

A termodinâmica de buracos negros

Tiago V. Fernandes

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Portugal

Resumo

Buracos negros existem em todo lado no nosso universo. Segundo a relatividade geral, estes objetos são clássicos e não emitem qualquer radiação, são negros. No entanto, quando se considera campos quânticos, verifica-se que os buracos negros são na realidade objetos termodinâmicos e que não são assim tão negros. Neste artigo, fazemos a exposição de como um buraco negro é termodinâmico. Primeiro, fazemos uma exposição breve da descrição clássica dos buracos negros e as suas quatro leis de mecânica. Depois, fazemos a exposição dos primeiros trabalhos que avançaram a ideia de que os buracos negros são termodinâmicos. Finalmente, fazemos a exposição do formalismo que permite tratar a termodinâmica de espaços-tempos contendo buracos negros e referimos muito brevemente a sua investigação recente.

Abstract

Black holes are present everywhere in our universe. According to general relativity, these objects are classical and don't emit any radiation, they are in fact black. Nevertheless, when quantum fields are considered, it turns out that black holes are thermodynamic objects and so there are not that black. In the article, we briefly give the classical description of black holes and its four laws of mechanics. We also present the first papers that pushed forward the idea that black holes are thermodynamic objects. At last, we present the formalism that allows the treatment of thermodynamics of spacetimes containing black holes and we also present very briefly the current investigation in this area.

Palavras-chave: buracos negros, horizonte de eventos, termodinâmica, entropia, ensemble canônico, cavidade
Keywords: black holes, event horizon, thermodynamics, entropy, canonical ensemble, cavity

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v4n1.39893](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v4n1.39893)

1 Introdução

Buracos negros parecem existir em toda a parte no nosso universo. Acredita-se que no centro de cada galáxia exista um buraco negro supermassivo, mas não só, que existem diversos sistemas estelares com buracos negros. Exemplos destes sistemas são binárias envolvendo buracos negros, que coalescem num só buraco negro.

A sua existência foi primeiramente verificada no papel, como uma solução da teoria mais aceita que descreve a gravidade, a teoria da relatividade geral [1]. Apenas recentemente, foi possível observar os efeitos da existência destes objetos através da observação do sistema estelar no centro da nossa galáxia [2], pelo interferômetro GRAVITY, e incrivelmente, foi possível obter a imagem da sombra do que se pensa serem dois buracos negros supermassivos, um no centro da galáxia M87 [3] e o outro no centro da nossa galáxia [4], pelo Telescópio de Horizonte de Eventos (EHT). Adicionalmente, têm sido detetadas ondas gravitacionais

provenientes da coalescência de binárias de objetos compactos, como por exemplo de buracos negros ou de estrelas de neutrões, através dos interferômetros LIGO e Virgo. Até agora, as observações como estas apontam para que a teoria da relatividade geral esteja correta. As observações futuras destes objetos no nosso universo serão importantes para testar continuamente a teoria da relatividade geral.

No entanto, existem dificuldades teóricas quando se tenta juntar relatividade geral com a teoria de partículas descrita pela teoria quântica de campos, isto porque a primeira é uma teoria clássica e a segunda é uma teoria quântica. Portanto, a descrição de um buraco negro através da relatividade geral pode não nos dar o panorama completo do que é um buraco negro.

Uma evidência teórica de que um buraco negro pode não ser descrito totalmente pela teoria da relatividade geral foi dada por Bekenstein [5] e Hawking [6]. Nestes dois trabalhos de referência,

foi verificado que um buraco negro pode ter entropia, a chamada entropia de Bekenstein-Hawking, e que um buraco negro emite radiação, a chamada radiação de Hawking. Portanto, um buraco negro parece ser um objeto termodinâmico.

A natureza da ligação entre a termodinâmica e a gravidade é ainda desconhecida. É possível que exista uma teoria quântica da gravidade que possa não só ligar a gravidade à teoria de partículas existente mas também que possa explicar a entropia de um buraco negro. Em alternativa, pode ser possível a existência de campos fundamentais adicionais que possam explicar os graus de liberdade que originam a entropia de um buraco negro. Esta é de fato uma fronteira da física atual, que pode ser expandida através do estudo dos buracos negros e o desenvolvimento de ferramentas para observação astronômica mais precisa de regiões próximas de buracos negros.

Neste artigo, vamos abordar a termodinâmica de buracos negros. Mais precisamente, vamos discutir sobre buracos negros descritos pela relatividade geral, as suas propriedades, nomeadamente das quatro leis da mecânica de buracos negros, e os trabalhos de referência que descrevem o buraco negro como um objeto termodinâmico. Finalmente, apresentamos brevemente a situação atual de investigação nesta matéria.

2 Buracos negros clássicos

2.1 Relatividade geral

Como foi dito na introdução, o conceito de buraco negro surgiu primeiro do estudo das soluções da teoria da relatividade geral. Antes de apresentar brevemente o que são buracos negros, precisamos de apresentar o conceito de gravidade em relatividade geral e como é que estes objetos se podem formar.

De acordo com a relatividade geral, nós vivemos numa realidade com uma dimensão de tempo e três dimensões de espaço, quatro dimensões no total - embora existem outras teorias que assumem um número superior de dimensões. A dimensão de tempo não é absoluta, isto é, o tempo está em pé de igualdade com as outras três dimensões de espaço. A esta realidade com quatro dimensões chamamos de espaço-tempo. Neste espaço-tempo, a energia/informação não pode viajar a uma velocidade superior à velocidade da

luz. Neste contexto, a relatividade geral tem um conceito lindo do que é a gravidade. A presença de energia, podendo ser um simples objeto ou um campo, deforma o espaço-tempo, curvando-o. Como o espaço-tempo é curvo, objetos e campos que existem no espaço-tempo movem-se na trajetória de menor ação, que depende da curvatura do espaço-tempo. John A. Wheeler resumiu esta relação entre matéria e curvatura do espaço-tempo da melhor forma: “*matter tells spacetime how to curve, and spacetime tells matter how to move*” [7], ou seja a matéria diz ao espaço como se curva, e o espaço diz à matéria como se move. Portanto, a gravidade é uma relação geométrica entre a matéria e a curvatura do espaço-tempo. Esta relação é descrita pelas equações de Einstein, juntamente com as equações de movimento da matéria, estando ambas acopladas.

A visualização deste efeito pode ser alcançado através da analogia da toalha de mesa esticada com, por exemplo, uma maçã no centro da toalha. Consideremos que um grupo de pessoas segura uma toalha na Terra e estica-a até esta ficar plana. Se uma maçã for pousada no centro da toalha, devido à gravidade causada pela Terra, a toalha deforma-se até a tensão da toalha contrabalançar o peso da maçã. Se porventura uma ervilha for atirada para a toalha, a ervilha não continua em linha reta. Em vez disso, a ervilha vai orbitar a maçã devido à deformação da toalha. Esta é uma analogia muito simplificada do efeito da gravidade e do que acontece em sistemas planetários, em que a maçã é uma estrela, a ervilha é um planeta e a toalha é o espaço-tempo.

2.2 A origem de um buraco negro

Consideremos agora o caso de uma estrela no espaço-tempo. A estrela mantém o seu equilíbrio através da pressão originada pelas reações nucleares que compensa a atração gravitacional própria da estrela. Nos momentos iniciais da morte da estrela, esta pressão diminui, sendo que o combustível principal das reações nucleares (o Hidrogênio) acaba, e a atração gravitacional ganha. A partir desse momento, uma série de processos ocorrem, mas no contexto deste artigo, o importante é o que acontece ao núcleo da estrela. O núcleo da estrela colapsa, cai sobre si mesmo, devido à atração gravitacional própria. Se esta atração for mais forte que a pressão de degenerescência de neutrões, então nada consegue parar o colapso. É

nestas condições que um buraco negro se forma.

Com o propósito de simplificar, pode-se considerar uma estrela como uma bola esférica de poeira, descrita por um fluido perfeito. Para esta configuração, a estrela pode estar em equilíbrio até uma dada compactidade, isto é, quando $\frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}$, onde aqui M é a massa da estrela, R é o raio da mesma, G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz. Este limite é um resultado do teorema de Buchdahl [8] e é também chamado de limite de Buchdahl. Se a compactidade da estrela ultrapassa este limite, a pressão do fluido não consegue contrabalançar a atração própria da estrela e por isso dá-se o colapso. Como se trata de uma estrela de poeira, neste caso não há supernova porque toda a poeira colapsa.

Durante o colapso (Fig. 1), e assumindo simetria esférica [9], a estrela de poeira contrai-se enquanto que a sua densidade aumenta. Existe um momento em que a “superfície” da estrela alcança o seu próprio raio gravitacional. Pode-se pensar neste raio gravitacional como o raio ao qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz, isto é, estando um objeto neste raio gravitacional, o objeto consegue-se escapar da atração da estrela apenas se sair com uma velocidade igual ou superior à da velocidade da luz. Ora, como é impossível isto acontecer para um objeto com massa, o objeto não consegue escapar à atração da estrela e cai com o colapso. Assim, é neste raio gravitacional que está localizado o horizonte de eventos. Precisamente neste momento, é impossível de observar qualquer evento que aconteça dentro da estrela ou na sua superfície por um observador distante, já que a estrela se encontra para lá do horizonte de eventos.

A estrela de poeira, para lá do horizonte de eventos, continua a colapsar. Num tempo próprio finito, a estrela cada vez mais se contrai até que a sua densidade e a curvatura do espaço-tempo divergem. Toda a matéria da estrela alcança uma singularidade, um ponto em que a curvatura do espaço-tempo diverge. A física que nós conhecemos e a descrição dada pela relatividade geral é quebrada na singularidade e por isso aquilo que acontece na singularidade é desconhecido. Para perceber o que realmente acontece nos momentos finais do colapso da estrela, existe a necessidade de uma teoria quântica da gravidade.

O objeto remanescente do colapso é um buraco negro, uma região do espaço-tempo do qual

é impossível escapar. A fronteira do buraco-negro com o resto do espaço-tempo é o horizonte de eventos que se localiza no raio gravitacional da estrela que colapsou. Algo que ultrapasse o horizonte de eventos, ou seja que entra no buraco negro, tem como destino certo cair para a singularidade no centro do buraco negro e eventualmente é destruído, até mesmo se este algo seja a luz. Uma propriedade da região de buraco negro é a existência de superfícies aprisionadas. Os raios de luz ortogonais a estas superfícies de topologia esférica, mesmo que saiam na direção de tentar escapar do buraco negro, são sempre defletidos de tal maneira que invertem a sua direção e caem para a singularidade. Se a superfície for evoluída no tempo ao longo dos raios de luz ortogonais, a superfície cai para a singularidade e o que dá a origem ao nome de superfície aprisionada.

No entanto, a influência gravitacional do buraco negro no resto do espaço-tempo, isto é fora do buraco negro, é idêntico ao da estrela que tinha massa M e por consequência afirma-se que o buraco negro originado possui uma massa M . De fato, se houver a substituição do Sol por um buraco negro com massa igual à do Sol no nosso sistema solar, as órbitas dos planetas e asteroides não são alteradas, se se desprezar a rotação própria do Sol. Estes buracos negros são soluções de vácuo das equações de Einstein, ou seja são puramente geométricos, o que pode levar à questão da localização da massa do buraco negro. De certa forma, pode-se pensar que a informação da massa deve estar ligada à existência da singularidade, no entanto é necessário ter cuidado com a afirmação de que a massa está na singularidade porque é impossível de descrever o que existe na singularidade com o formalismo existente.

O colapso gravitacional é a origem principal de buracos negros com massas estelares, com massas até 10^2 massas solares, ou seja, 10^2 vezes a massa do Sol. No entanto, como foi referido na introdução, existem observações que apoiam fortemente a existência de buracos negros supermassivos e este mecanismo de colapso gravitacional não consegue explicar a formação destes objetos que têm massas superiores a 10^5 massas solares. É possível que através de acreção de matéria ou poeira e através da coalescência com outros buracos negros, buracos negros com massas estelares cresçam até uma massa intermédia, no intervalo de 10^2 a 10^5 massas solares. No entanto, tendo

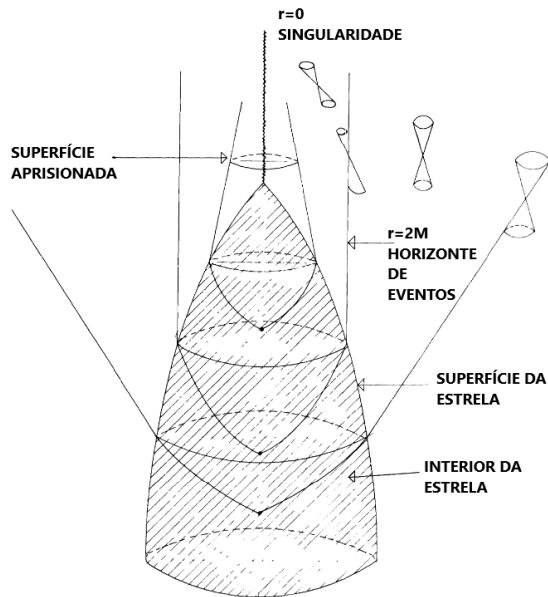


Figura 1: Esquema da formação de um buraco negro através do colapso de uma estrela esféricamente simétrica. O eixo vertical do esquema representa a coordenada de tempo e o eixo horizontal do esquema representa a coordenada radial. A matéria converge para a singularidade e o buraco negro forma-se.

em conta a idade do universo e a taxa de crescimento dos buracos negros através destes dois mecanismos, só em situações muito específicas é que existe um crescimento suficiente para que o buraco negro seja supermassivo. Existem várias propostas para a formação destes buracos negros supermassivos, por exemplo o colapso direto de nuvens de poeira muito massivas através de um mecanismo de perda de momento angular da nuvem [10] ou através da coalescência de múltiplos buracos negros que através de fricção dinâmica migram para o centro da galáxia [11]. De fato, o mecanismo de formação destes objetos ainda é uma área de estudo ativa e espera-se que, juntamente com as capacidades observacionais do LIGO/Virgo e dos futuros interferômetros LISA e Einstein Telescope, será possível perceber a origem destes objetos supermassivos.

2.3 Os buracos negros não têm cabelo

Um buraco negro originado do colapso de uma estrela com simetria esférica apenas depende de um parâmetro, a massa da estrela que colapsou, M , e é descrito pela solução de Schwarzschild. No entanto, se a condição de simetria esférica for relaxada, o buraco negro pode ter rotação e depende do seu momento angular, J . Este bu-

raco negro, por sua vez, é descrito pela solução de Kerr. Finalmente, podemos considerar um espaço-tempo permeado pelo campo electromagnético e assim o buraco negro pode ter carga elétrica, Q . No fundo, em relatividade geral, o buraco negro é descrito apenas por estes três parâmetros M , J e Q , segundo o teorema de ausência de cabelo [12] (*no-hair theorem*). A solução geral que descreve um buraco negro com estes três parâmetros tem o nome de solução de Kerr-Newmann. Toda a informação restante sobre a matéria que colapsou e que originou o buraco negro fica inacessível ao observador distante, pois apenas estes três parâmetros estão presentes na curvatura do espaço-tempo. Este teorema é apenas válido considerando a teoria de relatividade geral. Existem teorias alternativas, por exemplo, com campos adicionais, em que o buraco negro é descrito por mais parâmetros mas tais teorias não estão no âmbito do artigo.

A morfologia de buracos negros carregados eletricamente e com rotação é diferente do buraco negro esféricamente simétrico. Por exemplo, se um objeto ultrapassar o horizonte de eventos e assim entrar num buraco negro em rotação, o objeto vai de encontro com outro horizonte dentro do buraco negro, chamado de horizonte de Cauchy. Para lá deste horizonte, não é possível prever o que acontece devido ao fato que a evolução das equações de Einstein terminam neste horizonte. No entanto, pode-se ainda estender a solução de Kerr para lá deste horizonte, onde há uma singularidade em anel.

No seguimento deste artigo, apenas será necessário a noção do teorema de ausência de cabelo e do horizonte de eventos.

3 As quatro leis de mecânica de buracos negros

3.1 Leis de buracos negros estacionários

Neste contexto, os buracos negros em que o teorema de ausência de cabelo é válido são estacionários. Esta condição implica que o buraco negro e o espaço-tempo que o descreve são invariantes sobre translações da coordenada de tempo. A existência desta simetria, embora pareça restritiva, é comum no nosso universo já que sistemas que alcançam o equilíbrio são estacionários. Um exemplo destes buracos negros são os esta-

dos finais do colapso de uma estrela. A partir destas soluções, podem-se considerar perturbações do espaço-tempo e avaliar as propriedades dos buracos negros. Em 1973, Bardeen, Carter e Hawking [13] formularam as quatro leis de buracos negros estacionários que são chamadas as quatro leis de mecânica de buracos negros e resumem as propriedades destes buracos negros. É de referir que a maioria destas leis já tinham sido obtidas para certos casos ou até mesmo na generalidade antes do artigo [13].

3.2 Lei zero

Antes de enunciar a lei zero do buraco negro, é intuitivo descrever uma analogia recorrendo à teoria de Newton. O conceito necessário para compreender a lei zero é o conceito de gravidade de superfície, ou *surface gravity*, e é uma quantidade descrita pela letra κ . Aqui na Terra, experienciamos a atração gravitacional da Terra correspondente a uma aceleração gravítica de $g = 9.8m/s^{-2}$ na superfície que nos atrai para o centro da Terra. No entanto, nos mantemos na superfície da Terra porque esta exerce uma força de reação no nosso corpo com uma aceleração equivalente. Esta aceleração de reação é chamada de gravidade de superfície.

Na teoria de relatividade geral e em buracos negros, é possível também definir este conceito. Podemos considerar um observador, que chamamos de observador A, localizado no horizonte de eventos do buraco negro e que o observador se encontra estacionário, ou seja mantém-se no horizonte de eventos ao longo de uma coordenada de tempo. Um observador B está localizado num ponto com uma distância infinita do buraco negro, também se encontrando estacionário, e segura uma corda que está esticada e presa no observador A. De certa forma, o observador B está a impedir que o observador A caia para o buraco negro através da aplicação de uma força na corda, com uma aceleração correspondente. Assumindo que os observadores e a corda têm massa negligenciável, a aceleração que o observador B exerce na corda é finita e corresponde à gravidade de superfície do buraco negro, κ . Ou seja, a gravidade de superfície é a aceleração necessária que o observador A tem de possuir para que não caia para o buraco negro, medido na perspectiva do observador B. No entanto, é preciso notar que na perspectiva do observador A, a aceleração que o próprio

precisa para não cair para o buraco negro é infinita. Nesta experiência mental, qualquer corda se partiria entre o observador A e o observador B, e o observador A cairia sempre para o buraco negro, devido à sua localização no horizonte de eventos.

Com a noção de gravidade de superfície explicada, pode-se enunciar a lei zero do buraco negro. A lei zero enuncia que a gravidade de superfície de um buraco negro estacionário é uniforme por todo o horizonte de eventos. Ou seja, não interessa em que ponto, no horizonte de eventos, o observador A está localizado, o observador B vai medir que a aceleração que impeça o observador A de cair ao buraco negro é sempre a mesma e é dada pela gravidade de superfície, κ . A prova da lei zero do buraco negro foi dada por Bardeen, Carter e Hawking [13] para espaços-tempos estacionários com um buraco negro e que possa incluir matéria que obedeça a uma condição de energia, a chamada condição de energia dominante. A noção de condições de energia está fora do âmbito deste artigo no entanto pode-se dizer que a condição de energia dominante implica que a matéria considerada tem fluxos de energia ou matéria a velocidades inferiores à da velocidade da luz.

3.3 Primeira lei

A primeira lei dos buracos negros descreve como é que um buraco negro se comporta em trocas de energia com a matéria existente. Pode-se considerar dois buracos negros estacionários muito similares, o buraco negro 1 e o buraco negro 2. A diferença é que o buraco negro 2 é um buraco negro estacionário resultante de ter caído uma partícula com uma certa massa, momento angular e carga, no buraco negro 1. Devido ao teorema da ausência de cabelo, esta diferença é descrita pela diferença dos parâmetros que descrevem os dois buracos negros. Portanto a primeira lei dos buracos negros diz que quando se comparam estes dois buracos negros, a diferença da massa entre o buraco negro 2 e o buraco negro 1 é dada por $\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_H + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q$, onde κ é a gravidade de superfície, A_H é a área de superfície do horizonte de eventos, Ω_H é a frequência de rotação e Φ_H é o potencial elétrico, todos eles avaliados no horizonte de eventos do buraco negro 1. A interpretação é que se uma partícula cair para o buraco negro 1 com energia total δM , momento angular δJ e carga δQ , o buraco ne-

gro resultante vai sofrer uma alteração na área de superfície do seu horizonte de eventos segundo a fórmula da primeira lei.

3.4 Segunda lei

A segunda lei da mecânica de buracos negros diz que a área de superfície do horizonte de eventos de um buraco negro nunca diminui no futuro, ou seja a área mantém-se ou aumenta, $\delta A \geq 0$. Esta lei é na realidade um teorema que foi demonstrado por Hawking [14], um pouco antes do trabalho de referência de Bardeen, Carter e Hawking. A prova deste teorema consiste no uso do formalismo matemático da estrutura causal do espaço-tempo e na conjectura de censura cósmica fraca [15], que diz que as singularidades estão sempre cobertas por um horizonte de eventos, isto é, não existem “singularidades nuas”.

De certa forma, com o evoluir da coordenada de tempo, se qualquer matéria cair no buraco negro, a área de superfície do horizonte de eventos aumenta. Numa binária de buracos negros, isto também acontece. Podemos considerar dois buracos negros com áreas do horizonte de eventos A_1 e A_2 . No final, os dois buracos negros coalescem num buraco negro maior cuja área do horizonte de eventos é maior que a soma $A_1 + A_2$, obedecendo então à segunda lei. Uma consequência desta lei é que impede de acontecer o contrário, ou seja, um buraco negro maior bifurcar-se em dois buracos negros mais pequenos. Isto, por inversão temporal, viola a segunda lei já que a área total do horizonte de eventos diminui.

3.5 Terceira lei

A terceira lei da mecânica de buracos negros enuncia que a gravidade de superfície nunca se torna zero num tempo avançado finito. Aqui o tempo avançado pode ser visto como o parâmetro que parametriza a trajetória de um raio de luz (por exemplo, no caso de curvatura negligenciável, é $\nu = ct + r$, onde t é a coordenada tempo e r é a coordenada radial). Em relatividade geral, o único caso de um buraco negro com zero gravidade de superfície é o caso de um buraco negro extremo, um buraco negro em que a sua massa ou energia total é apenas a energia de rotação ou energia elétrica. E portanto, esta lei pode ser reescrita da seguinte maneira: é impossível tornar um buraco negro num buraco negro extremo em

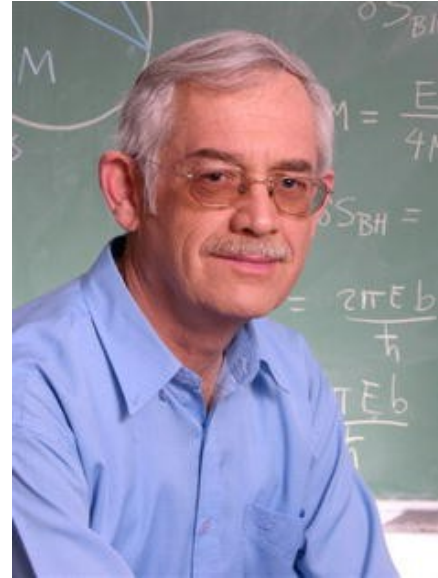


Figura 2: Fotografia de Bekenstein, que avançou a ideia que buracos negros são termodinâmicos e generalizou a segunda lei da termodinâmica.

tempo avançado finito.

4 Buracos negros não são tão negros

4.1 A entropia de Bekenstein

As quatro leis da mecânica de buracos negros formulados por Bardeen, Carter e Hawking têm uma semelhança muito sugestiva com as leis da termodinâmica. Os próprios autores explicam na Ref. [13] que estas quatro leis são clássicas e que não têm nada a ver com termodinâmica, já que um buraco negro clássico não emite qualquer radiação e assim segundo a lei de Planck, a temperatura do buraco negro é zero. Mas Bekenstein (Fig. 2) considerou esta semelhança relevante e no seu trabalho de referência [5], formulou a hipótese de que buracos negros têm entropia, S_b , e que esta quantidade termodinâmica é proporcional à área de horizonte de eventos, $S_b \propto A_H$.

Uma indicação que leva a esta formula é a primeira lei dos buracos negros, em que, recorde-se, a diferença entre dois buracos negros estacionários semelhantes é dado por $\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_H + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q$. A primeira lei da termodinâmica diz que a diferença entre duas configurações em equilíbrio semelhantes de um sistema é dado pela fórmula $dE = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$, usando que, tal como o buraco negro, a pressão do sistema é zero. Comparando estas duas leis, é de esperar que $\frac{\kappa}{8\pi} \delta A_H = TdS$. Uma outra indicação é a se-

gunda lei dos buracos negros que diz que a área do horizonte de eventos de um buraco negro aumenta sempre. A segunda lei da termodinâmica diz que a entropia aumenta sempre. Portanto é de esperar que de alguma forma a entropia de um buraco negro dependa apenas da área do horizonte de eventos.

O argumento de Bekenstein para considerar que um buraco negro tem de ter entropia é baseado precisamente na segunda lei da termodinâmica. Pode-se considerar que um objeto com uma certa entropia cai para um buraco negro clássico. Portanto, a entropia do universo considerado no início é apenas a entropia do objeto já que buracos negros clássicos não têm entropia. Quando o objeto entra para o buraco negro, eventualmente o objeto alcança a singularidade. No final, teremos um universo apenas com um buraco negro que de fato aumentou de tamanho segundo a primeira e segunda lei da mecânica de buracos negros. No entanto, o fato mantém-se que o buraco negro clássico não tem entropia. A diferença da entropia no universo neste processo é negativa, o que viola a segunda lei da termodinâmica. Por isso, Bekenstein generalizou a segunda lei da termodinâmica, dizendo que a entropia total é a soma da entropia do universo e do buraco negro e que esta aumenta sempre. Assim, quando o objeto cai para o buraco negro, o universo perde entropia, mas a entropia do buraco negro aumenta, sendo que a área do horizonte de eventos aumenta. Assim, a segunda lei generalizada da termodinâmica não é violada.

Bekenstein conseguiu com esta argumentação concluir que um buraco negro tem entropia. No entanto, com a falta de uma teoria semiclassical, a constante de proporcionalidade na fórmula da entropia de buracos negros era desconhecida. Bekenstein usou alguns argumentos quânticos para estimar heurísticamente o valor desta constante, que estaria próximo do valor encontrado mais tarde por Hawking.

4.2 A radiação de Hawking

De fato, é possível considerar campos quânticos livres em espaços-tempos curvos [16] e obter resultados que dão pistas de como um campo quântico se comporta na presença de gravidade. Por exemplo, a noção de partícula em espaços-tempos curvos é ambígua, isto porque não existe uma escolha preferencial da coordenada de tempo



Figura 3: Fotografia de Hawking, que fez várias contribuições no estudo de buracos negros. Uma delas foi mostrar que buracos negros irradiam.

em relatividade geral. Este fato pode levar a que dois observadores, um em repouso e outro acelerado, não concordem com o estado de um campo quântico. Se o observador em repouso verifica que o campo quântico está no estado de vácuo (zero quantas), o observador acelerado vai verificar que o espectro de quantas do campo é similar a um espectro de corpo negro em que a temperatura da radiação é proporcional à aceleração do observador. Este efeito foi descrito por Fulling [17], Davies [18] e Unruh [19].

Um resultado precursor deste efeito foi dado por Hawking [6], em 1975, que considerou um campo escalar quântico sem massa num espaço-tempo que consiste no colapso de uma estrela esférica. O objetivo era obter o estado final do campo escalar assumindo que o estado inicial era vácuo (zero quantas). Como o espaço-tempo é dinâmico, era esperado obter alguma alteração no estado do campo. De fato, através da aproximação geométrica ótica, Hawking (Fig. 3) considerou apenas os últimos raios do campo que passavam pelo centro da estrela esférica e escapavam novamente para infinito, antes da formação do horizonte de eventos. Hawking obteve então que o estado final do campo escalar, em períodos de tempo muito tardios, correspondia a um espectro de quantas idêntico ao de um corpo negro com a temperatura $T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B}$, onde κ é a gravidade de superfície do horizonte de eventos, \hbar é a constante de Planck e k_B é a constante de Boltzmann. Este foi um dos primeiros resultados que juntava a constante gravitacional presente implicitamente na gravidade de superfície κ com a constante de Planck. Hawking concluiu com este resultado que um buraco negro emite radiação, chamada de radiação de Hawking, e portanto os buracos negros

não são assim tão negros!

Para que o buraco negro esteja em equilíbrio com a radiação de Hawking, o buraco negro tem de ser um objeto termodinâmico com temperatura T_H , no horizonte de eventos. No seguimento do trabalho de Bekenstein e através da primeira lei dos buracos negros, o trabalho de Hawking de certa forma confirma que a entropia de um buraco negro é proporcional à área do horizonte de eventos e que a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{4}$, portanto $S_b = \frac{k_B A_H}{4\hbar}$.

Este resultado fascinante levanta várias questões. Se o buraco negro emite radiação de Hawking, então o buraco negro perde energia ou massa. Isto leva a que um buraco negro se evapore, isto é que o seu tamanho diminua. Portanto, um buraco negro não é estável termodinamicamente devido à evaporação. É possível descrever esta evaporação para buracos negros suficientemente massivos em que a descrição de campos quânticos em espaços-tempos curvos é válida. No entanto, a partir de um momento em que o buraco negro tenha um tamanho comparável com o comprimento de Planck dado por $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$, a descrição falha e espera-se que uma teoria alternativa e/ou quântica da gravidade consiga prever o que acontece.

A argumentação que leva à conclusão de Hawking de que o buraco negro tem temperatura T_H depende da premissa que o buraco negro tem de estar em equilíbrio com a radiação de corpo negro de Hawking. Embora esta seja uma premissa forte na sua validade, esta premissa é introduzida sem haver um formalismo de termodinâmica para espaços-tempos curvos. Na próxima seção, vamos introduzir um formalismo através do qual se pode obter a termodinâmica de espaços-tempos e reproduzir os resultados de Bekenstein e Hawking, como também analisar a sua estabilidade.

5 Termodinâmica estatística e o ensemble canônico de buracos negros

5.1 Termodinâmica e ensembles estatísticos

A termodinâmica é usada para descrever sistemas complexos e as suas trocas de energia através de quantidades macroscópicas como por exemplo a pressão, a temperatura e o volume. Estas trocas de energia e a alteração da configuração de equi-

líbrio do sistema obedecem a quatro leis da termodinâmica. A lei zero da termodinâmica enuncia que se dois sistemas estiverem em equilíbrio térmico com um terceiro, então os dois prévios sistemas estão em equilíbrio térmico entre si. De certa forma, esta lei dá uma definição empírica da temperatura. A primeira lei enuncia que as mudanças de energia interna de um sistema se decompõem em realização de trabalho e trocas de calor. Esta lei define a noção de energia interna de um sistema, e permite a descrição de um sistema e as suas configurações de equilíbrio através de potenciais termodinâmicos. A segunda lei da termodinâmica enuncia que a entropia total tende sempre a aumentar, o que dá preferência a certos processos termodinâmicos (a alteração do sistema entre duas configurações de equilíbrio) de ocorrerem e é uma das leis mais importantes da física porque de alguma forma define a orientação do tempo na nossa realidade. Finalmente, a terceira lei enuncia que a entropia de um sistema tende para um valor mínimo quando a temperatura se aproxima de zero absoluto, e portanto esta lei dá a noção de que a entropia é uma medida da desordem do sistema já que é esperado que os constituintes do sistema estejam todos no seu estado fundamental quando o sistema está a temperatura zero absoluta.

Estas leis da termodinâmica são cruciais na descrição empírica de sistemas complexos sem o conhecimento dos seus estados microscópicos, isto é, sem conhecer os estados dos constituintes do sistema. Se esses estados são conhecidos ou se se conhece a física por detrás do comportamento dos constituintes, por exemplo as forças exercidas em átomos ou moléculas que perfazem um gás, é possível obter a termodinâmica do gás através de física estatística. Em termos gerais, em física estatística, consideram-se todos os estados possíveis microscópicos de um sistema com a sua respectiva probabilidade de que de fato o sistema se encontra nesse estado. A este conjunto de estados e à sua respetiva probabilidade chama-se ensemble. Existem três tipos de ensemble: microcanônico, canônico e grande canônico.

O ensemble microcanônico é usado em sistemas que estão isolados e portanto assume-se que a probabilidade de cada estado microscópico com energia total do sistema E é igual. Note-se que a quantidade fixa neste ensemble é a energia do sistema porque este está isolado e portanto não

existem trocas de energia para o exterior, esta é a chamada restrição do ensemble. Sabendo a energia de cada átomo ou molécula, é possível contabilizar o número de microestados possíveis para uma energia E , denominado de $\Omega(E)$. Este número total de estados também pode depender do volume do sistema, que se mantém igualmente fixo. A entropia aqui é definida através da fórmula de Von Neumann e neste ensemble é dado por $S = k_B \log(\Omega(E, V))$. Invertendo esta relação, obtêm-se a energia interna do sistema isolado $E = E(S, V)$ e assim recupera-se a termodinâmica do sistema.

O ensemble canônico é usado em sistemas que estão em equilíbrio térmico com o reservatório de calor à temperatura T . Neste caso, a probabilidade de cada microestado do sistema ser de fato o estado do sistema é dado por $p_i = \frac{e^{-\beta E_i/k_B}}{Z}$, onde E_i é a energia do microestado, β é o inverso da temperatura e Z é a chamada função de partição, que é uma função da temperatura e de outras quantidades fixas como o volume, $Z = Z(\beta, V)$. A diferença entre o canônico e o microcanônico é a existência do reservatório de calor, portanto a energia do sistema não está fixa. De fato, os microestados de menor energia têm sempre a maior probabilidade de ocorrerem mas quanto maior for a temperatura do reservatório, mais provável são os microestados de maior energia. A função de partição Z que é a função de normalização das probabilidades de cada microestado é a quantidade fundamental deste ensemble. Uma vez obtido, é possível obter a energia média do sistema através da fórmula da média e a sua entropia através da fórmula de Von Neumann, o que leva à identidade $\beta F(\beta, V) = -\log(Z)$, onde $F = E - TS$ é o potencial termodinâmico de Helmholtz. Com a expressão deste potencial, a termodinâmica do sistema é fácil de obter.

O ensemble grande canônico é mais complicado que o canônico na medida que trata sistemas similares como o indicado no canônico mas com a possibilidade de, por exemplo, o número de partículas ou a carga elétrica não estarem fixos. Este ensemble é importante para descrever gases em que se dão processos químicos. No entanto, neste artigo, o foco é dado ao ensemble canônico.

5.2 Função de partição como um integral de caminho

A função de partição Z é a quantidade que se tem de calcular em física estatística para obter a termodinâmica do sistema considerado. Se o sistema for quântico, a função de partição pode ser calculada através de $Z = \text{tr}(e^{-\beta H})$, onde H é o operador hamiltoniano representado em forma matricial, e $\text{tr}(A)$ é o traço de uma matriz A . Os valores próprios do operador hamiltoniano são as energias dos estados próprios do sistema. De fato, é possível calcular a função de partição de uma outra maneira. Se houver a identificação de que o inverso da temperatura corresponde a um tempo imaginário, isto é $\beta = it/\hbar$, o traço pode ser dado pelo integral de caminho de Feynman, e portanto a função de partição é dada por $Z[\beta] = \int D\phi e^{-I[\hbar\beta; \phi]/\hbar}$, onde ϕ é o campo quântico considerado no sistema, I é a ação do campo e $D\phi$ é a medida do integral. A ação é um funcional do campo que assume um valor mínimo quando o campo obedece às suas equações de movimento. Portanto, este integral de caminho soma todas as “trajetórias” do campo que são periódicos no tempo, com período $-i\hbar\beta$, em que a probabilidade desta “trajetória” ocorrer é proporcional a $e^{-I/\hbar}$. Verifica-se que de fato a “trajetória” com maior probabilidade de ocorrer corresponde à situação em que o campo é descrito pela a solução das equações de movimento clássicas. Esta abordagem para calcular a função de partição de um sistema quântico chama-se a abordagem do integral de caminho euclidiano, isto porque β assume um papel de um tempo imaginário.

Esta abordagem pode ser usada para obter a termodinâmica de espaços-tempos curvos, assumindo que a ação agora correspondente é a ação dada pela relatividade geral e o campo considerado é a métrica do espaço-tempo. A motivação para usar esta abordagem é que isto funciona para sistemas descritos pela teoria de campos quânticos, e portanto extrapola-se que esta abordagem seja válida para uma teoria de gravidade quântica. Uma teoria que é consistente com esta abordagem é a chamada gravidade quântica euclidiana, em que a gravidade é “quantizada” através do integral de caminho euclidiano. Existem embora vários problemas com esta teoria, sendo dois deles a ambiguidade do mapeamento entre espaços euclidianos e espaços-tempos, e uma noção rigorosa

da medida do integral de caminho. No entanto, é possível obter resultados na chamada aproximação de *loop* zero, onde apenas a contribuição da trajetória clássica é considerada. É através desta aproximação que se obtém os resultados da termodinâmica de buracos negros consistente com o trabalho de Bekenstein e Hawking.

5.3 Termodinâmica de Gibbons-Hawking

Através do cálculo da função de partição pela abordagem do integral de caminho euclidiano, Gibbons e Hawking [20] obtiveram o ensemble canônico e grande canônico de buracos negros com carga elétrica e em rotação, que estão em equilíbrio térmico com um reservatório no infinito. A fórmula da entropia de Bekenstein e Hawking foi recuperada, tal como a temperatura de Hawking.

No entanto, as soluções de buraco negro que foram obtidas eram instáveis. A razão para este fato vem do efeito da evaporação dos buracos negros, tendo sido já discutido em cima. A quantidade termodinâmica que controla a estabilidade dos buracos negros no ensemble canônico é a capacidade térmica do buraco negro. Se esta quantidade for positiva, então a solução é estável, caso contrário é instável. De fato, a capacidade térmica das soluções de Gibbons e Hawking é negativa, isto é o buraco negro aumenta a sua entropia conforme se diminui a sua temperatura, e por isso as soluções são instáveis.

A questão das soluções serem instáveis leva a um problema. A aproximação de *loop* zero usada no integral de caminho euclidiano para obter a termodinâmica dos buracos negros é válida somente em soluções de buraco negro que sejam um mínimo da ação, ou seja só é válida para soluções estáveis, enquanto que as soluções encontradas por Gibbons e Hawking correspondiam a um máximo da ação, que são instáveis. Embora se possa analisar soluções instáveis como instantões, ou seja soluções que são válidas somente num instante de tempo, o buraco negro desvia-se inevitavelmente dessa situação de equilíbrio. Sendo assim, o ensemble canônico construído não é válido. Uma maneira para descrever estes buracos negros termodinamicamente seria usar o ensemble microcanônico, que não iremos explorar aqui.

5.4 A cavidade de York

Em 1986, York [21] estudou o ensemble canônico de um buraco negro simetricamente esférico (Schwarzschild) numa cavidade esférica, através da abordagem do integral de caminho euclidiano. Nesta situação, a fronteira entre o espaço-tempo e o reservatório é uma superfície esférica com um raio finito a uma temperatura fixa T , ou seja, o reservatório de calor encontra-se a uma distância finita do buraco negro. Isto permitiu a York encontrar duas soluções para o buraco negro que estão em equilíbrio com a cavidade, uma descrevendo um buraco negro menor e outra descrevendo um buraco negro maior. A solução que descreve o buraco negro menor é assintoticamente idêntica à solução encontrada por Gibbons e Hawking, no limite em que a superfície esférica da cavidade tem um raio infinito, ou seja quando o reservatório de calor se encontra no infinito. De fato, esta solução do buraco negro menor é instável tal como a solução de Gibbons e Hawking. A solução que descreve o buraco negro maior é estável e não tem um limite adequado quando a superfície esférica da cavidade tem raio infinito, aliás o horizonte de eventos do buraco negro maior neste limite alcança a superfície esférica no infinito. A condição que define estabilidade nesta situação é a localização relativa da superfície esférica da cavidade e do buraco negro. Se a superfície esférica estiver mais próxima do buraco negro comparado com o anél de luz do buraco negro, então a solução é estável, que é o que acontece com a solução que descreve o buraco negro maior. Aqui o anel de luz corresponde ao raio da órbita circular fotônica à volta do buraco negro, em particular buracos negros esféricos têm apenas uma destas órbitas localizada no raio $r_c = \frac{3GM}{c^2}$.

Através do estudo do potencial termodinâmico, York estudou também a possibilidade de transições de fase entre as soluções de buraco negro e a solução de Minkowski, que é o espaço-tempo com curvatura zero, também chamado de espaço-tempo plano. O estado favorável do espaço-tempo é sempre o estado ou solução que esteja num estado de energia menor ou, no caso do ensemble canônico, num estado com um valor mínimo do potencial de Helmholtz. O valor do potencial de Helmholtz para o espaço-tempo plano é zero, enquanto que o valor do potencial para a solução do buraco negro menor é sempre positivo. No entanto, o valor do potencial para a solução

do buraco negro maior pode ser positivo, zero ou negativo, dependendo da temperatura do reservatório. Isto significa que para certas temperaturas, há a possibilidade de nucleação do espaço-tempo plano, ou seja o espaço-tempo plano torna-se na solução do buraco negro maior, através de um processo termodinâmico. Se o espaço-tempo estiver no estado da solução do buraco negro menor, dependendo das perturbações termodinâmicas, o espaço-tempo evolui ou para um espaço-tempo plano ou para a solução do buraco negro maior. O estudo destas transições de fase são importantes para compreender qualitativamente como o espaço-tempo se possa estar a comportar microscopicamente.

Devido à existência de uma solução estável, conclui-se que o ensemble canônico de buracos negros só é bem definido se a fronteira do espaço-tempo com o reservatório de calor esteja a uma distância finita do buraco negro. Note-se que esta fronteira pode não ter localização exata. Um exemplo é o espaço-tempo com constante cosmológica negativa contendo um buraco negro, chamados espaços-tempos assintoticamente anti-de Sitter, em que a curvatura do espaço-tempo impede que qualquer matéria alcance distância infinita e portanto é análogo a um buraco negro dentro de uma caixa.

6 Perspectivas

Desde o trabalho de referência de York, o ensemble canônico e grande canônico de espaços-tempos tem vindo a ser estudado. É de referir o trabalho de Braden et al [22] em que estudaram o ensemble grande canônico de um buraco negro esférico e eletricamente carregado (Fig. 4), em quatro dimensões. Nesta situação, a quantidade fixa adicional é o potencial elétrico na superfície esférica da cavidade. De fato, Braden et al encontraram que existem duas soluções de buraco negro, um estável que corresponde ao buraco negro maior e um instável correspondente ao buraco negro menor. Outros sistemas também foram estudados, por exemplo buracos negros carregados [23] e neutros [24] em espaços-tempos com constante cosmológica negativa, e espaços-tempos com matéria auto gravitante [25]. Um trabalho também importante foi o de Martinez e York [26] em que consideram um buraco negro com uma superfície esférica de matéria à

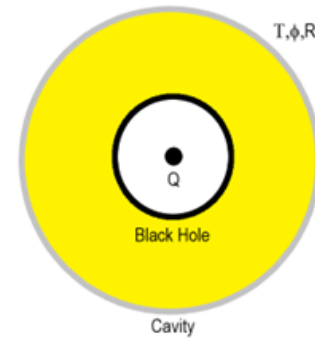


Figura 4: Esquema do espaço-tempo contendo um buraco negro com carga elétrica Q dentro de uma cavidade, em que na superfície esférica da cavidade a temperatura, o potencial elétrico e o seu raio são fixos.

sua volta e mostram que a entropia total do sistema é a soma das entropias do buraco negro e da matéria.

Uma linha da frente interessante é fazer a generalização destes resultados para maiores dimensões. É de referir os trabalhos de André e Lemos em que tratam o ensemble canônico de um buraco negro esférico neutro em cinco dimensões [27] e em dimensões arbitrárias [28]. Verifica-se que existem resultados que também são válidos para dimensões arbitrárias, como é o caso da estabilidade da solução de buraco negro esférico neutro em que continua a ser definida pelo raio da órbita fotônica. Existem também novos resultados, como o fato de que a solução do buraco negro maior é mais favorável que o espaço-tempo plano se a superfície esférica da cavidade se situar a um raio inferior ao dado pelo limite de Buchdahl [8], que indica a compacidade máxima de uma estrela composta por um fluido perfeito para que esta se mantenha estável e não sofra colapso gravitacional. Esta ligação entre termodinâmica dos buracos negros e a estabilidade da matéria é algo fascinante. De fato, através do tratamento termodinâmico de superfície esférica de matéria é possível obter num certo limite a termodinâmica de buracos negros [29]. Uma generalização do trabalho de Braden et al para dimensões arbitrárias está a ser também realizada e deve aparecer em breve [30].

O estudo contínuo do ensemble canônico e grande canônico de espaços-tempos contendo buracos negros é importante para perceber a ligação entre a termodinâmica e a gravidade. Espera-se que uma compreensão desta ligação seja alcançada, também através do cálculo de correções quânticas de possíveis teorias quânticas da gra-

vidade ou através da modificação da teoria da gravidade em si. Esta é uma linha da frente da investigação atual que procura abrir fronteiras em gravitação, teoria quântica e termodinâmica.

Agradecimentos

O autor deste artigo queria agradecer ao grupo de investigação GRIT do CENTRA pelas discussões tidas, em física e não só. Em particular, o autor deste artigo queria agradecer ao seu supervisor de doutoramento prof. José Sande Lemos pelas discussões e os trabalhos de investigação com o tema deste artigo e também pelas sugestões dadas no desenvolvimento deste artigo.

Sobre o autor

Tiago Vasques Fernandes (tiago.vasques.fernandes@tecnico.ulisboa.pt) possui Bacharelado (2018) e Mestrado (2020) em Engenharia Física Tecnológica pelo Instituto Superior Técnico (IST), tendo efetuado uma tese de mestrado sobre os modos quasinormais de buracos negros. Atualmente é estudante de doutoramento em Física no IST, com foco no estudo da termodinâmica de buracos negros através do método do integral de caminho euclidiano. Tem também como interesse o estudo de espaços-tempos contendo buracos negros e a evolução das equações de Einstein.

Referências

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973).
- [2] GRAVITY Collaboration, *Detection of the Schwarzschild precession in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole*, *Astronomy & Astrophysics* **636**, L5 (2020).
- [3] EHT Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, *The Astrophysical Journal* **875**(1), L1 (2019).
- [4] EHT Collaboration, *First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way*, *The Astrophysical Journal Letters* **930**(2), L12 (2022).
- [5] J. D. Bekenstein, *Black holes and the second law*, *Lettere Al Nuovo Cimento Series 2* **4**(15), 737 (1972).
- [6] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, *Communications In Mathematical Physics* **43**(3), 199 (1975).
- [7] J. Wheeler e K. Ford, *Geons, Black Holes and Quantum Foam: A Life in Physics* (Norton, New York, 2000).
- [8] H. R. Buchdahl, *General relativistic fluid spheres*, *Physical Review* **116**(4), 1027 (1959).
- [9] J. Oppenheimer e H. Snyder, *On continued gravitational contraction*, *Physical Review* **56**(5), 455 (1939).
- [10] M. Begelman, M. Volonteri e M. Rees, *Formation of supermassive black holes by direct collapse in pre-galactic haloes*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **370**(1), 289 (2006).
- [11] L. Boco et al., *Growth of massive black hole seeds by migration of stellar and primordial black holes: gravitational waves and stochastic background*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2021**(10), 035 (2021).
- [12] B. Carter, *Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom*, *Physical Review Letters* **26**(6), 331 (1971).
- [13] J. M. Bardeen, B. Carter e S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, *Communications in Mathematical Physics* **31**(2), 161 (1973).
- [14] S. W. Hawking, *Black holes in general relativity*, *Communications in Mathematical Physics* **25**(2), 152 (1972).
- [15] R. Penrose, *Gravitational collapse: The role of general relativity*, *Riv. Nuovo Cim.* **1**, 257 (1969), republicado em R. Penrose, "Golden Oldie": *Gravitational Collapse: The Role of General Relativity*, *General Relativity and Gravitation* **34**, 1141 (2002).

- [16] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago, Chicago, 1994).
- [17] S. Fulling, *Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time*, *Physical Review D* **7**(10), 2850 (1973).
- [18] P. C. W. Davies, *Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **8**(4), 609 (1975).
- [19] W. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, *Physical Review D* **14**(4), 870 (1976).
- [20] G. Gibbons e S. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, *Physical Review D* **15**(10), 2752 (1977).
- [21] J. York, *Black-hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action*, *Physical Review D* **33**(8), 2092 (1986).
- [22] H. Braden et al., *Charged black hole in a grand canonical ensemble*, *Physical Review D* **42**(10), 3376 (1990).
- [23] C. Peça e J. Lemos, *Thermodynamics of Reissner–Nordström–anti-de Sitter black holes in the grand canonical ensemble*, *Physical Review D* **59**(12), 124007 (1999).
- [24] M. Akbar, *Schwarzschild–anti-de Sitter black holes within isothermal cavity: Thermodynamics, phase transitions, and the Dirichlet problem*, *Physical Review D* **82**(6), 064001 (2010).
- [25] O. Zaslavskii, *Canonical ensemble for arbitrary configurations of self-gravitating systems*, *Physics Letters A* **152**(9), 463 (1990).
- [26] E. Martinez e J. York, *Additivity of the entropies of black holes and matter in equilibrium*, *Physical Review D* **40**(6), 2124 (1989).
- [27] R. André e J. Lemos, *Thermodynamics of five-dimensional Schwarzschild black holes in the canonical ensemble*, *Physical Review D* **102**(2), 024006 (2020).
- [28] R. André e J. Lemos, *Thermodynamics of d-dimensional Schwarzschild black holes in the canonical ensemble*, *Physical Review D* **103**, 064069 (2021).
- [29] T. Fernandes e J. Lemos, *Electrically charged spherical matter shells in higher dimensions: Entropy, thermodynamic stability, and the black hole limit*, *Physical Review D* **106**(10), 104008 (2022).
- [30] J. Fernandes e J. P. S. Lemos, *Grand canonical ensemble of a d-dimensional Reissner–Nordström spacetime in a cavity*, a ser publicado.