

Perturbações seculares nas órbitas de Júpiter e Saturno

Luís Pedro Orosz

Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo

A atração gravitacional mútua entre os planetas do sistema solar provocam alterações nas suas órbitas que seriam perfeitamente elípticas se os planetas estivessem sujeitos somente sob a ação gravitacional do Sol. Essas alterações nas órbitas podem ser de períodos relativamente curtos (alguns anos) ao final dos quais os planetas voltam ao seu estado anterior. Podem também ter um efeito cumulativo alterando pouco a pouco as órbitas ao longo de anos ou séculos seguidos modificando completamente a órbita original ou retornando ao estado inicial depois de vários séculos. Essas são as mais interessantes de se analisar e são chamadas de perturbações seculares. Nesse texto se analisa o caso mais aparente desse fenômeno é a interação gravitacional entre Júpiter e Saturno. Alterações significativas foram detectadas pelo astrônomo Halley em 1695, e naquela época nenhuma justificativa razoável à luz da lei da gravitação universal foi encontrada, chegando a se duvidar da validade dessa lei. O problema foi solucionado quase 100 anos depois por Laplace. Esse texto é uma análise do artigo de Laplace *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, de 1787, e seus desdobramentos posteriores.

Abstract

The mutual gravitational attraction between the planets of the Solar System causes changes in their orbits that would be perfectly elliptical if the planets were subject only to the gravitational action of the Sun. These changes in orbits can be relatively short periods (a few years) at the end of which the planets return to their previous state. They can also have a cumulative effect by gradually changing orbits over years or centuries in a row, completely modifying the original orbit, or returning to the initial state after several centuries. These are the most interesting to analyze and are called Secular Disturbances. This text analyzes the most apparent case of this phenomenon: the gravitational interaction between Jupiter and Saturn. Significant alterations were detected by the astronomer Halley in 1695, and at that time no reasonable justification in light of the law of universal gravitation was found, leading to doubts on the validity of this law. The problem was solved almost 100 years later by Laplace. This text is an analysis of Laplace's article *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, from 1787, and its later developments.

Palavras-chave: Laplace, mecânica celeste, órbitas.

Keywords: Laplace, celestial mechanics, orbits.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v3n2.38486](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v3n2.38486)

1 Introdução

O movimento irregular dos planetas em contraste com o movimento circular das estrelas, desde a antiguidade sempre causou estranheza nos observadores do céu. A escola de Platão considerava o movimento circular como sendo perfeito e entendia que os movimentos irregulares dos planetas seriam aparentes e que de algum modo deveriam ser explicados através de movimentos circulares. Apollonius e Ptolomeu através da chamada teoria dos epiciclos deram uma explicação nessa linha de pensamento. Os movimentos seriam obtidos através de uma série de movimentos circulares concatenados um com os ou-

tros: um círculo circulando sobre outro. Apesar da complexidade, essa linha de pensamento perdurou até o século XVII, com aproximações cada vez mais precisas. Ptolomeu usou também esse procedimento na sua obra *Almagesto*, com sucesso. Outro fato a destacar é a descoberta através desse processo de uma família interessante de novas curvas: algumas algébricas (polinomiais) e outras transcendentais (não polinomiais). Descobertas interessantes para os matemáticos [1]. O passo seguinte nesse contexto foi a descoberta do movimento elíptico dos planetas e outros invariantes, as chamadas leis de Kepler. Estas deram uma visão bem simples dos movimentos planetá-

rios. Vale destacar que Kepler chegou nas suas conhecidas leis através da interpretação de dados astronômicos catalogados pelo astrônomo Tycho Brahe durante 20 anos. O próprio Kepler analisou e concluiu suas leis depois de 25 anos de estudo.

A obra de Newton com a lei da gravitação universal, sem dúvida uma das maiores descobertas da ciência em todos os tempos, completou praticamente o ciclo de conhecimento dessa questão, uma vez que explicava e deduzia as leis de Kepler de um modo preciso e rigoroso. Teoria e experimentos andando juntos e de acordo. Sua obra *Principia* foi publicada em 1687. A publicação dessa obra entretanto teve um desenrolar dramático até a sua versão final. Newton submeteu o seu trabalho à Royal Society and Cambridge University Press para publicação e sua solicitação foi recusada. Após sete anos, período o qual Newton se dedicou a outras atividades irrelevantes, o astrônomo Halley, tomando conhecimento da importância do trabalho de Newton, se empenhou para que o mesmo fosse publicado. Newton teve que refazer todo trabalho e teve dificuldade para isso. Depois de dezoito meses de trabalho incessante surge finalmente a obra *Principia*. Porém a história ainda não termina aí. Halley teve que empenhar uma soma razoável em dinheiro para cobrir um possível fracasso na publicação.

Teoria e experimentos caminhado juntos como já registrei. Não demorou muito, entretanto para surgir problemas: a lei dos quadrados inversos das distâncias funcionava bem num problema de dois corpos (Sol e planeta). Quando porém se considerou a questão envolvendo três ou mais corpos problemas surgiram. O mais famoso deles se relacionava com os planetas Júpiter e Saturno. Esse problema ficou conhecido como o problema das variações seculares de Júpiter e Saturno.

O problema surgiu a partir de observações de dados astronômicos feitas pelo astrônomo Halley em 1695. Ele observou o seguinte: Júpiter ao longo dos séculos apresenta uma aceleração no seu movimento ao redor do Sol fazendo com que sua órbita se espirale em direção ao Sol. Ao mesmo tempo Saturno apresenta nas mesmas condições uma desaceleração no seu movimento fazendo com que sua órbita se afaste do Sol. A permanecerem essas tendências era de se esperar que Júpiter acabasse sendo projetado no Sol e Saturno escapando do sistema solar. Observo que

se tal fenômeno ocorresse seriam necessários vários séculos ou milênios para se concretizar mas era o que indicava as observações preliminares.

Como explicar esses comportamentos à luz da lei de gravitação? Halley apresentou esse problema para o próprio Newton, que tentou sem sucesso dar uma explicação de natureza geométrica, sem sucesso. Euler e Lagrange tentaram de forma independente solucionar o problema com conclusões contraditórias entre si e insatisfatórias. O próprio Newton chegou admitir que a sua lei da gravitação universal tinha exceções. A questão foi finalmente resolvida por Laplace.

O artigo intitulado *Mémoire Sur les Inégalités Séculaires des Planètes et. Des Satellites*, publicado em 1787 [2], cem anos após a publicação do *Principia* de Newton, explicava de forma rigorosa que o fenômeno era de fato uma consequência da lei da gravitação universal de Newton, comprovando portanto a sua validade universal. Nesse contexto a destacar o seguinte: a ação gravitacional mútua entre os planetas produzem perturbações em suas órbitas elípticas. Algumas dessas perturbações são periódicas, de períodos relativamente curtos e os planetas voltam as suas órbitas originais após alguns anos.

Outras perturbações gravitacionais entretanto são cumulativas. As órbitas sofrem pequenas alterações com o passar dos anos. Essas alterações se somam ao longo dos anos e dos séculos. Elas podem alterar completamente a órbita de um planeta ao ponto do planeta ser projetado no Sol escapar do sistema solar ou ainda chocar com outro planeta. Laplace entretanto mostra que na maioria dos casos ou pelo menos nos casos em que as frequências de dois planetas são incomensuráveis o que sucede é que essas perturbações são periódicas; de períodos que duram séculos; ao final dos quais as órbitas voltam a sua posição original. Daí é que vem a denominação “perturbações seculares dos planetas e satélites”.

A natureza e relevância histórica desse problema despertou meu interesse em estudar o citado artigo de Laplace. O texto presente é uma análise desse artigo e seus desdobramentos posteriores.

2 Considerações preliminares de Laplace

As seguintes observações foram fundamentais para direcionar o trabalho do autor.

1. Os planetas e seus satélites mantêm a mesma distância média ao Sol principalmente, quando as suas interações mutuas são incomensuráveis (isto é a relação entre suas frequências não é dada por números inteiros).
2. Se considerarmos um período longo a soma das massas dos planetas dividido pelos eixos principais de suas órbitas permanecem constante. Isso pode indicar que a aceleração de um planeta deve ser compensada pela desaceleração de um outro.
3. O movimento de Júpiter e Saturno são próximos de comensuráveis na proporção de 2 para 5. A aceleração de Júpiter ao longo dos anos seria $6^{\circ} 9'$ e a desaceleração de Saturno $16^{\circ} 7'$.
4. Comparações feitas em longos intervalos apresentam uma diminuição da velocidade de Júpiter e um aumento da velocidade de Saturno. Destaco aqui que estudos desse fenômeno baseado em observações realizadas ao longo de poucos séculos induziram a conclusões erradas. Ou seja para se ter uma real dimensão do fenômeno muito séculos de observações são necessários.

Laplace então relata o seguinte.

“Ao fazer a aproximação dos movimentos de Júpiter e Saturno até a terceira potência incluindo excentricidade e inclinação das órbitas não encontrei qualquer alteração significativa. Entretanto é impossível não reconhecer essas alterações nas medições feitas na prática.”¹

Ou seja, a teoria não está se ajustando com a prática. Alguns estudiosos a partir desse dado concluíram equivocadamente que as referidas alterações não teriam relação com a gravitação.

A partir desse conjunto de observações Laplace conjectura que: Por trás dessas variações observadas deve haver uma Perturbação Secular Periódica, que justifiquem essas aparentes discrepâncias. As órbitas em questão sofrem um longo período de perturbações mas devem retornar as condições iniciais ao final desse período como a análise ao longo de muitos séculos estariam indicando. A hipótese do planeta Júpiter se projetar no Sol ou a de Saturno escapar do Sistema Solar

¹Tradução livre do autor.

a princípio deveria ser descartada. A explicação a ser dada seria através de Lei da Gravitação aumentando a potencia do grau na solução aproximada.

Nas palavras de Laplace:

“ A probabilidade dessas considerações serem a causa do fenômeno em questão me motivaram a empreender um longo e penoso cálculo (a partir das equações diferenciais correspondentes), necessário para confirmar minha conjectura.”²

As equações diferenciais são aquelas obtidas a partir da lei dos quadrados inverso das distâncias. Laplace faz uso de fatos oriundos dessa lei como por exemplo as leis de Kepler.

Em outras palavras o caminho seria, partindo das equações diferenciais dos movimentos de Júpiter e Saturno no sistema de três corpos (Sol, Júpiter e Saturno), adequar a teoria com os resultados práticos. Os cálculos desenvolvidos pelo autor (usando as suas próprias palavras) são extensivos e penosos. Não tem como detalhá-los aqui. Creio que um projeto interessante fosse envolver uma equipe de bons alunos de cálculo para conferir os mesmos, incluindo também observações práticas para tornar o processo menos árido, mas bastante interessante.

3 Sobre as equações dos movimentos de Júpiter e Saturno

Laplace estabelece 6 equações diferenciais: 3 para o movimento de Júpiter, 3 para o movimento de Saturno, fazendo uso da lei dos quadrados inversos de Newton.

Cada equação se refere a componente da força na direção de um dos eixos coordenados x, y, z preestabelecidos, de modo que o Sol fica fixo no sistema de coordenadas. O Sol com massa unitária. Para resultados gerais aplicados a qualquer planeta ou satélites são usadas as letras m e m' , para massa de cada planeta ou satélite envolvido. No caso específico de Júpiter e Saturno o valor de m e m' serão respectivamente: $1/1067$ e $1/3358$.

Tendo em mãos essas equações e na impossibilidade de apresentar uma solução exata o caminho é obter informações sobre a solução (propriedades), comparando com os dados experimentais, fazendo tentativas e ajustes. É nisso tudo que

²Tradução livre do autor.

está a habilidade do autor. Para o leitor do texto é impossível diante de tantas manipulações de fórmulas entender o porquê de tudo aqui, o que só fica claro no final daquela etapa.

A estratégia empregada entretanto é clara: como a massa do Sol é muito maior do que a dos planetas o movimento elíptico é predominante, sendo afetado com o passar dos anos pelas interações entre planetas. A partir daí e através de algumas simulações a busca é por invariantes ou seja propriedades da órbita elíptica que não se alteram e por propriedades que são de fato afetadas e seus efeitos. Não menos importante é obter uma solução aproximada dos movimentos.

4 Resultados

O eixo maior da elipse não sofre perturbações periódicas seculares relevantes: ele oscila levemente em torno de um valor médio. É, portanto, um invariante importante.

O vetor que liga o centro do sol ao centro da elipse é chamado de vetor de Laplace. Esse vetor não é um invariante. Ele executa movimentos periódicos leves e também movimentos seculares. Essa é uma descoberta importante. As variações seculares desse vetor são pequenas mas cumulativas. Elas alteram a excentricidade de elipse, uma vez que o eixo maior se mantém constante. Com isso a órbita se aproxima de um círculo quando a excentricidade aumenta e se torna mais achatada quando a excentricidade diminui. A análise que Laplace faz das perturbações seculares em geral se baseia essencialmente nesses dois resultados ou seja que o vetor de Laplace tem variação aparente e cumulativa enquanto o eixo maior da elipse permanece quase fixo. Seria interessante registrar mas não disponho do valor máximo e mínimo da excentricidade de cada planeta para se ter uma ideia da suas variações ocasionadas pela interação entre eles. Esse resultado válido em geral para planetas e satélites é conhecido hoje como teorema de Laplace. Tem algumas outras consequências aparentes e interessantes; uma delas é a seguinte: o movimento do vetor de Laplace no caso da nossa Terra pode, segundo V. I. Arnold, ser um dos fatores responsáveis pela Era do Gelo [3]. Essa hipótese se fundamenta na coincidência do período de duração dos dois fenômenos e no seguinte argumento: quando a excentricidade da órbita da Terra aumenta, o tempo que

a Terra permanece próxima ao Sol diminui, enquanto que o tempo que fica distante aumenta em função da Lei das Áreas de Kepler, de modo que o clima se torna mais frio. A grandeza desse efeito é calculada com precisão. Seria igualmente interessante mas não disponho dos valores máximos e mínimos da excentricidade da Terra e da Lua.

Continuando a análise de Júpiter e Saturno, Laplace determina o período de perturbação gravitacional entre esses dois planetas como sendo 877 anos valor depois ajustado para 929 anos. Ele faz uso constante de resultados oriundos da Lei de Gravitacão. Ao final desse período os planetas voltam a posição inicial. Segundo os cálculos e observações registradas em vários datas diferentes a aceleração de Júpiter e desaceleração de Saturno atingiu o auge por volta de 1580. A partir desse ano começou o processo inverso.

A considerar aqui o seguinte o movimento diário de Júpiter e Saturno ao redor do sol é aproximadamente 299 e 120,5 segundos de arco respectivamente. Esses valores são próximos de comensuráveis ou seja: o valor $2w(1) - 5w(2)$, onde $w(1)$ e $w(2)$ são as frequências dos respectivos planetas é próxima de zero e muito pequeno em relação a $w(1)$ e $w(2)$. Esse fator no desenvolvimento em série da solução aparece no denominador complicando a análise e limitando a validade da solução a um intervalo de tempo finito. Esse é o fator responsável pelas pequenas mas cumulativas perturbações que duram séculos.

No caso de frequências comensuráveis um denominador do tipo anterior se anula induzindo a séries divergentes, impedindo qualquer informação sobre o movimento. Caso interessante comentado no artigo se refere a três satélites de Júpiter: o movimento da primeiro é cerca de duas vezes o do segundo que por sua vez duas vezes o do terceiro. Essa razão próxima de dois tem como consequência a quase impossibilidade de haver uma eclipse simultânea dos três planetas. Baseado nas tabelas disponíveis na época seriam necessários 1.317.900 anos para que isso ocorresse. Como as equações diferenciais dos movimentos de Júpiter e Saturno não permitem uma solução exata, a solução aproximada conseguida através de ajustes e comprovações realizadas com rigor (no caso o autor fala em 24 medições em situações convenientes), a solução tem um intervalo de validade finita: 1.200 para futuro e 1.000 para passado.

Hoje com o auxílio do computador rapidamente se prevê os movimentos em intervalos da ordem de 10.000 anos. O computador é bom para prever resultados, mas para analisar o movimento para um intervalo ilimitado na direção do futuro ou do passado ele não fornece resposta. Para esse fim pesquisas de natureza qualitativa das órbitas foram desenvolvidas, para responder perguntas, por exemplo do tipo: em tal situação específica a órbita é fechada? Resultados profundos foram conseguidos por nomes como: Kolmogorov, Arnold e Moser.

Laplace aproveita ainda todo o desenvolvimento efetuado para tratar do problema Júpiter-Saturno para solucionar um outro problema do gênero envolvendo agora o sistema Lua-Sol-Terra. Aqui é interessante reproduzir as palavras do próprio Laplace:

“Permanecia ainda um outro fenômeno celeste: a aceleração média da Lua que não pudemos até então reduzir às leis da gravidade. Os astrônomos que trataram desse problema concluíram que essa aceleração não poderia ser oriunda da gravitação. Para explicá-la recorreram a várias hipóteses, como resistência do Éter, transmissão sucessiva da gravidade, ação dos cometas, etc. Depois de várias tentativas, finalmente consegui descobrir a verdadeira causa desse fenômeno. Descobri que a equação secular da Lua resulta da ação do Sol sobre o satélite, combinada com a variação da excentricidade da órbita da Terra. É periódica e depende dos mesmos argumentos que o quadrado desta excentricidade. Quando a excentricidade diminui como tem ocorrido constantemente desde as observações mais antigas o movimento médio da Lua aumenta e diminui no caso contrário. Esta teoria concorda exatamente com as observações mais antigas e assim completa a universalidade da Lei de Gravitação da qual todos os fenômenos celestes contribuem sem exceção para mostrar a verdade”.³

Interessante como era o pensamento na época em que a existência de um éter fazia parte dos conceitos da física.

³Tradução livre do autor.

5 Conclusão final

Laplace foi quem introduziu o termo “mecânica celeste”. O seu trabalho nessa área culminou com a sua monumental obra *Traite de mécanique céleste*, publicada em 5 volumes entre 1799 e 1825. As pesquisas de Laplace foram retomadas anos depois por Poincaré. Ele desenvolveu uma série de outros métodos para calcular as perturbações nos movimentos de corpos celestes. Esses métodos estão registrados na sua obra *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.

A registrar aqui também que esses novos métodos continuam a se confrontar com séries divergentes e as soluções continuam valendo num intervalo de tempo limitado, e como referi acima métodos qualitativos foram posteriormente desenvolvidos [3, 4]. Interessante a destacar que as considerações geométricas de Newton para explicar as alterações nos movimentos de Júpiter e Saturno são usadas para estudar esses métodos. Laplace entendeu seus resultados como uma confirmação da lei de gravitação universal de Newton. Hoje em dia ninguém duvida disso.

Suas descobertas também levaram-no ainda a concluir que o sistema solar é estável. Entretanto os anos seguintes vieram mostrar que essa questão é bem mais delicada e aparentemente ainda em aberto.

Agradecimentos

A Sandra Mara Adami, secretária do CCE/UFES pela cuidadosa digitalização do texto. A Elizabete Grigorio e a equipe de trabalho da Biblioteca da UFES, pelo competente trabalho de localizar e disponibilizar para mim o artigo de Laplace de 1787. A Júlio C. Fabris, do Departamento de Física da UFES, por comentários e sugestões.

Sobre o autor

Luiz Pedro Orosz (lp.orosz.vix@gmail.com) é professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo desde 1975. Sua formação acadêmica inclui Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Rio Claro (SP) em 1972, Mestrado em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (RJ) em 1975 e

Doutorado em Matemática pela Rice University (EUA) em 1982.

de l'Académie Royale des Sciences de Paris 49–92 (1787).

Referências

- [1] R. Tarnas, *A epopéia do pensamento ocidental* (Bertrand Brasil, 1999).
- [2] P. S. Laplace, *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, Mémoires

- [3] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics* (Springer, Nova York, 1978).
- [4] J. Stillwell, *Mathematics and its history* (Springer, Nova York, 2010), 3^a ed.