escala da energia  $\Lambda/MeV$  para o tipo de teoria dada por (28), com  $n = 1$ .

## 5 Testes cosmológicos e astrofísicos

De maneira bastante resumida, podemos dividir os testes de teorias de gravitação em dois pares de regimes: o regime de background (ou de fundo) e o regime perturbativo; e os testes com distâncias astrofísicas e distâncias cosmológicas. Testes de teorias da interação gravitacional datam ao menos do século 17 [44], com a gravitação universal e sua lei do inverso do quadrado da distância.

Como estamos dando enfoque a teorias escalar-tensoriais e  $f(R)$  revisaremos brevemente alguns resultados observacionais obtidos, nos regimes que a tecnologia atual nos permitiu acessar, sobre essas teorias. Referências padrão para modificações da gravidade, no estado da arte da época,

são, por exemplo [10, 11, 43]. Aqui, escolhemos três modos de testar essas teorias de gravitação: a física de pulsares de sistemas binários, o crescimento de estruturas no Universo, e a radiação cósmica de fundo.

### 5.1 Testes astrofísicos

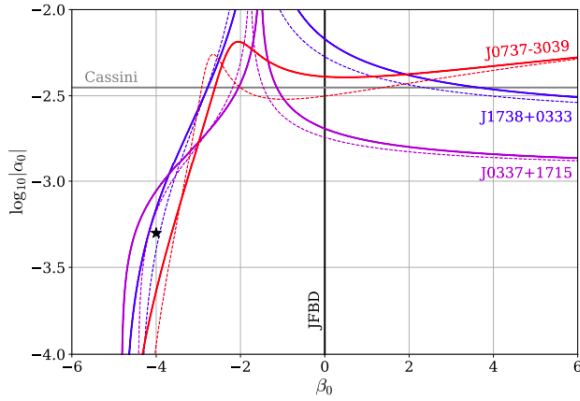
Como teste astrofísico de teorias escalar-tensoriais, podemos considerar a física de pulsares em sistemas binários. Para uma revisão de estrelas de nêutrons ver o artigo publicada na edição passada desse periódico [45]. Estrelas de nêutrons são objetos compactos com campo gravitacional intenso  $\phi/c^2 \sim 0.3$ , produzindo um ambiente de alta curvatura onde a teoria escalar-tensorial pode ser testada.

A dinâmica de um sistema binário é descrita pelos parâmetros keplerianos clássicos: o período orbital  $P_b$ , projeção do semi-eixo maior da órbita  $x = a \sin i$ , excentricidade  $e$ , longitude do periastro  $\omega$  e a época de passagem do periastro  $T_0$ . Na projeção do semi-eixo  $x$ , temos que  $a$  é o tamanho do eixo maior da elipse e  $i$  é o ângulo entre o plano orbital e o plano do céu, definido através de nossa linha de visão.

Porém como as estrelas de nêutrons são objetos relativísticos, a órbita do sistema não será descrita somente pelos parâmetros keplerianos. Podemos incluir os efeitos relativísticos por meio dos parâmetros pós-keplerianos, que permitem dentre outras coisas, a variação dos parâmetros clássicos. Os principais parâmetros pós-keplerianos são:  $\dot{P}_b$  variação do período orbital,  $\dot{\omega}$  avanço do periastro,  $\gamma$  fator relativístico que aparece no atraso de Einstein, além de  $r$  e  $s$ , relacionados ao atraso de Shapiro. Para detalhes desse formalismo ver [46, 47]

Teorias como a descrita pelo acoplamento não-mínimo (16), são conhecidas por modificar a estrutura de objetos compactos, como estrelas de nêutrons, pelo fenômeno da escalarização espontânea. Tal efeito consiste na ativação do campo escalar na presença da matéria da estrela. O campo assim entra como fonte de energia, e logo contribui para a massa da estrela, alterando suas propriedades globais.

Como exemplo de vínculo astrofísico, podemos considerar a teoria escalar-tensorial mais simples que apresenta a escalarização espontânea. Tal teoria é conhecida como Damour-Esposito-Farèse



**Figura 3:** Vínculo no espaço de parâmetros da teoria DEF devido a experimentos como o atraso de Shapiro medido pela nave Cassini e cronometragem de pulsares. Os valores permitidos para os parâmetros, que satisfazem os vínculos são aqueles abaixo das curvas. A teoria de brans dicke corresponde a linha vertical  $\beta_0 = 0$ . Retirado de [50]

(DEF) [48] e é caracterizada pelo acoplamento

$$F(\varphi) = e^{\xi\varphi^2}, \quad (49)$$

$$\alpha(\varphi) = -\xi\varphi. \quad (50)$$

Nessa teoria, o acoplamento entre o campo escalar e a matéria é descrito pela função  $\alpha(\varphi)$ . A teoria protótipo de Brans-Dicke é descrita por um acoplamento constante, independente do campo. Experimentos no regime pós-newtoniano e de cronometragem de pulsares, testam a estrutura perturbativa em ordem mais baixa do acoplamento. Assim, podemos expandir as funções em torno do valor cosmológico de fundo  $\varphi_\infty$ , como no formalismo PPN, e a teoria passa a depender efetivamente de dois parâmetros

$$\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_\infty) \quad (51)$$

$$\beta_0 \equiv \beta(\varphi_\infty), \quad (52)$$

onde  $\beta = \partial\alpha(\varphi)/\partial\varphi$ .

Essa teoria passou recentemente por um teste extremamente forte da cronometragem do pulsar duplo, sistema único para testes gravitacionais [49,50]. O resultado está ilustrado na Figura 3. Vemos que o teste com pulsares é de fato bem forte, restringindo o espaço de parâmetros e limitando o aparecimento da escalarização espontânea, de forma que a teoria vinculada se assemelha bastante à relatividade geral.

## 5.2 Testes Cosmológicos

### 5.2.1 Background

Podemos dividir os observáveis cosmológicos em nível de background e nível perturbativo. No regime de background, estudamos os observáveis relacionados ao Universo em média e nas maiores escalas: a densidade média de energia, a curvatura média e a distribuição de matéria média, por exemplo. Ambos os regimes lidam com escalas de curvatura de  $R = H^2 \approx 10^3$  km/s/Mpc, energias ordens de magnitudes inferiores ao regime de buracos negros e objetos compactos, como listados em 4. Nessas escalas, a relatividade geral nos diz que a dinâmica do Universo é muito bem descrita pelas duas equações de Friedmann [51],

$$H^2 = \frac{\kappa\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (53)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (54)$$

Encontramos, é claro, a constante cosmológica aqui. No regime do background, as teorias que buscam substituir essa constante podem ser entendidas como possuindo uma densidade e pressão efetivas  $\rho_{\text{eff}}, p_{\text{eff}}$ , que são funções de  $f(R)$  (ou, de maneira equivalente, do campo escalar e seu potencial) a partir da solução das equações de campo 30, e logo uma equação de estado efetivo  $\omega_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}/\rho_{\text{eff}}$ , de tal maneira que podemos escrever as equações de Friedmann modificadas como

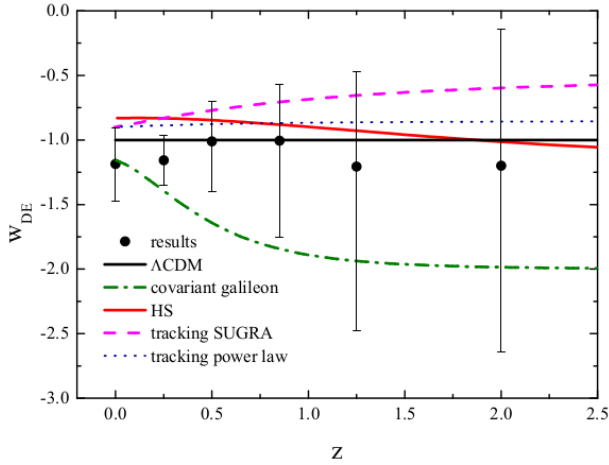
$$H^2 = \frac{\kappa(\rho + \rho_{\text{eff}})}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (55)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}[(\rho + \rho_{\text{eff}}) + 3(p + p_{\text{eff}})] + \frac{\Lambda}{3}. \quad (56)$$

A grande busca observacional da cosmologia nesse regime é determinar os parâmetros cosmológicos de matéria, curvatura e energia escura hoje,

$$\Omega_{i0} = \frac{\kappa\rho_i}{3H_0^2}.$$

A cosmologia observacional consegue restringir modelos a partir da observação da expansão do Universo e de seus diversos componentes energéticos, e o fato de que a constante cosmológica possui uma equação de estado constante  $\omega = -1$  é capaz de restringir fortemente teorias que possuam um  $\omega_{\text{eff}}$  variável, como as escalar tensoriais. A Figura 4 mostra resultados sobre  $\omega_{\text{eff}}$  obtidos a partir de dados do satélite WMAP, que observou a radiação cósmica de fundo, as compilações de



**Figura 4:** Comportamento de  $\omega_{\text{eff}}$  para diferentes modelos de gravidade modificada. A linha vermelha corresponde ao  $\omega_{\text{eff}}$  para o modelo 28. A linha preta constante é o modelo padrão da cosmologia; retirado de [52].

observação de supernovas Union, e dados sobre as oscilações acústicas bariônicas [52].

### 5.2.2 Perturbações

No regime perturbativo, buscamos entender o comportamento da interação gravitacional em estruturas de escalas da ordem de aglomerados de galáxias (ordem de Gpc) ou menores – aí já entrando no chamado regime não-linear, que não comentaremos aqui. Os Cadernos de Astronomia possuem uma excelente introdução à formação de estruturas cosmológicas e o regime perturbativo no artigo [53].

A ideia desse regime é estudar a formação de estruturas de matéria no Universo, para além da média total, visto que se o Universo fosse completamente homogêneo e isotrópico, como o modelo padrão assume nas maiores escalas, e como descrevem as equações (53), obtidas a partir da chamada métrica de Robertson-Walker [4].

A equação que guia a evolução das perturbações de matéria, que são as sementes das estruturas cósmicas, é a equação [53]

$$\ddot{\Delta} + 2H\dot{\Delta} - 4\pi G\rho_m = 0. \quad (57)$$

Essa equação dita o crescimento e evolução das estruturas cósmicas após a época do desacoplamento [4], e observáveis relacionados com a radiação cósmica de fundo, como o efeito Sachs-Wolfe Integrado, podem testar a sua validade.

De fato, o regime perturbativo é hoje entendido como o mais capaz de restringir e detectar

possíveis desvios da relatividade geral [11]. Futuras missões e satélites tem como objetivo importante mapear as escalas em que o Universo não pode ser mais descrito por um modelo homogêneo, com precisão inédita [54, 55], de modo a restringir maior os possíveis modelos que são capazes de descrever a evolução das estruturas.

Como discutido nos parágrafos que precedem 2, as propostas de Brans, Dicke e Dirac de tomar uma constante gravitacional  $G$  que varia com o tempo levou à ideia de um campo escalar acoplado à constante. Aqui vamos assumir que a constante gravitacional é função do tempo e das coordenadas espaço-temporais, e que depende da ação da teoria, definindo uma constante gravitacional efetiva  $G_{\text{eff}}(\vec{x}, t)$ . Um estudo completo das possíveis formas dessa função dentro do contexto de teorias escalar-tensoriais pode ser encontrado em [56].

A equação (57) então, se torna

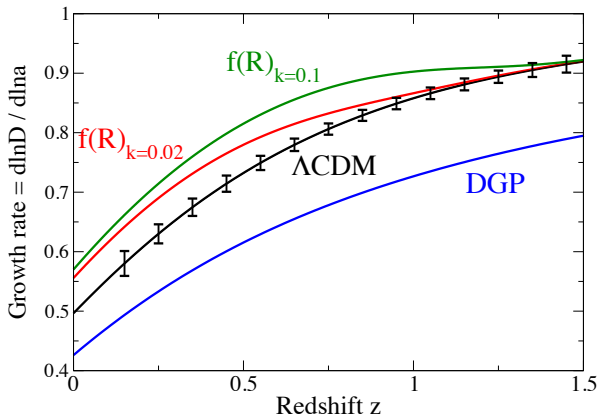
$$\ddot{\Delta} + 2H\dot{\Delta} - 4\pi G_{\text{eff}}(\vec{x}, t)\rho_m = 0. \quad (58)$$

O fato de que agora a evolução das estruturas cósmicas possui uma dependência no tempo cósmico  $t$  e nas escalas  $\vec{x}$  deve mudar a história de como os grandes objetos no Universo se formaram, tanto no seu ritmo de criação, que está associada à derivada  $d\Delta(z)/dz$ , em função do redshift, e a distribuição dos objetos em função da escala  $k$  em que observamos eles no céu,  $\Delta(k)$ . Na cosmologia, uma maneira de se quantificar ambas as quantidades é através da função de crescimento  $f(k, z)$ , definida por

$$f(k, z) \equiv \frac{d \ln \Delta}{d \ln a} = \frac{1}{(1+z)\Delta} \frac{d\Delta}{dz}(z, k). \quad (59)$$

A função de crescimento, grosso modo, mede a quantidade de estruturas sendo formados por quantidade de estruturas já existentes. Explorar a distribuição de objetos em diversos redshifts é fundamental para restringir a forma dessa função, e logo as teorias gravitacionais possíveis [11, 57]. Usualmente, essa função é associada a uma escala específica, medida em 8 Gpc, que é onde define-se o chamado valor eficaz (ou, em inglês, *root mean square*)  $\sigma_M$  de aglomeração de estruturas [58], definido como  $f\sigma_8 \equiv f(z, k) \cdot \sigma_M(k = 8 \text{ Mpc}, z = 0)$

Na Figura 5 podemos ver o gráfico da função de crescimento para diversos modelos de gravitação, como descritos na legenda, enquanto que na Figura 6 vemos uma compilação recente de dados



**Figura 5:** A função de crescimento para diferentes modelos, em diferentes escalas, plotada. As curvas verde e vermelha correspondem ao modelo exponencial de 29, em diferentes escalas  $k$ , enquanto que a linha preta corresponde ao modelo de concordância. A linha azul é do modelo DGP, que não é uma teoria escalar tensorial. Retirado de [57]

do observável [59], comparando o modelo padrão cosmológico com modelos com  $G_{\text{eff}}$  parametrizado.

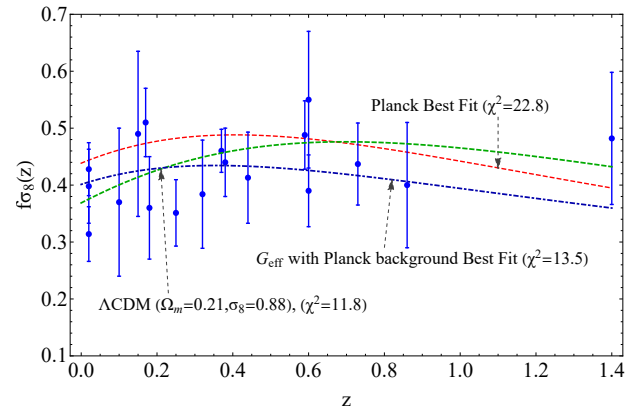
A busca por observações nesse regime, mais precisas e em maiores intervalos de redshift, é um dos grandes objetivos da cosmologia observacional moderna [11, 57].

## 6 Conclusões

Como vimos, a relatividade geral ainda é nossa principal teoria gravitacional para explicar fenômenos astrofísicos e cosmológicos. Desde sua formulação original, há mais de um século, a teoria passou com louvor por todos os testes ao qual foi submetida.

Porém, fundamentalmente, a teoria está incompleta, uma vez que não leva em conta a descrição quântica do mundo físico. Assim, teorias alternativas à RG se proliferaram na tentativa de superar suas incompletudes. Em particular, teorias escalar-tensoriais e  $f(R)$  constituem grande fonte de pesquisa atual nessa área.

Hoje, com os avanços tecnológicos, é possível realizar uma série de testes extremamente precisos dos fenômenos gravitacionais astrofísicos e cosmológicos. Em particular, a detecção de ondas gravitacionais e a cronometragem de pulsares, do lado astrofísico; e dos grandes surveys e a medição altamente precisa da radiação cósmica de fundo do lado cosmológico.



**Figura 6:** A função de crescimento escalonada pelo valor eficaz em  $8Mpc$ , a escala característica de observações de homogeneidade do Universo. As linhas tracejadas vermelha e verde são as do modelo cosmológico padrão, com parâmetros dados pelo Planck e pelos descritos na figura. A linha azul corresponde a um modelo com  $G_{\text{eff}}$  parametrizado por teorias escalar-tensoriais, como descrito em [59]. Retirado de [59]

Aqui, exploramos de forma geral, à guisa de revisão, teorias escalares-tensoriais e  $f(R)$ . Discutimos sua formulação básica, com alguns exemplos concretos e sua equivalência. Exploramos também alguns vínculos fortes que são colocados no espaço de parâmetros dessas teorias por meio de experimentos atuais, e quais observáveis e experimentos no futuro podem vir a restringir o espaço de teorias possíveis, principalmente dentro da cosmologia.

Ainda chamamos hoje a relatividade geral de “teoria padrão” da gravitação. No futuro, novos testes levarão a teoria ao seu limite experimental e é possível que detectemos desvios, tanto na astrofísica extrema de objetos compactos, como estrela de nêutrons e buracos negros, quanto em observações cosmológicas, como já observamos o efeito na expansão do Universo vindo da constante cosmológica. Precisamos assim, estar suficientemente maduros no estudo da fenomenologia de teorias alternativas para sabermos interpretar possíveis resultados além do escopo de previsões da RG.

## Sobre o autor

Pedro Bessa ([pedvbessa@gmail.com](mailto:pedvbessa@gmail.com)) é Mestre em Física pelo Observatório Nacional (RJ) e, atualmente, estudante de doutorado em física no PPGCosmo (UFES), com bolsa da Fundação de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo (FAPES).

Sua pesquisa tem foco em cosmologia e teorias de gravitação.

Túlio Ottoni ([tulioottoni.cosmoufes@gmail.com](mailto:tulioottoni.cosmoufes@gmail.com)) é Mestre em Física pela Universidade Federal Fluminense (UFF) e atualmente cursa o doutorado em física no PPGCosmo (UFES). É também professor substituto do Curso de Astronomia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), sediado no Observatório do Valongo. Sua pesquisa tem foco em objetos astrofísicos compactos e gravitação.

### Referências

- [1] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, 2018), 2 ed.
- [2] C. M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, *Living Reviews in Relativity* **5**, 1 (2006). [ArXiv: arXiv:1403.7377v1](https://arxiv.org/abs/1403.7377v1).
- [3] E. Poisson e C. M. Will, *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic* (Cambridge University Press, 2014).
- [4] O. F. Piattella, *Introdução à relatividade geral*, *Cadernos de Astronomia* **1**(1), 30 (2020).
- [5] J. D. Toniato, *De newton a einstein: a geometrização da gravitação*, *Cadernos de Astronomia* **1**(1), 17 (2020).
- [6] M. H. Goroff e A. Sagnotti, *The ultraviolet behavior of einstein gravity*, *Nuclear Physics B* **266**(3), 709 (1986).
- [7] R. P. Feynman, F. B. Morinigo e W. G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation* (Addison-Wesley, 1999).
- [8] I. L. Buchbinder e I. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity* (Oxford University Press, 2021).
- [9] A. G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *The Astronomical Journal* **116**(3), 1009 (1998).
- [10] T. Clifton et al., *Modified gravity and cosmology*, *Physics Reports* **513**(1-3), 1 (2012).
- [11] P. G. Ferreira, *Cosmological tests of gravity*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **57**(1), 335 (2019).
- [12] A. Joyce et al., *Beyond the cosmological standard model*, *Physics Reports* **568**, 1 (2015).
- [13] M. Peskin e D. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* (Westview Press, New York, 1995).
- [14] C. Brans e R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [15] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität Gravitation and electricity*, *Sitz. Kön. Preuss. Akad. Wiss* **1918**, 465 (1918).
- [16] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, 1980).
- [17] J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1 (Cambridge University Press, 1998).
- [18] P. A. M. Dirac, *The Cosmological Constants*, *Nature* **139**(3512), 323 (1937).
- [19] R. P. Woodard, *The Theorem of Ostrogradsky*, Tech. rep. (2015). [ArXiv:1506.02210v2](https://arxiv.org/abs/1506.02210v2).
- [20] R. M. Wald, *General relativity* (Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984).
- [21] T. Sotiriou, V. Faraoni e S. Liberati, *Theory of gravitation theories: A no-progress report*, *International Journal of Modern Physics D* **17** (2007).
- [22] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1982).
- [23] V. Faraoni, *Nonminimal coupling of the scalar field and inflation*, *Phys. Rev. D* **53**, 6813 (1996).
- [24] V. Faraoni, *A crucial ingredient of inflation*, *Int. J. Theor. Phys.* **40**(12), 2259 (2001).
- [25] R. F. P. Mendes e N. Ortiz, *Highly compact neutron stars in scalar-tensor theories*

- of gravity: Spontaneous scalarization versus gravitational collapse*, *Phys. Rev. D* **93**, 124035 (2016).
- [26] R. F. P. Mendes e T. Ottoni, *Scalar charges and pulsar-timing observables in the presence of nonminimally coupled scalar fields*, *Phys. Rev. D* **99**, 124003 (2019).
- [27] G. Esposito-Farèse e D. Polarski, *Scalar-tensor gravity in an accelerating universe*, *Physical Review D* **63** (2000).
- [28] B. Bertotti, L. Iess e P. Tortora, *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, *Nature* **425**(6956), 374 (2003).
- [29] A. K. Verma et al., *Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity*, *Astron. Astrophys.* **561**, 1 (2014). [ArXiv:1306.5569](#).
- [30] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, *Physics Letters B* **91**(1), 99 (1980).
- [31] T. P. Sotiriou e V. Faraoni,  *$f(R)$  theories of gravity*, *Reviews of Modern Physics* **82**(1), 451 (2010).
- [32] A. Dolgov e M. Kawasaki, *Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?*, *Physics Letters B* **573**, 1 (2003).
- [33] I. L. Buchbinder, I. L. Shapiro e S. D. Odintsov, *Effective Action in Quantum Gravity* (Bristol, 1992).
- [34] W. Hu e I. Sawicki, *Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests*, *Physical Review D* (2007). [ArXiv:0705.1158](#).
- [35] E. V. Linder, *Exponential gravity*, *Physical Review D* **80**(12) (2009).
- [36] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Mechanics, Third Edition: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)* (Butterworth-Heinemann, 1976), 3 ed.
- [37] T. P. Sotiriou, S. Liberati e V. Faraoni, *Theory of gravitation theories: A no-progress report*, *International Journal of Modern Physics D* **17**(03n04), 399 (2008).
- [38] I. Alani e O. P. Santillán, *Cosmological singularity theorems for  $f(R)$  gravity theories*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016**(05), 023 (2016).
- [39] J. Khoury e A. Weltman, *Chameleon Cosmology*, *Physical Review D* **69**, 044026 (2003). [ArXiv:0309411](#).
- [40] J. Khoury e A. Weltman, *Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171104 (2004).
- [41] K. Hinterbichler et al., *Symmetron cosmology*, *Physical Review D* **84**(10) (2011).
- [42] A. Vainshtein, *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, *Physics Letters B* **39**(3), 393 (1972).
- [43] C. Burrage e J. Sakstein, *Tests of chameleon gravity*, *Living Reviews in Relativity* **21**(1) (2018).
- [44] C. Misner, *Gravitation* (Princeton University Press, Princeton, N.J, 2017).
- [45] R. F. P. Mendes, *Estrelas de nêutrons e seus múltiplos mensageiros*, *Cadernos de Astronomia* **2**(2), 58 (2021).
- [46] I. H. Stairs, *Testing general relativity with pulsar timing*, *Living Rev. Relativ.* **6**(1), 5 (2003).
- [47] N. Wex, *Testing Relativistic Gravity with Radio Pulsars*, in *Frontiers in Relativistic Celestial Mechanics*, editado por S. M. Kopeikin (De Gruyter, Berlim, 2014), vol. 2, 39.
- [48] T. Damour e G. Esposito-farese, *Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation*, *Phys. Rev. Lett.* **70**(15), 2 (1993).
- [49] M. Kramer e N. Wex, *The double pulsar system: A unique laboratory for gravity*, *Class. Quantum Gravity* **26**(7) (2009).
- [50] M. Kramer et al., *Strong-field gravity tests with the double pulsar*, *Phys. Rev. X* **11**, 041050 (2021).
- [51] O. Piattella, *Lecture Notes in Cosmology* (Springer International Publishing, 2018).

- [52] N. Said et al., *New constraints on the dark energy equation of state*, *Physical Review D* **88**(4) (2013).
- [53] H. Velten, *Matéria escura e as estruturas cósmicas*, *Cadernos de Astronomia* **2**(1), 58 (2021).
- [54] M. Martinelli et al., *Constraining modified gravitational theories by weak lensing with Euclid*, *Physical Review D* **83**(2) (2011).
- [55] G.-B. Zhao et al., *Model-independent constraints on dark energy and modified gravity with the SKA* (2015). [ArXiv:1501.03840](https://arxiv.org/abs/1501.03840).
- [56] S. Tsujikawa, *Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy*, *Physical Review D* **76**(2) (2007).
- [57] D. Huterer et al., *Growth of cosmic structure: Probing dark energy beyond expansion*, *Astroparticle Physics* **63**, 23 (2015).
- [58] P. Coles, *Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure* (John Wiley, Chichester, Eng, 2002).
- [59] S. Nesseris, G. Pantazis e L. Perivolaropoulos, *Tension and constraints on modified gravity parametrizations of  $G_{eff}(z)$  from growth rate and Planck data*, *Physical Review D* **96**(2) (2017).