

As soluções de buraco negro: 1916-1965

Carla Rodrigues Almeida

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Resumo

Historicamente, as primeiras soluções da relatividade geral não foram reconhecidas como soluções de buracos negros. Elas foram, a princípio, idealizadas para descrever o campo gravitacional de objetos massivos esfericamente simétricos, como o Sol ou o elétron. Neste artigo, vamos apresentar as soluções de buracos negros em seu contexto histórico e mostrar como a nossa compreensão sobre o universo mudou à medida que desvendamos propriedades fundamentais sobre estes campos gravitacionais. O objetivo é apresentar uma introdução histórica sobre a relatividade geral e buracos negros, focada na teoria de gravitação e suas interpretações, como apoio didático para aqueles que pretendem iniciar os estudos sobre o tema.

Abstract

Historically, general relativity's first solutions were not recognized as black-holes solutions. They were, *a priori*, derived to describe the gravitational field of a spherically symmetric massive objects, such as the Sun or an electron. In this paper, I present the black-hole solutions in their historical context, revealing how our understanding of the universe has changed as we discovered fundamental properties of these gravitational fields. My goal is to present a historical introduction to general relativity and black holes, focusing on the theory of gravitation and its interpretations, as didactic support for those who want to initiate their studies on the subject.

Palavras-chave: estrelas invisíveis, massas pontuais, buracos negros, Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr, Newman, extensões analíticas

Keywords: invisible stars, *Massenpunktes*, black hole, Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr, Newman, analytical extensions

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v4n1.39861](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v4n1.39861)

1 Introdução

Na teoria da relatividade geral existem quatro soluções diferentes para as equações de campo de Einstein que descrevem buracos negros. As soluções de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman descrevem buracos negros estáticos, carregados, em rotação e com rotação e carga, respectivamente. No entanto, elas não foram identificadas inicialmente como soluções de buracos negros. A ideia de que objetos como os buracos negros existissem na natureza era considerada absurda. O intuito primário de tais soluções era estudar o campo gravitacional de objetos esfericamente simétricos, como o Sol e o elétron, por exemplo. Para isto, estes sistemas foram idealizados a fim de facilitar a obtenção de soluções analíticas da relatividade geral. O Sol foi tratado como uma massa puntual, desconsiderando-se suas dimensões. O exemplo clássico nos artigos originais de massa puntual carregada foi o

elétron, porém suas propriedades quânticas também foram ignoradas e a simplificação do campo gravitacional considerava apenas as propriedades elétricas deste. Ainda assim, aos poucos os físicos e matemáticos desvendaram propriedades importantes destas soluções que nos levaram a uma melhor compreensão do nosso próprio universo. Neste artigo, vamos apresentar em seu contexto histórico as soluções que hoje sabemos que descrevem buracos negros, buscando entender como o conhecimento sobre estes objetos foi construído e, em particular, como a visão Newtoniana do universo foi dando lugar à interpretação relativística do espaço-tempo.

A teoria da gravitação de Albert Einstein traz uma interpretação bem diferente do universo em comparação à teoria da gravitação universal de Isaac Newton. Para começar, a relatividade geral (RG), como a teoria de Einstein ficou conhecida, redesenhou o universo como uma versão quadridi-

mensional de um metafórico tecido cósmico que é deformado pela matéria. Ela se opõe à perspectiva tridimensional Newtoniana, que separa o espaço do tempo, sendo este último uma componente externa que provê a evolução do universo. Esta foi uma revolução comparável à Copernicana, quando a Terra deixou de ser o centro do cosmo. Assim como aconteceu com Copérnico, a teoria de Einstein não foi imediatamente adotada após sua formulação em 1915 [1]. O pensamento Newtoniano permaneceu forte por várias décadas.

Algum século antes de Einstein, Johannes Kepler havia proposto três leis do movimento planetário ao redor do Sol, baseando-se nos dados observacionais de Tycho Brahe. Neste modelo heliocêntrico do nosso sistema solar, planetas seguem uma órbita elíptica num movimento não-uniforme, com o Sol localizado em um dos focos da elipse. Para explicar as leis de Kepler, Isaac Newton sugeriu posteriormente que existe uma força de atração entre quaisquer dois corpos massivos, ao qual ele chamou de *gravidade*.

O universo Newtoniano tem uma geometria bem simples: é um espaço tridimensional Euclidiano, onde o caminho mais curto entre quaisquer dois pontos é uma reta. O tempo é uma variável externa à geometria. Na mecânica Newtoniana, a gravidade é essa força de atração de intensidade F que age à distância:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

onde G é uma constante chamada de constante de gravitação universal, M e m são as respectivas massas dos corpos sendo atraídos e r é a distância entre eles.

Por outro lado, na relatividade geral um sistema gravitacional (um sistema solar, uma galáxia, ou mesmo o universo como um todo) é mapeado em uma variedade quadridimensional chamada espaço-tempo, munida de uma métrica $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. A métrica provê uma forma de medir distâncias no espaço-tempo, que tem uma geometria não-Euclidiana. A curvatura deste espaço, dada por R , depende do conteúdo de matéria do sistema. Esta relação entre matéria e curvatura é dada pelas equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 4\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que descreve o campo de matéria, R , como dito, é a

curvatura do espaço-tempo, dada pelo traço do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, e κ é uma constante que depende da constante gravitacional G e da velocidade da luz c .

A gravidade, neste caso, é um efeito da curvatura do espaço tempo.

Em janeiro de 1916, no ano seguinte à formulação completa da relatividade geral, o físico alemão Karl Schwarzschild apresentou a primeira solução exata das equações de Einstein. Esta descreve o campo gravitacional de um objeto massivo de dimensão puntual, uma solução de *Massenpunktes*¹. Hoje reconhecida como uma solução de buraco negro, esta e outras soluções de massas puntuais foram obtidas inicialmente para estudar a gravidade gerada por objetos esfericamente simétricos, como representações ideais de estrelas ou partículas carregadas. Diz-se ideal pois a existência física de objetos sem dimensão desafiava o bom senso.

A existência de buracos negros é uma das previsões mais contra-intuitivas da relatividade geral. Em teoria, um buraco negro é um corpo superdenso que curva o espaço-tempo drasticamente, formando uma região onde o campo gravitacional se torna tão forte que aprisiona todo tipo de matéria/radiação em seu interior. Mais do que isso, a gravidade força toda a matéria a colapsar num ponto, o centro de massa. Este ponto recebe o nome de *singularidade*. Apesar de serem bem explicado apenas através da relatividade geral, corpos astronômicos equivalentes aos buracos negros já haviam sido cogitados dentro da teoria da gravitação de Newton, mas foram descartados eventualmente. As “estrelas invisíveis” da teoria Newtoniana também aprisionavam a luz, mas não necessariamente colapsavam sob a influência de seu próprio campo gravitacional, como acontece com a versão relativística.

Cada nova descoberta sobre as propriedades das soluções de buraco negro acompanha uma nova percepção sobre a teoria que descreve o próprio universo. Neste artigo, vamos revisar as diferentes propostas teóricas sobre a gravidade através do aprofundamento do conhecimento sobre as soluções de buracos negros. Da hipótese da estrela invisível da teoria Newtoniana até as *Massenpunktes* da teoria de Einstein, buscamos explorar como a visão geométrica e topológica do cosmo se modificou através do estudo das solu-

¹Termo em alemão para descrever “massa puntual”.

ções de buracos negros. Com este intuito, vamos expor a visão Newtoniana sobre estes entes e, em seguida, acompanhar os desenvolvimentos históricos das soluções de massas pontuais da relatividade geral. Nosso objetivo é apresentar uma introdução histórica sobre a relatividade geral e buracos negros, focada na teoria de gravitação e suas interpretações, como apoio didático para aqueles que pretendem iniciar os estudos sobre o tema. Para tal, adaptamos as notações dos artigos originais para que não haja confusão na apresentação dos resultados de diversos autores diferentes.

Iniciamos com uma revisão da versão Newtoniana dos buracos negros na Seção 2, para, em seguida, introduzirmos a versão relativística destes objetos na Seção 3. Esta seção se divide em duas subseções, uma apresentando a solução para o campo gravitacional de um objeto massivo esfericamente simétrico (Subseção 3.1) e a outra apresentando a solução para um objeto massivo esfericamente simétrico e carregado (Subseção 3.2). Na Seção 4, apresentamos as tentativas de interpretação da solução de Schwarzschild por Alvar Gullstrand, Paul Painlevé (Subseção 4.1) e por Arthur Eddington (Subseção 4.2), além de apresentarmos, na Subseção 4.3, uma análise sobre a interpretação do raio de Schwarzschild. Em seguida, apresentamos as extensões analíticas das soluções de Schwarzschild na Seção 5. Por fim, comentamos sobre as soluções de Kerr e Newman para campos gravitacionais esfericamente simétricos de objetos massivos em rotação, com e sem carga, na Seção 6. Finalizamos o artigo com as Conclusões.

2 Estrelas invisíveis: a versão Newtoniana dos buracos negros

Em 1789, O filósofo natural² John Michell estava estudando a conexão entre distância, brilho e movimento de sistemas binários de estrelas, quando ele sugeriu que poderiam haver estrelas completamente invisíveis para nós [2].

Michell estava estudando a relação entre luminosidade e paralaxe de sistemas binários de estrelas, analisando a conexão entre distância, brilho e padrão de movimento destas estrelas. Com

²Pessoa que se dedicava aos estudos das ciências, da filosofia e da natureza. O filósofo natural foi o precursor do cientista moderno.

isso, ele percebeu que estrelas mais densas brilhavam menos. Para explicar este fato, Michell propôs que a densidade de uma estrela afetava a velocidade com a qual a luz escapava da estrela — uma ideia que se encaixava bem com a teoria prevalente na época.

Para um objeto (uma partícula, por exemplo) fugir do campo gravitacional de um corpo massivo, ele precisa atingir uma certa velocidade, adequadamente chamada de *velocidade de escape*. Neste limite, a energia cinética da partícula em rota de fuga se torna maior que a energia potencial gravitacional que o puxa na direção oposta. A “partícula” Terra não é rápida o suficiente para fugir da atração gravitacional do Sol, mas possui uma velocidade que a permite se manter estável em órbita, presa a uma trajetória elíptica ao redor da estrela. Uma partícula mais vagarosa não conseguiria escapar e nem se manter em órbita, mas cairia em direção à fonte do campo gravitacional, o Sol.

O reverendo Michell perguntou o que aconteceria se a velocidade de escape de uma estrela fosse maior do que a velocidade da luz. Ele concluiu que a luz não conseguiria escapar da estrela, ficando presa à superfície pela ação da gravidade. Estas estrelas estariam, por tanto, invisíveis para nós. Porém, Michell deduziu que poderíamos detectá-las através de sua influência gravitacional em outros astros. Uma estrela orbitando outra invisível apresentaria irregularidades características em seu movimento que denunciariam a presença da outra³.

A mesma conclusão foi alcançada, aparentemente de forma independente, pelo grande filósofo natural francês Pierre-Simon Laplace em seu livro *Sistema do Mundo*, cuja primeira edição é de 1796 [4].⁴ Uma estrela com um raio 250 vezes maior que o do Sol, mas densidade comparável a da Terra não permitira que a luz escapasse de sua atmosfera, Laplace concluiu. “Os maiores corpos do universo,” ele explica, “podem ser completamente invisíveis por razão de sua magnitude.” Laplace deixou este comentário sem prova em seu livro, mas publicou um artigo (em alemão) posteriormente com uma demonstração.

A prova de Laplace é bem mais analítica do que

³Este é um método que os astrônomos utilizam hoje em dia para detectar buracos negros. Foi assim que o buraco negro no centro da nossa galáxia foi descoberto [3].

⁴Para mais sobre os trabalhos de Michell e Laplace, veja [5].

a argumentação mais retórica de Michell. Numa tradução desta demonstração para métodos e terminologia mais atuais, considere a força F dada em (1). Pela Segunda Lei de Newton, a aceleração da gravidade é dada por:

$$g = G \frac{M}{r^2}. \quad (3)$$

Para calcular a velocidade de escape v_e de um objeto de massa m que se afasta radialmente de um corpo (planeta, estrela) de massa M e raio R , é preciso que a energia cinética se iguale à energia potencial gravitacional:

$$\frac{mv_e^2}{2} = mgR \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (4)$$

Supondo que a massa M é constante, então a velocidade de escape se torna uma função do raio do corpo celeste. Assim, existe um raio, que denotaremos por a , tal que a velocidade de escape seja a velocidade da luz. Ou seja,

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2MG}{c^2}. \quad (5)$$

Para um corpo de massa M com um raio igual ou menor que a como definido acima⁵, a velocidade de escape seria maior ou igual à velocidade da luz, que é a velocidade limite do universo. Uma estrela com uma densidade maior do que $M(4/3\pi a^3)^{-1}$ seria, portanto, invisível.

Apesar desta publicação de Laplace fornecendo uma prova para esta afirmação, o comentário sobre as estrelas invisíveis desapareceram do seu livro a partir da terceira edição. As motivações de Laplace para retirar este detalhe do livro não são óbvias, mas podemos especular algumas razões científicas. Em 1801, Thomas Young mostrou que a luz possui uma natureza ondulatória [6], o que faria o raciocínio de Michell e Laplace se tornar obsoleto. A ideia da estrela invisível requer que a gravidade Newtoniana afete a luz da mesma forma que afeta outros corpos massivos, mas se a luz é uma onda, então poderia, em tese, escapar ao campo gravitacional. Este seria um bom motivo para Laplace abandonar a ideia, mas a verdade é que esta hipótese de que a luz seria uma

onda só se tornou popular mais de uma década após Laplace retirar o comentário.

De qualquer forma, hoje sabemos que há uma dualidade na natureza da luz, ela sendo considerada ambas onda e partícula. Porém, também sabemos que a luz não é massiva e a gravidade de Newton só afeta corpos massivos, apesar dos indícios observacionais de que estrelas brilham menos. Com isso, as especulações de Michell e de Laplace sobre estrelas invisíveis não são bem fundamentadas dentro da teoria Newtoniana da gravitação.

3 *Massenpunktes: a versão relativística dos buraco negros*

Em 1905, Albert Einstein publicou a primeira de suas duas teorias relativísticas. A relatividade especial, como esta ficou conhecida posteriormente, diz que tempo e espaço são relativos. Ou seja, um observador inercial mede distâncias e o tempo decorrido entre eventos diferente de um observador em movimento [7]. Nos dez anos seguintes, Einstein trabalhou numa teoria que explicasse a gravidade considerando esta relatividade entre espaço e tempo, finalizando-a em 1915.

Em contraste com a teoria da relatividade especial, a teoria da gravitação de Einstein não foi instantaneamente bem aceita. Ela recebeu várias críticas pela sua natureza abstrata [8]. A teoria dependia de um formalismo matemático avançado para a época e, por isso, ela recebera as acusações de ser “muito matemática” e difícil de aplicar. O espaço-tempo é curvo e com quatro dimensões. A matemática de espaços curvos de dimensões mais altas havia sido introduzida pelo matemático alemão Bernhard Riemann há pouco mais de 50 anos quando o artigo de Einstein foi publicado, com desenvolvimentos essenciais para a teoria de Einstein apenas no final do século XIX e início do século XX [9]. A teoria da gravitação de Einstein era uma aplicação da matemática mais moderna que havia na época, o que limitou a compreensão inicial da teoria.

As equações de Einstein (equação (2)) são um conjunto de equações diferenciais parciais cuja solução é uma descrição do formato do espaço-tempo através de um tensor $g_{\mu\nu}$ chamado de métrica. A métrica é uma forma de medir distâncias neste espaço quadridimensional formado por uma dimensão temporal mais três espaciais. A

⁵Veremos que a é equivalente ao raio de Schwarzschild, hoje em dia mais comumente representado por r_S . Escolhi manter a notação mais comum nos trabalhos originais, mantendo-me fiel ao objetivo de reconstrução histórica do tema.

primeira solução encontrada para as equações de Einstein descreve um buraco negro, mas este fato só foi compreendido décadas mais tarde.

3.1 A solução de Schwarzschild: a primeira solução exata da relatividade geral

Em 1900, o físico alemão Karl Schwarzschild já estava pensando em espaços curvos para descrever o universo. Na introdução do seu artigo sobre a curvatura do universo [10], ele explicou que sua motivação para estudar espaços curvos não teria aplicação real prática ou mesmo significado matemático pertinente, mas que era um assunto interessante por se tratar de uma extensão da visão de mundo para além do que é acessível e que abre estranhas possibilidades para futuros experimentos. Mesmo antes da formulação da relatividade geral, Schwarzschild já apresentava uma predisposição a abandonar a mentalidade Euclidiana que permeava a teoria Newtoniana. Então, quando Einstein finalizou a sua teoria da gravitação, Schwarzschild já estava versado na matemática necessária para entendê-la.

No início de 1916, Schwarzschild publicou dois artigos detalhando uma solução para as equações de Einstein [11, 12]⁶. Ele queria encontrar a solução para o campo gravitacional do Sol e, portanto, considerou um sistema idealizado onde havia simetria esférica do campo e em que a massa M presente no sistema estava toda concentrada num ponto na origem do sistema de coordenadas. Ela seria uma massa pontual ou *Massenpunktes*, no original alemão. A partir destas considerações, adotando coordenadas esféricas, esta solução é descrita através do elemento de linha⁷:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (6)$$

onde a seria, a princípio, uma constante de integração e

$$d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Esta é a forma mais conhecida da Solução de Schwarzschild.

⁶Ambos foram traduzidos para o inglês, [13, 14].

⁷Um elemento de linha ds^2 é uma outra forma de representar a métrica $g_{\mu\nu}$, de tal forma que, na notação de Einstein, temos $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

No primeiro artigo [11], Schwarzschild notou que a solução (6) possui dois pontos de descontinuidade, ou, em outras palavras, duas *singularidades*. Para $r = 0$ e $r = a$, os coeficientes g_{00} e g_{11} , respectivamente, possuem uma divisão por zero. Hoje em dia, sabemos que estas representam a singularidade no interior do buraco negro e o horizonte de eventos. Porém, Schwarzschild não aprofundou sua análise sobre estes pontos, preferindo, ao invés, apresentar um exemplo em que a solução é aplicável: no cálculo do periélio de Mercúrio e da lei do movimento circular de Kepler.

No entanto, Schwarzschild propôs um modelo mais realista em um segundo artigo [12]. Neste, ele substituiu a massa puntual que gera o campo gravitacional por um objeto esférico composto de um fluido incompressível, que possui um tensor energia-momento não nulo, ao contrário do objeto massivo puntual. A teoria da relatividade geral, segundo ele, depende tanto da quantidade de matéria quanto de sua energia e por isso este seria um modelo menos idealizado. O campo gravitacional exterior a essa esfera continuaria descrito pela solução de massa puntual, porém o interior possuiria uma distribuição homogênea de matéria e, portanto, não apresentaria as singularidades que a solução de massa puntual apresentou.

Nesta configuração, Schwarzschild encontrou as condições de continuidade na transição de uma região (o vácuo) para a outra (o interior do objeto massivo esférico). Ele deduziu que a soma da densidade e pressão ($\rho_0 + p$) dentro da esfera cresce proporcionalmente à velocidade da luz e que há uma quebra de continuidade se a esfera possui um certo raio, a . Este fato, argumentou Schwarzschild, estabelece um limite para a densidade do fluido incompressível. “Para um observador externo” [14, p. 32] a esfera não pode ter um raio menor do que a .

Na literatura, este raio $r = a$ ficou conhecido como *raio singular*, *raio gravitacional* ou, mais comumente, *raio de Schwarzschild*. A observação de Schwarzschild de que a esfera não poderia ter um raio menor do que a é um resultado válido *para um observador externo* é notável. Mostra que Schwarzschild entendia bem que diferentes coordenadas correspondiam a observadores distintos. Mas este comentário permaneceu inexplorado. Infelizmente, Schwarzschild faleceu no mês seguinte a esta publicação em decorrência de uma

doença autoimune.

Por volta da mesma época, o matemático holandês Johannes Droste encontrou a mesma solução para o problema de forma independente [15]. Quando a publicação foi finalizada, ele já havia tomado conhecimento do trabalho de Schwarzschild e o cita numa nota de rodapé. Droste se referiu à solução como uma solução esfericamente simétrica para o campo gravitacional de uma *massa central*. Assim como Schwarzschild, ele naturalmente escolheu coordenadas esféricas para as dimensões espaciais do espaço-tempo e obteve a mesma equação que Schwarzschild (equação (6)). No entanto, o caminho para chegar a esta solução difere do de Schwarzschild. Ao invés de focar no corpo celeste que gera o campo gravitacional, Droste investigou o movimento de uma partícula teste sob a influência do campo gravitacional do objeto estudado. Sobre o raio singular, ele observou que uma partícula numa trajetória radial em direção ao centro de massa levaria um tempo infinitamente longo para cruzar este raio. Por esta razão, ele considerou em sua análise apenas a solução na região exterior a este raio gravitacional.

Ao contrário de Schwarzschild, Droste não notou que o movimento da partícula está descrito nas coordenadas de um observador externo e não do referencial da própria partícula. O cálculo de Droste mostra que um observador externo que observa uma partícula em trajetória radial em direção ao centro de massa do campo gravitacional demoraria um tempo infinito para cruzar o raio de Schwarzschild de uma massa puntual. A forma final do elemento de linha como apresentado na equação (6) é devida a Droste e, por isso, as coordenadas da solução descrita desta forma são conhecidas como *coordenadas de Droste-Schwarzschild*.

Outro matemático que abordou a questão em 1917 foi o alemão Herman Weyl. Num compêndio sobre soluções esféricas da relatividade geral intitulado *Sobre a teoria da gravitação* [16], Weyl apresentou um sistema de coordenadas diferente para a solução de Schwarzschild, propondo uma extensão analítica desta:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{a}{r'}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{1 - \frac{a}{r'}}{1 + \frac{a}{r'}}\right)^2 dx_0^2, \quad (7)$$

onde $dr'^2 + r'^2 d\Omega^2 = 16(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$. A

coordenada de Droste-Schwarzschild (t, r) se relaciona com a de Weyl (x_0, r') pela transformação⁸

$$t = x_0 \quad ; \quad r = \frac{r'}{4} \left(1 + \frac{a}{r'}\right)^2. \quad (8)$$

Weyl foi além de encontrar a solução para a geometria do espaço-tempo e propôs uma descrição topológica para a solução de Schwarzschild. Ele observou que as coordenadas de Droste-Schwarzschild cobrem duas vezes a mesma região, a região externa ao raio de Schwarzschild, quando projetadas no plano $z = \sqrt{4a(r-a)} = 0$. Por outro lado, o sistema de coordenadas que Weyl utiliza é uma extensão analítica (conforme ao espaço Euclidiano) que cobre as regiões interior e exterior ao raio singular, de forma que o tempo próprio na solução interior é positivo. Porém Weyl conclui que esta extensão é um artifício matemático, argumentando que na natureza a solução não se aplicaria ao interior da esfera singular.

Embora Weyl tenha considerado a extensão analítica para o interior da esfera de Schwarzschild sem sentido físico, ele percebeu que, matematicamente, só poderíamos visualizar as propriedades topológicas da solução se considerássemos a solução estendida. De qualquer forma, a consideração de uma extensão analítica não apresentou nenhuma mudança imediata na interpretação da solução de Schwarzschild e não recebeu muita atenção na época. Era meramente uma curiosidade matemática.

3.2 A solução de Reissner-Nordström para uma massa puntual eletricamente carregada

Massas puntuais é uma expressão que remete a partículas massivas. A partir desta, surgiu naturalmente a pergunta: “é possível encontrar a solução exata da relatividade geral para uma um campo gravitacional de uma partícula massiva carregada, tais como elétrons e prótons?”. A questão estava tão imediata que quatro pessoas diferentes resolveram o problema de forma independente: Hans Reissner em 1916, Herman Weyl em 1917, Gunnar Nordström em 1918 e George B. Jeffery em 1921.

O engenheiro aeronáutico Hans Reissner publicou *Sobre a gravidade inerente de um campo*

⁸Weyl não apresenta a transformação de coordenadas explicitamente, mas o resultado final carrega um erro de cálculo: onde aparece a , ele encontrou $a/4$.

elétrico de acordo com a teoria de Einstein [17] em março de 1916, dois meses depois do primeiro artigo de Schwarzschild. Reissner leu o artigo de Schwarzschild e seguiu seus passos, usando as equações de campo para encontrar as componentes da métrica para o caso de uma partícula carregada, considerando o tensor energia-momento de um campo eletricamente carregado que Einstein apresentou em seu artigo inicial [1]. Com cálculos diretos, Reissner chegou a uma solução exata, embora não tenha explicitado o elemento de linha desta.

Assim como a solução de Schwarzschild, a de Reissner também apresentou singularidades, uma na origem e dois raios singulares. Porém, considerando a massa do elétron, ele encontrou que os valores destes raios são, respectivamente, $0,408 \times 10^{-55} \text{cm}$ e $1,337 \times 10^{-34} \text{cm}$. Ambos menores do que o raio da partícula, que é da ordem de 10^{-13}cm . Portanto, Reissner concluiu que não haveria necessidade de estender a solução para a região interior ao raio destes raios. Com este problema parcialmente solucionado, ele prosseguiu para mostrar que era possível recuperar a solução de Schwarzschild ao tomar o limite da carga elétrica indo à zero.

A segunda parte do artigo de 1917 de Herman Weyl [16] é dedicada também à solução de massa pontual carregada. Para este caso, Weyl argumentou que é importante abordar o problema através do formalismo Hamiltoniano, que ele julgou suficientemente amplo para englobar o conhecimento sobre a matéria. Esta consideração diferencia os cálculos de Weyl do método utilizado por Reissner. Foi assim que Weyl chegou à solução escrita em forma de elemento de linha,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (9)$$

onde $Q = (e/c) \left(\sqrt{a/2m}\right)$ é uma função da carga elétrica e e da massa do elétron m . Assim como Reissner, Weyl identificou duas singularidades radiais, as quais ele chamou de *raio gravitacional associado à massa do elétron* e *raio gravitacional associado à carga do elétron*. Ele também observou que ambos seriam menores que o raio do elétron, mas, desta vez, não expôs nenhuma interpretação topológica da solução.

A equação (9) é conhecida atualmente como *Solução de Reissner-Nordström*, em homenagem a Reissner e ao físico teórico finlandês Gunnar Nordström. Em 1918, Nordström encontrou esta mesma solução para um “um campo de um centro elétrico” [18]. A influência do trabalho de Droste sobre Nordström é perceptível nesta escolha de palavras, *centro elétrico* ao invés de *massa pontual carregada*. Mas também notamos tal influência na estratégia adotada para abordar o problema. Similar ao trabalho de Droste [15], Nordström introduziu o campo elétrico como um termo na Hamiltoniana do sistema, derivando desta a equação (9). Curiosamente, a notação mais usualmente adotada para a equação (9) é a introduzida por Nordström, ao invés da de Reissner, espelhando o que acontece com o caso das coordenadas de Droste-Schwarzschild.

Ao colocar o problema como o cálculo do campo gravitacional de um ‘centro’ carregado, Nordström estrategicamente evitou a idealização matemática da massa pontual, como encontrada nas primeiras soluções de *Massenpunktes*. Embora a carga estivesse centrada na origem do sistema de coordenada, o corpo massivo que produz o campo teria um raio positivo e não nulo. Nordström explicou que tal corpo massivo teria uma borda finita, mas ele desconsidera a possibilidade de raios pequeníssimos através de considerações físicas. Analisando a componente g_{00} do tensor métrico, ele notou também há dois raios singulares:

$$g_{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - Q^2}, \quad (10)$$

mas não tece comentários sobre eles.

Posteriormente, em 1921, George Barker Jeffery da Universidade de Londres publicou seu artigo *O Campo de Elétron na Teoria da Gravitação de Einstein* [19] expondo os desenvolvimentos das soluções para as equações de Einstein obtidas até aquele momento e apresentando a solução para o campo gravitacional de uma partícula carregada. Ele citou o artigo de Nordström, embora não tenha feito menção a Reissner ou Weyl, mas comenta que tomou conhecimento do artigo após ter derivado a solução. Por isso, Jeffery propôs que o seu pudesse ser considerado um método alternativo ao de Nordström, pois Jeffery derivou o resultado da forma tensorial das equações de campo (assim como fez Reissner), em contrapartida ao cálculo de Nordström, que se baseou na

abordagem Hamiltoniana.

Jeffery refletiu sobre o conceito de um elétron pontual⁹. Ele observou que, embora na teoria eletromagnética o elétron fosse geralmente considerado uma partícula sem dimensões, quando o assunto é gravitação esta hipótese não poderia ser considerada, porque isto resultaria num ponto massivo de densidade infinita. Mesmo para uma partícula sem carga, Jeffery argumenta, o sistema não poderia ser tratado como um ponto singular por causa do raio gravitacional singular, como apontado por Schwarzschild. Porém, Jeffery notou que, na nova teoria da gravitação, não haveria zeros ou infinitos se $e^2/m^2 > \kappa = 0.67 \times 10^{-7}$ no sistema CGS de unidades, sendo e é a carga elétrica, m a massa da partícula e κ está relacionada à constante gravitacional. Esta condição é amplamente satisfeita para os casos do elétron e do núcleo de hidrogênio. Portanto, Jeffery concluiu que pode-se desconsiderar estas soluções singulares do campo sem problemas [19, p. 131].

Jeffery terminou o artigo calculando o desvio da luz causado pelo campo gravitacional de uma estrela carregada, usando o campo eletromagnético do Sol para fazer uma pequena correção às previsões anteriores de Einstein.

4 Entendendo as soluções: reinterpretando mudanças de coordenadas.

Depois do sucesso da expedição de Sobral em 1919 [21], que mediu a deflexão da luz de acordo com o que foi previsto pela teoria da relatividade geral, a popularidade de Einstein cresceu no mundo inteiro e sua teoria da gravitação ganhou destaque no meio acadêmico [22]. Com destaque apareceram críticas, em especial à teoria da gravitação de Einstein, que ainda permanecia mal compreendida.

⁹Antes disso, Jeffery comentou sobre o movimento de um elétron no campo gravitacional de um núcleo atômico carregado. Para isso, ele considera a massa e a carga do elétron como sendo negligenciáveis, uma hipótese que ele mesmo admite ser problemática, mas que este seria “o melhor jeito de lidar com a solução correspondente à duas singularidades [núcleo e elétron]” [19, p. 127]. Posteriormente, em 1926, Jeffery retornaria a este problema da gravitação entre dois corpos não pontuais e publicaria, em conjunto com O.R. Baldwin, um dos artigos mais importantes sobre ondas gravitacionais, *A Teoria Relativística de Ondas Planas* [20].

Pelo menos duas pessoas usaram a solução de massas pontuais para criticar a relatividade geral, alegando inconsistências físicas no modelo. Foram eles o matemático e político francês Paul Painlevé e o duas vezes vencedor do Prêmio Nobel e oftalmologista Alvar Gullstrand. Mas os problemas apontado por eles não foram nem a presença das singularidades e nem a idealização do modelo ao considerar um ponto massivo ao invés de uma estrela. O que Painlevé e Gullstrand entenderam como inconsistências físicas era, na verdade, uma característica da propriedade covariante das equações de Einstein.

4.1 Coordenadas de Gullstrand-Painlevé

Em 1921, Paul Painlevé publicou dois artigos, *Mecânica Clássica e a Teoria da Relatividade* [23] e *Sobre a Gravitação da Mecânica de Newton e da Mecânica de Einstein* [24], nos quais ele resolveu as equações de Einstein para o campo de um corpo esfericamente simétrico de uma massa adimensional em repouso. Painlevé obteve um elemento de linha diferente do Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 + 2\sqrt{\frac{r}{a}} dr d\tau - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (11)$$

Ele supôs que diferentes elementos de linha para um mesmo modelo implicava em uma física diferente e que, por isso, a relatividade geral seria inconsistente [23, pp. 8-9]. Não é este o caso. O historiador da ciência Jean Eisenstaedt acredita que esta conclusão ocorreu devido à má interpretação da covariância das equações de Einstein, afirmando que os físicos tendiam a pensar nas coordenadas como medidas físicas e não como referenciais [8, p. 176].

A covariância de Lorentz, ou princípio da relatividade especial, diz que as equações de Einstein (equação (2)) são invariantes sob certos tipos de transformações de coordenadas, que representam diferentes referenciais inerciais. O elemento de linha (11) está escrito em coordenadas (τ, r) que se relacionam com as coordenadas de Droste-Schwarzschild (t, r) da seguinte forma:

$$\tau = t - 2\sqrt{ar} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{r} + \sqrt{a}}{\sqrt{r} - \sqrt{a}} \right). \quad (12)$$

Enquanto isso, Alvar Gullstrand havia recebido um pedido do comitê do Prêmio Nobel para escrever um relatório sobre o trabalho de Einstein,

com o objetivo de avaliar sua candidatura ao prêmio em 1921. Einstein foi nomeado ao prêmio Nobel todos os anos entre 1910 a 1922, com exceção a 1911 e 1915. Ele eventualmente ganhou o prêmio em 1921 devido ao seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico, mas foi por causa do relatório desfavorável de Gullstrand que Einstein não recebeu o prêmio pela sua teoria da relatividade geral [25].

Em seu artigo de 1921, *A Solução Geral para o Problema do Corpo Estático na Relatividade Geral de Einstein* [26], Gullstrand obteve independentemente o mesmo elemento de linha que Painlevé (equação (11)). Porém, ao invés de afirmar que esta configurava uma física diferente, como fez Painlevé, ele usou seu resultado para calcular o periélio de Mercúrio, concluindo que o cálculo da órbita deste planeta depende de constantes arbitrárias e que isso dava a impressão de que seria possível obter qualquer resultado para a precessão do periélio que se quisesse. Este seria um parâmetro livre que deveria ser vinculado com as observações e que, portanto, o cálculo da precessão do periélio de Mercúrio não seria uma “vitória” da relatividade geral sobre a teoria clássica Newtoniana. Gullstrand também reparou que o desvio para o vermelho das linhas espectrais do Sol dependia deste parâmetro arbitrário, embora a deflexão da luz permanecesse inalterada.

O sistema de coordenadas usado no elemento de linha (11) ficou conhecido como coordenadas de Gullstrand-Painlevé (GP). É interessante notar que, nas coordenadas de GP, o raio singular desaparece. A solução (11) regulariza a singularidade do raio de Schwarzschild, mas este fato passou despercebido na época. O objetivo de ambos Gullstrand e Painlevé era analisar o que a relatividade geral afirmava sobre o campo gravitacional do Sol, um astro com um raio maior do que o de Schwarzschild e, portanto, as singularidades da solução de massa puntual se encontravam fora do domínio que eles estudavam.

4.2 As coordenadas de Eddington

Havia, como vimos, uma dificuldade coletiva para entender a matemática por trás das mudanças de referenciais na relatividade geral. Qualquer solução das equações de Einstein (2) para uma massa puntual esfericamente simétrica é a solução de Schwarzschild, independente do sistema de coordenadas adotado. O físico George

Birkhoff demonstrou isso em 1923 [27]. Birkhoff mostrou que, até para campos dinâmicos como os de estrelas pulsantes, a solução das equações de Einstein seriam a mesma. Tal resultado se tornou conhecido como Teorema de Birkhoff, o campo externo de qualquer objeto esfericamente simétrico (sem carga e sem rotação), pulsante ou não, é descrito pela solução de Schwarzschild. Uma das consequências disso é que estrelas pulsantes não gerariam ondas gravitacionais.

Portanto, soluções como a de Painlevé e Gullstrand são a mesma que Schwarzschild.

Painlevé e Gullstrand não foram os únicos a considerarem que coordenadas diferentes resultavam em físicas diferentes. Em 1922, o matemático e filósofo inglês Alfred Whitehead também afirmou ter encontrado uma solução alternativa para o campo gravitacional do Sol segundo a RG, que também exibiria um resultado diferente para o cálculo do periélio de Mercúrio [28]. Em defesa à teoria de Einstein, o físico inglês Arthur S. Eddington, um dos maiores entusiastas da relatividade geral na época e a pessoa que liderou as expedições que confirmaram a deflexão da luz pelo campo gravitacional do Sol de acordo com a teoria de Einstein, publicou um relatório de uma página na revista *Nature* em 1924 [29], mostrando que o resultado de Whitehead era exatamente o mesmo que o de Schwarzschild, a menos de uma transformação de coordenadas.

Eddington reescreveu a expressão de Whitehead como,

$$ds^2 = (-dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin\theta d\phi^2 + dt_1^2) - \frac{2M}{r} (dt_1 - dr)^2, \quad (13)$$

mostrando explicitamente que esta solução escrita nas coordenadas (t_1, r) corresponde à solução de Schwarzschild nas coordenadas (t, r) através da transformação de coordenada:

$$t_1 = t - 2M \log(r - M). \quad (14)$$

Não é exagero dizer que Eddington era um dos poucos especialistas em relatividade geral na época. Este e outros exemplos demonstram que ele compreendia bem as propriedades covariantes da teoria. Mesmo assim, a relatividade geral apontava para fenômenos tão estranhos que nem mesmo Eddington pôde aceitar.

A existência física de estrelas superdensas com raios menores do que o de Schwarzschild, desafiava a filosofia de Eddington. Ele não acreditava

que regiões de onde nada pudesse escapar, regiões onde nenhuma medida pudesse ser feita por um observador externo, pudessem existir na realidade. Nas coordenadas (13), o raio de Schwarzschild também é regularizado. Eddington não relevou esta informação, argumentando numa publicação no mês seguinte contra a existência de objetos com raios menores que o de Schwarzschild num contexto astrofísico [30], estabelecendo a hipótese de que as estrelas permaneceriam em equilíbrio hidrodinâmico [31] e nunca se contrairiam além dos seus raios gravitacionais.

4.3 Idealizações: as massas pontuais e o mito do raio intransponível

As soluções de massas pontuais são hoje reconhecidas como soluções de buracos negros, mas eram, à princípio, soluções idealizadas que não necessariamente condiziam com a realidade observada. Havia muito o que questionar sobre a solução de Schwarzschild. Em particular, a natureza das duas singularidades que esta apresenta era uma questão matemática que os físicos rapidamente atribuíram à idealização do modelo, ou seja, era um problema que aparecia apenas ao se desconsiderar as dimensões da fonte do campo gravitacional. Isso se torna mais evidente nas análises da solução para o campo gravitacional de partículas carregadas, cujos raios eram maiores do que os raios singulares que apareciam na solução, como vimos na Subseção 3.2.

As singularidades na origem do sistema de coordenadas e a esférica eram problemáticas, mas os argumentos de Schwarzschild e Droste de que estas regiões não eram fisicamente relevantes fizeram sentido, a princípio. Mas esta suposição de que era uma região fisicamente irrelevante também fazia sentido de um ponto de vista astrofísico, já que a densidade que uma estrela compacta com raio menor que seu raio de Schwarzschild deveria ser, no mínimo, centenas de trilhões de vezes maior do que qualquer densidade encontrada na Terra [31].

No final da década de 1920, o cosmólogo e padre belga George Lemaître, em sua tese de doutorado que se tornou um marco da cosmologia, demonstrou que o raio de Schwarzschild era, na verdade, uma *singularidade aparente* [32]. Isto significa que a natureza singular do raio de Schwarzschild depende do sistema de coordenadas. Lemaître também mostrou que a origem, a outra

singularidade da solução de Schwarzschild, era, no entanto, uma singularidade real. Ou seja, não importa com qual sistema de coordenadas a solução é descrita, esta singularidade sempre estará presente.

Restava ainda saber se a esfera delimitada pelo raio de Schwarzschild era mesmo intransponível, como Droste tinha mencionado. O físico japonês Yusuke Hagihara, ao analisar as trajetórias de partículas se movendo num campo gravitacional de Schwarzschild em 1931, mostrou que, matematicamente, as trajetórias iniciadas no exterior do raio de Schwarzschild poderiam sim cruzar o raio gravitacional, mas Hagihara interpretou isto como órbitas colisionais [33] de partículas caindo na estrela. Como não haveriam corpos com um raio menor que o de Schwarzschild, ele argumenta, as partículas colidiriam com a superfície da estrela antes de cruzar tal raio. Nesta mesma década, o físico e matemático Howard P. Robertson, também estudando trajetórias de partículas num campo gravitacional de Schwarzschild, demonstrou que elas poderiam sim cruzar o raio de Schwarzschild na direção de fora para dentro, mas não de dentro para fora¹⁰. Apesar de Robertson comunicar oralmente o resultado a vários pesquisadores próximos (incluindo Albert Einstein), estas contas foram publicadas apenas postumamente, em 1968 [34].

Segue disto que o raio de Schwarzschild não é intransponível.

Einstein, averso à ideia da existência de singularidades no universo, sugeriu uma mudança drástica na topologia do espaço-tempo [35] numa tentativa de evitar que as singularidades aparecessem na teoria. No lugar da singularidade, Einstein e Nathan Rosen propuseram uma conexão entre duas regiões (desconexas) do espaço-tempo através de uma espécie de ponte. A solução de Schwarzschild cobre a região exterior duas vezes, como bem apontou Weyl (Subseção 3.1) e esta “ponte” seria uma conexão entre estas duas coberturas. Tal conexão recebeu o nome de *ponte de Einstein-Rosen*. Posteriormente, em 1939, Einstein publicou outro artigo alegando ter provado que singularidades não se formariam, que estrelas não se contrairiam para além do raio de Schwarzschild [36]. De fato, Einstein disse, elas

¹⁰Ou vice-versa. As contas de Robertson já identificavam a possibilidade de uma extensão analítica com uma solução de um buraco branco (de onde tudo escapa e nada adentra), mas Robertson não chegou a esta conclusão.

não se contrariam para além de $(2 + \sqrt{3})$ vezes o raio de Schwarzschild. Embora sua conclusão estivesse errada, o seu cálculo mostrava na verdade o limite ao qual é possível obter órbitas estáveis ao redor do buraco negro.

De sua concepção até meados da década de 1920, a relatividade geral estava em sua infância, onde as pessoas ainda tentavam entender a matemática e as implicações da teoria. Na segunda metade desta década, a relatividade entrou num período de estagnação que durou aproximadamente trinta anos¹¹, caracterizado pela diminuição do interesse na teoria, como poucas publicações sobre o tema.

Sobre a idealização das soluções de massas pontuais, havia a esperança de que a física nuclear, bem melhor entendida e testada do que a relatividade geral, seria capaz de evitar que a matéria se agregasse desta forma. J. Robbert Oppenheimer e colaboradores mostraram que este não é o caso [37–39], que a força gravitacional de objetos supermassivos não entraria em equilíbrio com as forças nucleares, ganhando a disputa afinal. Isso implica que estrelas supermassivas se contraem indefinidamente até o centro de massa. Oppenheimer calculou que isto aconteceria num tempo finito. O último artigo da trilogia de Oppenheimer, em coautoria com G.M. Volkoff, foi publicado em 1º de setembro de 1939, no dia em que a Segunda Guerra Mundial foi oficialmente declarada. Neste e nos anos seguintes, as pesquisas sobre gravitação, cosmologia e astrofísica basicamente cessaram [40].

5 Extensões Analíticas

A Segunda Guerra Mundial terminou em 1945, mas demorou alguns anos até que as pesquisas em relatividade geral retornassem. Trinta e cinco anos após sua formulação, a relatividade geral conquistou enfim menos desconfiança da comunidade científica. Os questionamentos dos anos iniciais sobre a validade da teoria, assim como as dúvidas sobre que física ela descrevia, não apareceram novamente no pós-guerra.

Apesar dos artigos de Oppenheimer, a existência de objetos colapsados gravitacionalmente, os buracos negros, ainda era suspeita, mas não completamente rejeitada, como nas décadas anterior-

¹¹Tal período o historiador da ciência Jean Eisenstaedt denominou de *período de águas rasas* [8].

res. Não havia evidência observacional de que objetos com tal densidade existissem, mas a teoria gravitacional por trás das soluções de massas pontuais voltou a ganhar notoriedade a partir da década de 1950. Nessa nova fase das pesquisas, o foco se tornou buscar entender as soluções por completo. Para isso, era importante buscar extensões analíticas das soluções, de forma a desvendar propriedades escondidas pela limitação topológica das coordenadas radiais que caracterizavam as soluções de massas pontuais.

5.1 O retorno da relatividade geral: o artigo de 1950 de Synge

Em 1950, o matemático irlandês John Lighton Synge, na época trabalhando no Canadá, retomou suas pesquisas sobre cosmologia e gravitação depois dos anos de guerra, nos quais seus conhecimentos foram utilizados em pesquisas de aplicação mais imediata. Dez anos após a publicação dos artigos divergentes de Einstein e Oppenheimer, um alegando que uma estrela não se contrairia além do raio de Schwarzschild e o outro afirmando o contrário, Synge sentiu a necessidade de verificar esta afirmação de um ponto de vista puramente gravitacional [41]. Synge observou que o problema não é comumente levado a sério por sua estranheza astrofísica, mas que era necessário se perguntar se a teoria da relatividade geral realmente proíbe que uma estrela se contraia até as dimensões de uma partícula.

Ambos George Lemaître e Howard P. Robertson haviam comunicado seus trabalhos sobre a natureza aparente do raio de Schwarzschild a Synge, que os menciona em seu artigo. A partir disto, Synge reconstruiu a solução de Schwarzschild levando em consideração a topologia do espaço-tempo e a propriedade de covariância, que faz as equações de Einstein manterem a mesma forma sob transformações gerais de coordenadas. Entendendo que esta foi a fonte de vários mal-entendidos sobre a teoria, Synge julgou a propriedade da covariância como “uma vergonha ao invés de uma vantagem” [41, p. 83].

Synge adotou as coordenadas (u', v', θ, ϕ) tais que

$$\begin{aligned} -\infty < u' < \infty & \quad , \quad -\infty < v' < \infty , \\ 0 \leq \theta \leq \pi & \quad , \quad 0 \leq \phi < 2\pi . \end{aligned} \quad (15)$$

A solução de Schwarzschild nestas coordenadas

resulta no elemento de linha,

$$ds^2 = du'^2 - dv'^2 + (v' du' - u' dv')^2 \mathcal{F} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (16)$$

onde \mathcal{F} e r são funções de $(u'^2 - v'^2)$ e de uma constante positiva a . As coordenadas de Synge se relacionam com as de Droste Schwarzschild (6) através das seguintes relações:

Para $(u'^2 - v'^2) > 0$:

$$u' = R \cosh\left(\frac{t}{2a}\right); \quad (17)$$

$$v' = R \sinh\left(\frac{t}{2a}\right); \quad (18)$$

$$R^2 = a^2 (\xi + \sinh \xi + \cosh \xi)^2, \quad (19)$$

com

$$1 - \frac{a}{r} = \tanh^2 \xi.$$

Para $(u'^2 - v'^2) < 0$:

$$u' = R \sinh\left(\frac{t}{2a}\right); \quad (20)$$

$$v' = R \cosh\left(\frac{t}{2a}\right); \quad (21)$$

$$R^2 = a^2 (\eta + \text{sen}\eta + \cos\eta)^2, \quad (22)$$

com

$$1 - \frac{a}{r} = -\text{tg}^2\eta.$$

Em termos de ξ e η , as funções \mathcal{F}, r são:

Para $(u'^2 - v'^2) \leq 0$,

$$r = a \cos^2 \eta, \quad (23)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{u'^2 - v'^2} \left(1 + \frac{4a^2 \text{tg}^2\eta}{u'^2 - v'^2}\right). \quad (24)$$

Para $(u'^2 - v'^2) \geq 0$,

$$r = a \cosh^2 \xi, \quad (25)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{u'^2 - v'^2} \left(1 - \frac{4a^2 \tanh^2 \xi}{u'^2 - v'^2}\right). \quad (26)$$

Assim como Weyl, que já tinha reparado que a solução de Schwarzschild cobria o plano (r, t) duas vezes (Seção 3.1), Synge mostrou que as coordenadas (u, v) também o faziam (Figura 1). E, assim como Lemaître, com uma análise detalhada das singularidades e geodésicas da solução, Synge conclui que $r = 0$ é uma singularidade do espaço-tempo, enquanto o raio de Schwarzschild é uma singularidade aparente, que desaparece com

uma mudança de coordenadas. Mais do que isso, Synge calculou que geodésicas do tipo tempo encontram qualquer singularidade em tempo finito. Isso implica que qualquer partícula presa neste campo gravitacional terminaria na singularidade da origem em tempo finito. A conclusão final foi que a relatividade geral não proíbe a existência de uma “partícula gravitacional” (ou massa puntual).

5.2 Finkelstein e Fronsdal

Em 1958, David Finkelstein redescobriu as coordenadas de Eddington (equação (13)) em busca de uma extensão analítica para a solução de Schwarzschild [42]. A princípio acreditando ser uma extensão máxima da solução, Finkelstein descobriu durante as provas do artigo que as coordenadas que ele utilizou eram incompletas, ou seja, que haviam geodésicas incompletas nestas coordenadas. Ele menciona numa nota de rodapé que tomou conhecimento que seu colega Martin Kruskal havia obtido uma solução completa há alguns anos antes, mas que não havia publicado.

Diferentemente de Eddington, que preferiu não comentar sobre o raio de Schwarzschild, Finkelstein não apenas confirmou que o raio de Schwarzschild não era uma singularidade real, mas que este só pode ser cruzado unilateralmente. O raio de Schwarzschild age, de acordo com Finkelstein, como uma membrana unidirecional, cujas influências causais podem cruzá-la, mas apenas em uma direção [42, p. 965]. Vale a pena lembrar que este resultado já havia sido obtido por Robertson na década de 1930, que permaneceu não-publicado até 1968. Foi esta publicação de Finkelstein em 1958 que denunciou para o resto da comunidade científica esta propriedade fundamental do que hoje chamamos de *horizonte de eventos*.

Sobre a comparação entre os artigos de Eddington e Finkelstein e entre os resultados de Robertson e o de Finkelstein sobre o raio de Schwarzschild, ressaltamos que eles foram escritos em contexto bem diferentes. Eddington e Robertson buscavam mostrar que a teoria da relatividade geral era consistente frente às desconfianças sobre ela. Já Finkelstein assume a consistência da teoria em seu trabalho e isso o permitiu focar apenas em descobrir novas propriedades da solução.

No ano seguinte à publicação de Finkelstein, outra extensão analítica surgiu com o trabalho de Christian Fronsdal [43], na época trabalhando

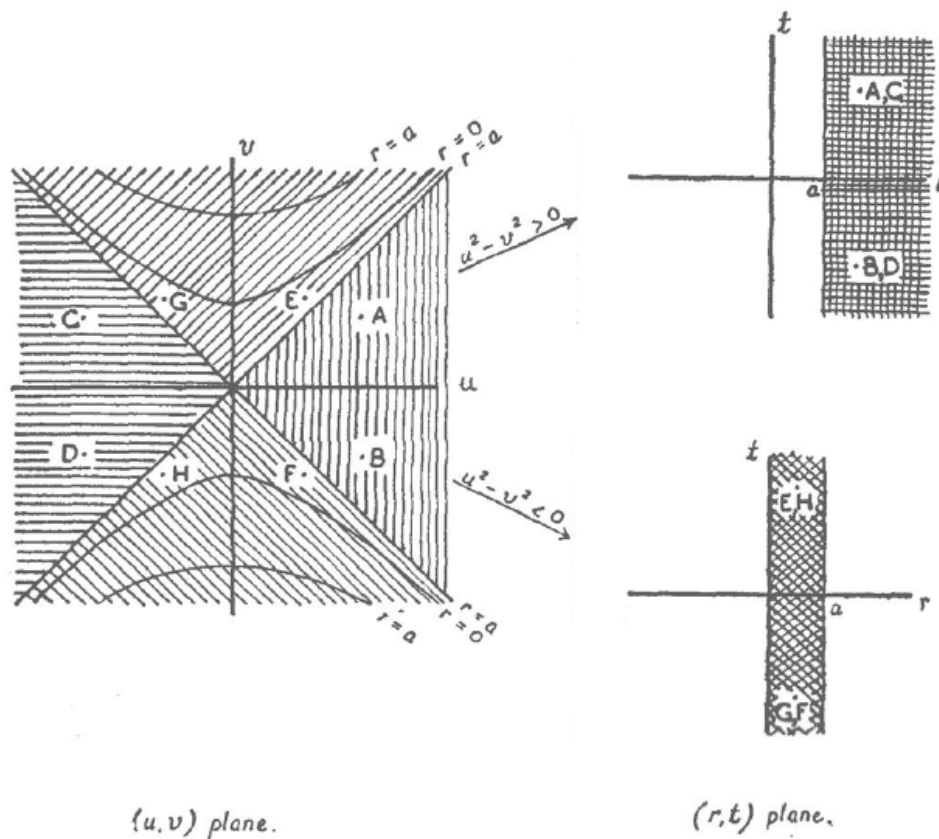


Figura 1: Com a notação adaptada, a figura ilustra o mapeamento entre os planos (u', v') e (r, t) , de acordo com Synge. Extraído de [41].

na Divisão de Estudos Teóricos do CERN, em Genebra. Fronsdal também foi alertado durante as provas de seu artigo por Finkelstein e John A. Wheeler que esta extensão havia sido encontrada previamente por Martin Kruskal. Ela hoje em dia é considerada a extensão analítica máxima da solução de Schwarzschild.

5.3 Extensão analítica máxima: Kruskal e Szekeres

A publicação de Kruskal [44] veio no ano seguinte, em 1960, mas não foi escrita por ele. John Wheeler, colega de Kruskal na Universidade de Princeton, conhecia os resultados de Kruskal já há algum tempo e, depois de testemunhar outras pessoas trabalhando no assunto, decidiu formalizar o que Kruskal tinha comunicado a ele num artigo, no qual ele indicou autoria solo de Martin Kruskal. O autor só descobriu quando recebeu o aceite da revista e insistiu para que Wheeler fosse coautor, mas este não achou necessário.

Apontando Synge como referência, o artigo de-

fine coordenadas (u, v) tal que o elemento de linha seja,

$$ds^2 = f^2(-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (27)$$

onde,

$$u = \left[\left(\frac{r}{a} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{2a} \right) \cosh \left(\frac{t}{2a} \right);$$

$$v = \left[\left(\frac{r}{a} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{2a} \right) \sinh \left(\frac{t}{2a} \right);$$

$$f^2 = \left(\frac{4a^3}{r} \right) \exp \left(-\frac{r}{a} \right).$$

A topologia da solução é similar a de Synge, representada na Figura 1. Com as coordenadas de Kruskal, é possível visualizar uma região da qual nada pode escapar, ou seja, um buraco negro. Mas há outras regiões que não são perceptíveis de imediato se considerarmos as coordenadas de Droste-Schwarzschild, como, por exemplo, uma região onde nada pode permanecer (um buraco branco!) e seções do espaço-tempo completamente isoladas uma da outra.

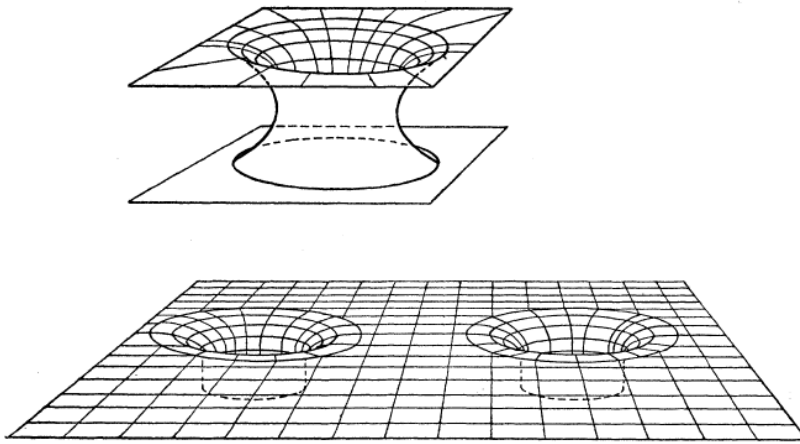


FIG. 1. Two interpretations of the 3-dimensional “maximally extended Schwarzschild metric” at the time $T=0$. Above: A connection or bridge in the sense of Einstein and Rosen between *two* otherwise Euclidean spaces. Below: A wormhole in the sense of Wheeler connecting two regions in *one* Euclidean space, in the limiting case where these regions are extremely far apart compared to the dimensions of the throat of the wormhole.

Figura 2: Interpretação da topologia da extensão máxima de Kruskal por Wheeler. Extraído de [44]. A legenda original diz, “Duas interpretações da extensão máxima da métrica de Schwarzschild 3-dimensional no tempo $T = 0$. Acima: A conexão ou ponte como descrito por Einstein e Rosen entre *dois* planos Euclidianos. Abaixo: Um buraco de minhoca como descrito por Wheeler, conectando duas regiões de *um* espaço Euclidianos, no caso limite em que estas regiões estão extremamente longe uma da outra comparado às dimensões da garganta do buraco de minhoca.”

Neste artigo de Kruskal, mesmo apontando que a origem do sistema das coordenadas de Droste-Schwarzschild, $(u^2 - v^2) = 0$ nas coordenadas de Kruskal, é uma singularidade real da solução, a interpretação do espaço-tempo nesta extensão máxima no artigo foi como uma topologia de buraco de minhoca ou ponte de Einstein-Rosen. A solução de Schwarzschild seria, então, uma solução de buraco de minhoca (Figura 2). É nesta interpretação que a influência de Wheeler se manifesta, pois, na época, ele era averso à ideia do colapso gravitacional de estrelas. Posteriormente, Wheeler se tornaria um dos maiores entusiastas sobre o assunto. Em 1967, ele adotou o termo o termo *buraco negro* como nomenclatura técnica [45], quando ele era até então usado de forma metafórica. Isso ajudou a popularizar o conceito.

No mesmo ano e no outro extremo do mapamundi, Gy. Szekeres, em Adelaide, Austrália, publicou de forma independente a mesma extensão que Kruskal num artigo bem detalhado cujo objetivo era discutir a natureza das singularidades da solução de Schwarzschild [46]. O trabalho de 1950 de Synge também é citado por Szekeres, que aborda o problema com o mesmo cuidado e analiticidade que Synge. Ao contrário de Finkelstein, Fronsdal e Wheeler, Szekeres não tomou conhecimento da extensão de Kruskal em comunicações privadas. Assim, como ambas as publicações saíram no mesmo ano, as coordenadas desta extensão analítica máxima (27) são hoje conhecidas como coordenadas de Kruskal-Szekeres.

6 As últimas soluções: Kerr e Newman

Com o retorno do interesse pela relatividade geral após o final da guerra, o chamado renascimento da relatividade geral [47], novas soluções da equação de Einstein apareceram. Em 1963, Roy Kerr encontrou a solução para um campo gravitacional de um objeto esfericamente simétrico em rotação [48].

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2Mr^3}{(r^4 + a^2z^2)}(d\omega)^2, \quad (28)$$

onde,

$$d\omega = \frac{r(xdx + ydy) + a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + dt, \quad (29)$$

e a função r é tal que,

$$r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0, \quad (30)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (31)$$

Essa solução é analítica em todos os lugares menos $R^2 = r - S$ e $z = 0$. Kerr compara a expansão da solução com a aproximação de Einstein-Infeld-Hoffman de terceira ordem de uma partícula em rotação e identifica Ma com o momento angular da estrela ao redor do eixo z . Ao final do artigo, Kerr comenta que seria interessante calcular a solução para o interior do raio singular,

mostrando que estava ciente que sua solução não era uma extensão máxima.

Na mesma época, o físico americano Ezra Theodore Newman estava estudando as soluções de Schwarzschild e encontrou generalizações para a métrica de vácuo [49]. Dois anos depois, ele e seu colaborador Allen Janis publicaram um artigo com uma derivação mais detalhada para a métrica de Kerr [50], usando um método de tetradas para descrever a rotação. Este foi o prelúdio para um segundo artigo de Newman e colaboradores, descrevendo a solução para uma massa esfericamente simétrica em rotação e carregada [51].

Partindo da solução de Reissner-Nordström em coordenadas nulas (\bar{u}, r) (com a assinatura da métrica trocada),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) d\bar{u}^2 + 2d\bar{u}dr - r^2 d\Omega^2,$$

e utilizando a mesma estratégia que utilizou para derivar a solução de Kerr para um corpo massivo em rotação, Newman e colaboradores encontraram,

$$\begin{aligned} ds^2 &= 1 + \Sigma^{-1}(e^2 - 2Mr)d\bar{u}^2 + d\bar{u}dr \\ &+ \Sigma^{-1}(a \sin^2\theta)(2Mr - e^2)d\bar{u}d\phi \\ &- a \sin^2\theta drd\phi - \Sigma d\theta^2 - \sin^2\theta [r^2 + a^2 \\ &+ a\Sigma^{-1}(a \sin^2\theta)(2Mr - e^2)] d\phi^2, \end{aligned} \quad (32)$$

com $\Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2\theta$. A solução para um carga massiva em rotação ficou conhecida como *solução de Kerr-Newman*.

Não demorou muito até que uma extensão máxima analítica fosse encontrada para a solução de Kerr [52]. Robert H. Boyer e Robert W. Lindquist publicaram o seu artigo *A Extensão Analítica Máxima da Métrica de Kerr* em 1967, onde eles fazem uma revisão de algumas extensões da solução de Schwarzschild e, em seguida, reescrevem a métrica de Kerr com coordenadas “tipo-Schwarzschild”,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\bar{\phi}^2 \\ &- d\bar{t}^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (a^2 \sin^2\theta d\bar{\phi} + d\bar{t})^2, \end{aligned} \quad (33)$$

onde r, θ são os mesmos que nas coordenadas de Droste-Schwarzschild e $\bar{t}, \bar{\phi}$ se relacionam com t, ϕ de (6) da seguinte forma,

$$d\bar{\phi} = d\phi + a \frac{dr}{\Delta}; \quad (34)$$

$$d\bar{t} = dt - 2M \frac{dr}{\Delta}, \quad (35)$$

e $\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2$. Estas são conhecidas como *coordenadas de Boyer-Lindquist*.

Em seguida, Boyer e Lindquist apresentaram as coordenadas “tipo-Kruskal”, obtendo uma extensão máxima para a solução de Kerr. Porém, o elemento de linha que eles apresentam é “muito carregado para ser utilizado”, segundo os autores [52, p. 274]. Analisando a analiticidade da solução e descartando termos de ordem a^2 da solução, Boyer e Lindquist obtiveram:

$$\begin{aligned} ds^2 &\sim r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{32M^3}{r \exp\left(\frac{r}{2M}\right)} \\ &\times (du^2 - dv^2) + \frac{4a \sin^2\theta}{r \exp\left(\frac{r}{2M}\right)} (r^2 + 2Mr \\ &+ 4M^2)d\phi(vdu - udv). \end{aligned} \quad (36)$$

Mais ou menos nesta mesma época, surgiu a conjectura de que um buraco negro é completamente caracterizado por sua carga, massa e momento angular. Este se tornou conhecido com o *Teorema No-hair*, que se traduz do inglês como Teorema Sem-Cabelo. Este nome foi cunhado por Wheeler, que descreveu tal resultado como “o buraco negro não possui cabelos”, significando que eles não possuem características distintas além destas três (massa, carga e momento angular) [53, p. 876]. Uma prova simplificada deste teorema foi providenciada por Werner Israel em 1967 [54] para o caso do buraco negro de Schwarzschild e posteriormente generalizada para os casos dos buracos negros carregados e em rotação [55, 56]. A versão mais geral ainda não foi provada, mas, segundo a conjectura, as soluções de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman descrevem completamente qualquer buraco negro.

7 Conclusão

Este artigo apresentou uma revisão sobre as soluções de massas pontuais da relatividade geral, que são soluções exatas para as equações de campo de Einstein de um sistema esfericamente simétrico de um corpo massivo adimensional. Apresentamos o tema através de uma introdução histórica, mostrando como o estudo de tais soluções modificou nossa compreensão sobre o próprio formato do universo. O objetivo foi apresentar o tema de forma a auxiliar jovens pesquisadores e professores que buscam iniciar seus estudos sobre buracos negros e gravitação.

Para isto, iniciamos o artigo expondo a versão Newtoniana dos buracos negros, as estrelas invisíveis. Apresentamos os argumentos utilizados pelos filósofos naturais John Michell e Pierre-Simon de Laplace para deduzir que poderia haver estrelas no céu cuja luz não conseguiríamos ver. Também mostramos possíveis razões do porquê esta ideia foi descartada.

Em seguida, acompanhamos os desenvolvimentos históricos das soluções de massa puntual da relatividade geral. De 1916 até 1965, a evolução do entendimento sobre o campo gravitacional de massas puntuais foi consistente, mas esparsa. No período desde a concepção da teoria final em 1915 até meados da década de 1920, a relatividade geral ainda estava em sua infância. A teoria da gravitação de Einstein recebeu muita crítica por sua natureza abstrata. Ela depende de um formalismo matemático avançado, que não era dominado pela comunidade física na época. Nestes anos formativos da teoria, a discussão sobre a validade da relatividade geral prevalecia, com alegações de que a solução de Schwarzschild tinha uma física diferente da de Newton. Esta má-concepção foi desmistificada posteriormente.

Mesmo aqueles que aceitaram a relatividade geral desde o começo enfrentaram desafios com a solução de Schwarzschild. Em primeiro lugar, a idealização ao desconsiderar as dimensões do objeto que seria a fonte do campo gravitacional era embaraçosa, afinal a existência física de objetos sem dimensão desafiava o bom senso. Além disso, a solução continha duas singularidades, uma localizada na origem do sistema de coordenadas e outra radial. O estudo destas foi inicialmente postergado, com a alegação de que não existiria um objeto compacto o suficiente que permitisse essa região com as singularidades de existir. O centro de massa e o raio singular estariam para sempre enterrados na estrela ou na partícula geradora do campo. Esta descrença atrasou as investigações das propriedades mais inusitadas destas soluções de massa puntual por várias décadas.

Apenas após a Segunda Guerra Mundial que toda as implicações das soluções de Schwarzschild foram desvendadas. Nesta época, o conhecimento sobre a relatividade geral já tinha amadurecido e as primeiras indicações observacionais de objetos compactos apareceram. A ideia de que buracos negros pudessem existir já não era mais tão absurda. Então, se tornou fundamental estudar as

soluções de massas puntuais por completo, desvendando todas as propriedades escondidas pela escolha inicial de coordenadas. Foi então que surgiram diversos estudos sobre extensões analíticas das soluções. A versão mais completa da solução apresenta uma topologia mais intrincada, com duas singularidades reais, um buraco negro e um buraco branco. O raio de Schwarzschild, uma singularidade aparente, permite que objetos entrem na região interior ao buraco negro, mas não permite que escapem. Entende-se que diferentes coordenadas para a mesma solução indicam uma mudança de referencial e não uma física diferente.

Enfim, as últimas soluções de massas puntuais foram encontradas na década de 1960, para uma massa em rotação e com carga. Hoje sabemos que a solução de Schwarzschild descreve um buraco negro sem carga e estático, a solução de Reissner-Nordström descreve um buraco negro carregado, a solução de Kerr descreve um buraco negro em rotação e, por fim, a solução de Kerr-Newman descreve buracos negros carregados e em rotação. Assim, segundo o teorema *No-Hair*, conhecemos como a gravidade se comporta em todos os tipos de buracos negros.

Sobre a autora

Carla R. Almeida (cralmeida00@gmail.com) é Mestre em Matemática e Doutora em Física pela Universidade do Espírito Santo. No momento em que este artigo foi escrito, ela era pesquisadora pós-doutoranda no Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Atualmente, ela é professora visitante na Universidade Federal do ABC e atua nas áreas de gravitação quântica e história da física do século XX.

Referências

- [1] A. Einstein, *A new formal interpretation of Maxwell's field equations of electrodynamics*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 184 (1916). Disponível em <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/144>, acesso em fev. 2023.
- [2] J. Michell, *On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars*,

- in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose*, *Philos. Trans.* **LX-XIV**, 35 (1783).
- [3] A. Ghez, *A descoberta de um buraco negro supermassivo no centro da nossa galáxia*, in *Anais do I Encontro Brasileiro de Meninas e Mulheres da Astrofísica, Gravitação e Cosmologia - As Astrocientistas*, editado por C. R. Almeida et al. (Blucher, 2022), 1–8.
- [4] P. S. Laplace, *Exposition du Système du Monde* (De l’Imprimerie du Cercle-Social, 1796).
- [5] C. Montgomery, W. Orchiston e I. Whittingham, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, *Journal of Astronomical History and Heritage* **12**(2), 90 (2009). Disponível em https://drive.google.com/file/d/1c582Q154aCZsMky_uoNEgOP18cGwmH_x/view, acesso em fev. 2023.
- [6] T. Young, *II. The Bakerian Lecture. On the theory of light and colours*, *Phil. Trans. R. Soc.* **92**, 12–48 (1802). Disponível em <https://www.jstor.org/stable/107113>, acesso em fev. 2023.
- [7] O. F. Piattella, *O artigo fundador da teoria da relatividade restrita: Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*, *Cadernos de Astronomia* **1**(1), 157–176 (2020).
- [8] J. Eisenstaedt, *Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild (1915-1923)*, *Archive for History of Exact Science* **27**, 157 (1982).
- [9] L. Verstraelen, *A concise mini history of geometry*, *Kragujevac Journal of Mathematics* **38**(1), 5–21 (2014). Disponível em https://imi.pmf.kg.ac.rs/kjm/pub/14040466060549_1_a_concise_mini_history_of_geometry.pdf, acesso em fev. 2023.
- [10] K. Schwarzschild, *Ueber das zulaessige Krummungsmaass des Raumes*, *Vierteljahrsschrift d. Astronom. Gesellschaft* **35**, 337 (1900).
- [11] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, phy.-math. Klasse* 189–196 (1916).
- [12] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, *Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, phy.-math. Klasse* **24**, 424 (1916).
- [13] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory* (1999), translation by S. Antoci and A. Loinger. [ArXiv:physics/9905030](https://arxiv.org/abs/physics/9905030).
- [14] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a sphere of incompressible liquid, according to Einstein’s theory*, *The Abraham Zelmanov Journal* **1** (2008), translation by Larissa Borissova and Dmitri Rabounski. Disponível em <http://www.ptep-online.com/zelmanov/papers/zj-2008-04.pdf>, acesso em fev. 2023.
- [15] J. Droste, *The field of a single centre in Einstein’s theory of gravitation, and the motion of a particle in that field*, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences* **19**, 197 (1917).
- [16] H. Weyl, *Zur Gravitationstheorie*, *Annalen der Physik* **359**, 117 (1917).
- [17] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, *Annalen der Physik* **355**, 106 (1916).
- [18] G. Nordström, *On the energy of the gravitation field in Einstein’s theory*, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences* **20**, 1238 (1918).
- [19] G. B. Jeffery, *The field of an electron on Einstein’s theory of gravitation*, *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **99**, 123 (1921).

- [20] O. R. Baldwin e G. B. Jeffery, *The relativity theory of plane waves*, [Proceedings of the Royal Society of London Series A](#) **111**, 95 (1926).
- [21] L. C. B. Crispino, *Expedição do Observatório Real de Greenwich para Sobral em 1919 - anotações tomadas pela Comissão Britânica*, [Revista Brasileira de Ensino de Física](#) **41** (2019).
- [22] C. Earman, John; Glymour, *Relativity and Eclipses: the British eclipse expeditions of 1919 and their predecessors*, [Historical Studies in the Physical Sciences](#) **11**(1), 49 (1980).
- [23] P. Painlevé, *La mécanique classique et la théorie de la relativité*, Académie de Sciences 6–9 (1921).
- [24] P. Painlevé, *La gravitation dans la mécanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein*, Académie de Sciences **173**(20), 873 (1921).
- [25] J. G. Ravin, *Gullstrand, Einstein, and the Nobel Prize*, [Archives of Ophthalmology](#) **117**(5), 670 (1999).
- [26] A. Gullstrand, *Allgemeine Lösung des Statistischen Einkörperproblem in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik](#) **16**(8), 1 (1921).
- [27] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics* (Harvard University Press, 1923).
- [28] A. N. Whitehead, *The principle of relativity with applications to physical science* (Cambridge University Press, 1922).
- [29] A. S. Eddington, *A comparison of Whitehead's and Einstein's formulæ*, [Nature](#) **113**(2832), 192 (1924).
- [30] A. S. Eddington, *On the relation between the masses and luminosities of stars*, [Monthly Notices of the Royal Astronomical Society](#) **84**, 308 (1924).
- [31] C. R. Almeida, *Stellar equilibrium vs. gravitational collapse*, [European Physical Journal H](#) (2020).
- [32] G. Lemaître, *L'univers en expansion*, [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles](#) **A53**(51) (1933).
- [33] Y. Hagihara, *Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild*, [Japanese Journal of Astronomy and Geophysics](#) **8**, 67 (1931).
- [34] H. P. Robertson e T. W. Noonan, *Relativity and cosmology* (Saunders, 1968).
- [35] A. Einstein e N. Rosen, *The particle problem in the general theory of relativity*, [Physical Review](#) **48**, 73 (1935).
- [36] A. Einstein, *On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses*, [Annals of Mathematics](#) **40**(4), 922 (1939).
- [37] J. R. Oppenheimer e R. Serber, *On the stability of stellar neutron cores*, [Physical Review](#) **54**, 540 (1938).
- [38] J. R. Oppenheimer e G. Volkoff, *On massive neutron cores*, [Physical Review](#) **55**, 374 (1939).
- [39] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, *On continued gravitational contraction*, [Physical Review](#) **56**, 455 (1939).
- [40] C. R. Almeida, *A Pré-História dos Buracos Negros*, [Revista Brasileira de Ensino de Física](#) **42** (2020).
- [41] J. L. Synge, *The gravitational field of a particle*, [Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences](#) **53**(6), 83 (1950). Disponível em <https://www.jstor.org/stable/20488511>, acesso em fev. 2023.
- [42] D. Finklestein, *Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle*, [Physical Review](#) **110**, 965 (1958).
- [43] C. Fronsdal, *Completion and embedding of the Schwarzschild solution*, [Physical Review](#) **116**, 778 (1959).
- [44] M. D. Kruskal, *Maximal extension of Schwarzschild metric*, [Physical Review](#) **119**, 1743 (1960).
- [45] C. A. R. Herdeiro e J. P. S. Lemos, *O buraco negro cinquenta anos depois: a gênese do nome* (2018). Disponível em <https://www.spf.pt/magazines/GFIS/>

- [392/article/1087/pdf](#), acesso em fev. 2023.
- [46] G. Szekeres, *On the singularities of a Riemannian manifold*, [Publicaciones Mathematicae Debrecen](#) **7**, 285 (1960), reprinted on *General Relativity and Gravitation*, Vol. 34, No. 11, 2002.
- [47] A. S. Blum, R. Lalli e J. Renn, *The renaissance of General Relativity : how and why it happened*, [Ann. Phys.](#) **528**(5), 344 (2016).
- [48] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, [Phys. Rev. Lett.](#) **11**, 237 (1963).
- [49] E. Newman, L. Tamburino e T. Unti, *Empty-space generalization of the schwarzschild metric*, [Journal of Mathematical Physics](#) **4**(7), 915 (1963).
- [50] E. T. Newman e A. I. Janis, *Note on the kerr spinning-particle metric*, [Journal of Mathematical Physics](#) **6**(6), 915 (1965).
- [51] E. T. Newman et al., *Metric of a rotating, charged mass*, [Journal of Mathematical Physics](#) **6**(6), 918 (1965).
- [52] R. H. Boyer e R. W. Lindquist, *Maximal analytic extension of the kerr metric*, [Journal of Mathematical Physics](#) **8**(2), 265 (1967).
- [53] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, 1973).
- [54] W. Israel, *Event horizons in static vacuum space-times*, [Phys. Rev.](#) **164**, 1776 (1967).
- [55] W. Israel, *Event horizons in static electrovac space-times*, *Communications in Mathematical Physics* **8**, 245 (1968).
- [56] B. Carter, *Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom*, [Phys. Rev. Lett.](#) **26**, 331 (1971).