

Agujeros negros

Gustavo Dotti

Universidad Nacional de Córdoba

Resumo

Se presenta una introducción a los fundamentos de la Relatividad General y la noción de Agujeros Negros de una manera elemental, asumiendo conocimientos básicos de Física, y relegando a notas al pie de página aquellas acotaciones técnicas que requieran mayores conocimientos. Se da además una breve introducción histórica del concepto de agujero negro, y se mencionan los notables avances recientes en el campo experimental: la detección en 2015 de ondas gravitacionales en LIGO y las imágenes obtenidas por el Event Horizon Telescope.

Abstract

An elementary introduction to General Relativity and the concept of Black Holes is given assuming a basic knowledge of Physics, and leaving as footnotes any advanced technical comment. A brief historical introduction of the black hole concept is given, and the notable recent experimental advances are commented: the detection of gravitational waves by LIGO in 2015 and the recently disclosed Event Horizon Telescope images.

Palavras-chave: Relatividad General, Agujeros Negros

Keywords: General Relativity, Black Holes

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v4n1.40266](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v4n1.40266)

1 Las estrellas oscuras de John Michell

La historia del concepto de *agujero negro* es, en alguna medida, circular. En 1783, el reverendo John Michell le envió a su amigo Henry Cavendish una carta en la que proponía, basándose en la teoría corpuscular de la luz entonces vigente, medir masas y distancias de estrellas a partir de la *disminución* de la velocidad de la luz que emanaban, disminución causada por su propia atracción gravitatoria [1–3]. La primera prueba de que la luz no se propaga instantáneamente, y la determinación del orden de magnitud de su velocidad c , se debe al astrónomo danés Ole Rømer, quien en 1676 obtuvo el valor $c = 220000$ km/s basándose en las observaciones de las emergencias del satélite Io de Júpiter de la sombra proyectada por el planeta. Si las observaciones de los eclipses de Io por Júpiter se hacían en el período del año en que la Tierra se alejaba de Júpiter, el tiempo entre emergencias consecutivas no era siempre el mismo, como se supondría de la regularidad de la órbita del satélite, sino que crecía. Rømer entendió, correctamente, que eso se debía a que la luz reflejada en Io debía desplazarse distancias cada vez mayores para alcanzar la Tierra. Cuando Michell propuso su idea, se disponía de mediciones

más precisas de c que la de Rømer: James Bradley había medido $c = 301000$ km/s en 1729 [4].¹

Si la luz se comporta como un haz de corpúsculos de masa m –razonó Michell– al alejarse del centro ($r = 0$) de una distribución esférica de masa M , dado que se conserva la energía mecánica total E

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (1)$$

la velocidad v de los corpúsculos disminuirá al crecer r . El modo en que v disminuye con la distancia r es, como puede inferirse de (1), independiente de la masa m . Esta característica esencial de la gravitación nos libra del problema de estimar la masa de los hipotéticos corpúsculos de luz, y nos permite además introducir el concepto de *velocidad de escape* v_e de una estrella o planeta: si la masa de la estrella (supuesta esférica) es M y su radio es R , un objeto podrá alejarse *indefinidamente* ($r \rightarrow \infty$) sólo si abandona la superficie

¹ John Michell fue también quien diseñó el experimento de la balance de torsión para medir la constante de Newton G y la masa de la Tierra, experimento que, tras su fallecimiento, llevó a cabo Cavendish.

($r = R$) con una velocidad superior a

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (2)$$

Michell dedujo entonces que si la velocidad de la luz fuese menor que v_e , esto es, si

$$c < \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad (3)$$

un haz de luz no podría alejarse indefinidamente: retornaría a la superficie de la estrella del mismo modo que una pelota arrojada verticalmente vuelve al piso. La estrella, entonces, no sería visible desde lejos. Fue usando este modelo que Michell estimó, con notable precisión que “*si existieran objetos con densidad no menor a la solar y diámetro 500 veces el del Sol, dado que su luz no nos llegaría [...], no tendríamos información visual; pero si ocurriera que otros objetos luminosos lo orbitaran podríamos, quizás, inferir la existencia del objeto central.*” [1]. En esta simple oración Michael introdujo dos ideas fundamentales: el concepto de “estrella oscura”, aquella que atrapa toda la luz que emite y por lo tanto es invisible desde lejos, y la posibilidad de detectar a estas estrellas oscuras por la existencia de objetos visibles que las orbiten. Más de doscientos años después, las observaciones de Michell tienen una vigencia asombrosa.

En su libro *Exposition du Système du Monde* (Paris, 1796), Laplace llega a la misma conclusión que Michell y agrega que *los cuerpos más grandes del Universo podrían ser invisibles*. En la carta de Michell a Cavendish, la suposición de la existencia de *estrellas oscuras* es un tema marginal: un subproducto de las elaboraciones centrales, destinadas a medir masa y distancia de estrellas. Tampoco en el libro de Laplace el concepto recibe mayor atención.

La determinación de que la luz es un fenómeno ondulatorio, más precisamente, ondas electromagnéticas, derribó la teoría corpuscular y, como consecuencia, las ideas de John Michell y Laplace sobre estrellas oscuras. La circularidad histórica mencionada más arriba es la siguiente: en 1915 Albert Einstein presentó la teoría de la Relatividad General, según la cual la geometría del espacio-tiempo no es plana y está determinada por la distribución de materia y energía. Dado que la geometría del espacio-tiempo determina a su vez cómo se propagan las ondas (en

particular, las ondas electromagnéticas, y entonces la luz), tendremos que la masa de las estrellas *afecta* la propagación de la luz que emiten. En otras palabras: aunque la luz no sea un haz de partículas materiales, su propagación, su trayectoria, resulta afectada por la masa del objeto emisor. En particular, es posible que una estrella suficientemente masiva y pequeña curve el espacio circundante de manera tal que la luz emitida permanezca restringida a una región cercana a estrella: a esa llamamos agujero negro. Un agujero negro se diferencia en varios aspectos de las estrellas oscuras de Michell. El más importante es que hoy sabemos (éste es uno de los postulados de la teoría de Einstein) que la velocidad de la luz c es máxima: ningún objeto puede viajar a una velocidad mayor. De manera que el confinamiento que produce un agujero negro no se limita a la luz: un agujero negro es una región de no-escape, *nada* puede abandonar esta región. La frontera de esta región se llama *horizonte* del agujero negro. La manera indirecta de advertir la presencia de un agujero negro es por aquellas estrellas que lo orbitan *y que están fuera del horizonte* (de manera que su luz sí nos llega). Esta es precisamente la idea propuesta por Michell para detectar “estrellas oscuras”. Un ejemplo notable [5] es el agujero negro en el centro de nuestra galaxia, llamado Sgr A*: en la Figura 1 se reproduce la órbita de seis estrellas alrededor de este agujero negro. La agencia ESO (European Southern Observatory) ha compilado imágenes a lo largo de dos décadas que muestran la evolución en sus órbitas de estrellas cercanas a este enorme objeto invisible [6].

2 De Newton a Einstein

En cursos elementales de Física estudiamos el movimiento de una partícula en una dimensión y graficamos su función de movimiento $x(t)$: la coordenada x del punto que ocupa la partícula al tiempo t . El plano de coordenadas (t, x) en que hacemos estos gráficos constituye la representación más simple del *espacio-tiempo*. Como todo concepto primario usado en la elaboración de ideas complejas, el de *espacio-tiempo* se define de manera intuitiva: un *evento* es algo que ocurre *rápidamente* en *un espacio muy reducido*, de manera que puede caracterizarse por su posición y el instante en que ocurre. El *espacio-tiempo* es el conjunto de todos los eventos (ocurridos y por

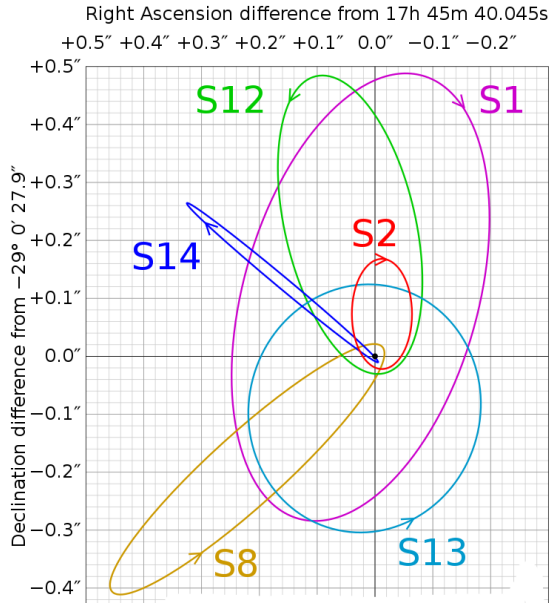


Figura 1: Órbitas de seis estrellas cercanas al agujero negro Sgr A* en el centro de nuestra galaxia. Los ejes corresponden al apartamiento de Sgr A* en ascensión recta y declinación. S2 completa una órbita cada 16 años. Esta figura reproduce la publicada en [5]

ocurrir). De manera que, si confiamos en los conceptos newtonianos y galileanos, podemos pensar al espacio-tiempo como el espacio euclídeo 4-dimensional \mathbb{R}^4 : sus puntos son arreglos ordenados (t, x, y, z) donde (x, y, z) son las coordenadas cartesianas del evento en un sistema inercial y t el tiempo en que ocurre el evento. Al evolucionar, toda partícula trazará una curva en el espacio-tiempo, esta curva es su *línea-mundo*. Los gráficos de funciones de movimiento que hacemos en cursos elementales de Mecánica muestran la línea-mundo de la partícula en el espacio-tiempo. En el contexto de Relatividad es común que estos gráficos se exhiban con el eje t en la dirección vertical.

2.1 Relatividad especial

La *Relatividad Especial* (Einstein, 1905) mantiene la existencia de sistemas inerciales postulados por Newton: aquellos en los que todo objeto libre de fuerzas se mueve en movimiento rectilíneo uniforme, pero postula que hay una velocidad límite: la velocidad de la luz c (esto es, de las ondas electromagnéticas en vacío). El espacio-tiempo, llamado *espacio-tiempo de Minkowski*, es $\mathbb{R}^4 = \{(t, x, y, z)\}$, con (x, y, z) coordenadas cartesianas en un sistema inercial. Se diferencia del galileano en el hecho de que viene equipado con una estructura adicional que llamamos *métrica*, y

que se debe a la existencia de la velocidad límite c , como explicaremos ahora. Las líneas mundos de las partículas están restringidas: para movimientos sobre el eje X , la derivada dx/dt debe satisfacer $|dx/dt| < c$, sólo los haces de luz pueden dejar trazas con pendiente $dx/dt = \pm c$. Más en general, para movimientos arbitrarios en el espacio, la velocidad

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \tag{4}$$

de una partícula debe satisfacer $\vec{v} \cdot \vec{v} < c^2$. Equivalentemente, dados dos puntos infinitesimalmente próximos en su línea-mundo, las variaciones, dt, dx, dy, dz satisfarán la condición $ds_M^2 < 0$, donde

$$ds_M^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{5}$$

La ecuación (5) define el *elemento de línea* o *intervalo* del espacio-tiempo de Minkowski. Notemos que ds_M^2 no es el cuadrado de ninguna cantidad, el lado derecho de (5) puede resultar de cualquier signo, la notación ds^2 obedece a razones históricas. Si llamamos $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, e introducimos la *métrica* de Minkowski

$$g_{ab}^M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

podemos escribir (5) de la forma

$$ds_M^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \tag{7}$$

donde hemos adoptado la convención de Einstein: si un índice aparece repetido en una ecuación, se sobrentiende que debe sumarse en todo su rango, de manera que $g_{ab} dx^a dx^b$ significa

$$\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 g_{ab} dx^a dx^b.$$

Si $x^a(u)$ es la línea mundo de una partícula (u es un parámetro arbitrario), tendremos que, para todo u , se cumple que $g_{ab}^M \dot{x}^a \dot{x}^b < 0$, donde $\dot{x}^a \equiv dx^a/du$ es el vector tangente a la línea mundo. Para un haz de luz, en cambio, $g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$. Esta condición para vectores tangentes \dot{x}^a a un punto P de coordenadas $x^a(u)$ define el *cono de luz* de P , que denotaremos \mathcal{C}_P :

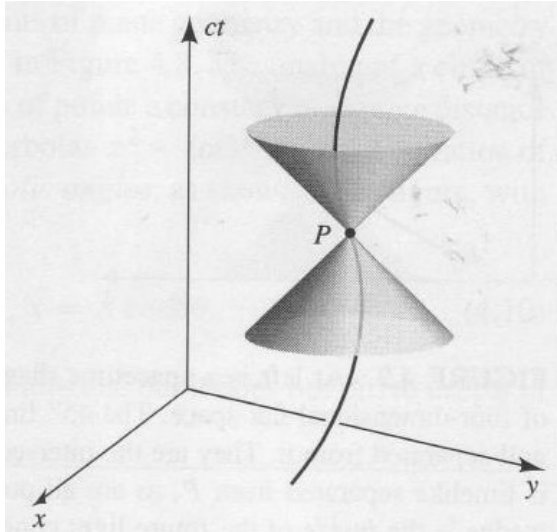


Figura 2: El espacio-tiempo de Minkowski (suprimiendo una dimensión espacial). Se muestra la línea mundo de una partícula material y el cono de luz C_P de uno de sus puntos.

$$C_P = \{\dot{x}^a \mid -c^2\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0\} \quad (8)$$

El cono de luz (8) contiene al semicono futuro:

$$C_P^+ = \{\dot{x}^a \mid c\dot{t} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\} \quad (9)$$

y al semicono pasado

$$C_P^- = \{\dot{x}^a \mid c\dot{t} = -\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\} \quad (10)$$

La Figura 2 representa el espacio-tiempo de Minkowski (suprimiendo el eje Z) y el cono de luz del evento P . La curva representa la línea-mundo de una partícula material. La línea-mundo de cualquier partícula que pasa por el evento P , debe ingresar por el semicono pasado y salir por el futuro, y una señal electromagnética emitida en P se propagará por C_P^+ .

La métrica de Minkowski determina el *tiempo propio* transcurrido para un observador cuya línea mundo es $(x^0(u), x^1(u), x^2(u), x^3(u))$. El tiempo propio medido por este observador entre los eventos correspondientes a $u = u_i$ y $u = u_f$, esto es, el que transcurre en un reloj forzado a moverse por su línea mundo, está dado por

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{u_i}^{u_f} \sqrt{-g_{ab}^M \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du}} du, \quad (11)$$

esto es

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{u_i}^{u_f} \sqrt{c^2 \left(\frac{dt}{du}\right)^2 - \left(\frac{dx}{du}\right)^2 - \left(\frac{dy}{du}\right)^2 - \left(\frac{dz}{du}\right)^2}.$$

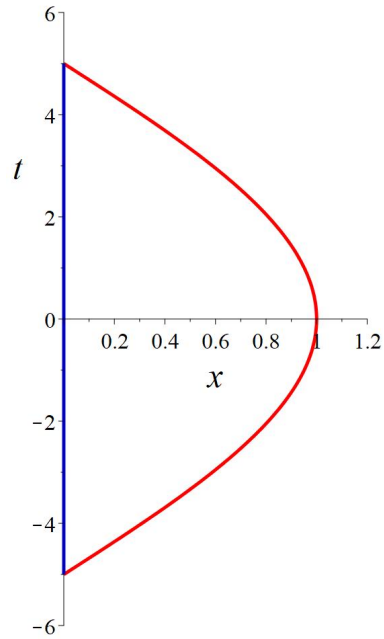


Figura 3: El caso de los hermanos mellizos, las unidades en el eje t son años y en el eje x años luz. La “longitud” (tiempo propio) de la línea mundo azul (que corresponde al hermano que permanece en $x = 0$) es 10 años, mientras que la de su hermano, que se alejó 1 año luz y luego regresó (en rojo), es 9.75 años.

Si notamos la semejanza de esta expresión con la de la longitud ℓ de una curva $\vec{r}(u)$ en el espacio:

$$\ell = \int_{u_i}^{u_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du \quad (12)$$

no nos sorprenderá saber que, para dos líneas-mundo que se cruzan primero en el evento P_1 y luego en P_2 , el tiempo propio transcurrido entre P_1 y P_2 será, en general, *distinto*: esto es completamente análogo al hecho de que, dadas dos curvas en el espacio que se cruzan en los puntos P_1 y P_2 , los segmentos de curvas entre estos dos puntos tienen, en general, longitudes diferentes. Esta es la llamada “paradoja” de los mellizos (que no es en absoluto una paradoja): si uno de dos hermanos mellizos permanece en el origen de un sistema de coordenadas inercial, mientras el otro se aleja en la dirección X y luego regresa, encontrarán que el tiempo transcurrido entre los dos encuentros será distinto para cada uno de ellos, siendo menor para el que se alejó.² En la Figura 3 damos un ejemplo numérico concreto.

En el espacio-tiempo de Minkowski, podríamos usar coordenadas diferentes de (t, x, y, z) .

²La (aparente) paradoja se basa en la (aparente) simetría del problema que no es tal: sólo uno de los mellizos describe un movimiento acelerado.

Por ejemplo, si introducimos coordenadas esféricas $x = r \text{sen}\theta \cos\phi$, $y = r \text{sen}\theta \text{sen}\phi$, $z = r \cos\theta$, podremos comprobar, partiendo de $dx = dr \text{sen}\theta \cos\phi + d\theta r \cos\theta \text{sen}\phi - d\phi r \text{sen}\theta \text{sen}\phi$, etc, que (5) resulta equivalente a

$$ds_M^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (13)$$

Si ahora definimos $v = ct + r$, tendremos $dv = cdt + dr$ y

$$ds_M^2 = -dv^2 + 2dv dr + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (14)$$

Algunas coordenadas pueden ser más adecuadas que otras en el planteo de un problema concreto. En coordenadas $x^a = (v, r, \theta, \phi)$, por ejemplo, la métrica de Minkowski no es una matriz constante, sino que depende de r y de θ . En efecto, si queremos escribir (14) como $ds_M^2 = g_{ab} dx^a dx^b$ resultará:

$$g_{ab}^M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Es interesante determinar cómo se ven los conos de luz en un diagrama (v, r) . La condición $g_{ab}^M \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$ en estas coordenadas:

$$0 = -\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r} + r^2(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta \dot{\phi}^2) \quad (16)$$

equivale a

$$-\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r} = -r^2(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta \dot{\phi}^2) \quad (17)$$

Dado que el término de la derecha en esta ecuación es manifiestamente no positivo, la proyección del cono sobre el plano (v, r) satisfará $-\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r} \leq 0$, y los bordes de este conjunto (que corresponden a curvas radiales, esto es, con $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$) cumplirán la condición $\dot{v}(-\dot{v} + 2\dot{r}) = 0$, esto es, o bien $\dot{v} = 0$, o bien $\dot{v} = 2\dot{r}$ (es fácil ver que el semicono futuro corresponde al caso $\dot{v} \geq 0$ y el pasado a $\dot{v} < 0$). En la Figura 4 se muestra un diagrama (v, r) de Minkowski.³ Hemos trazado algunos rayos de luz (en negro los que satisfacen $\dot{v} = 0$, que evolucionan hacia $r = 0$, y en azul los que cumplen $\dot{v} = 2\dot{r}$, que evolucionan con v y r creciendo). Los arcos celestes señalan algunos semi conos de luz futuros.

³Debe tenerse en cuenta que, al haberse suprimido las coordenadas (θ, ϕ) , el punto de coordenadas (v_o, r_o) en este diagrama representa en realidad una esfera de área $4\pi r_o^2$.

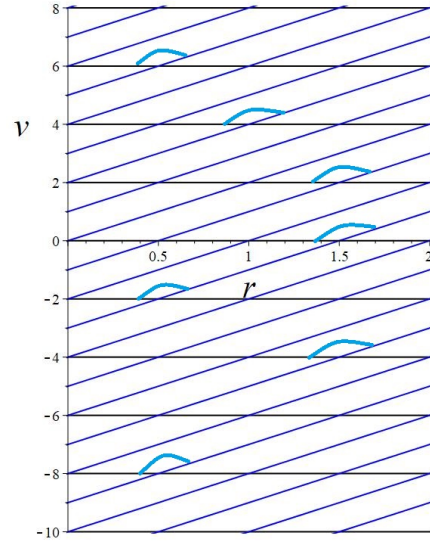


Figura 4: Diagrama (v, r) del espacio-tiempo de Minkowski. Las curvas dibujadas ($v = \text{constante}$, en negro, y $v = 2r + \text{constante}$ en azul) corresponden a rayos de luz radiales ($\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$). Éstos definen los semi conos de luz futuros (trazados como un arco celeste).

2.2 Relatividad general

En Geometría se estudian objetos llamados *variedades riemannianas* cuya dimensión, esto es, el número mínimo de coordenadas x^a requeridas para especificar sus puntos, es, en principio, arbitraria, y que están equipados con una métrica $g_{ab}(x)$. Los ejemplos más sencillos son las superficies en \mathbb{R}^3 , que tienen dimensión 2. En el caso de una esfera de radio R , por ejemplo, podemos especificar sus puntos usando las coordenadas angulares $x^a = (\theta, \phi)$ (colatitud y azimut). Estas coordenadas sólo fallan en los polos $\theta = 0, \pi$.⁴ La métrica de la esfera de radio R , expresada en coordenadas (θ, ϕ) , es diagonal, con entradas $g_{11} = R$ y $g_{22} = R \text{sen}^2\theta$. Equivalentemente, el elemento de línea es $ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b = R^2 d\theta^2 + R^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2$.

En variedades riemannianas con métricas definidas positivas, como la esfera, la métrica se usa para medir la longitud de curvas $x^a(u)$ a partir de la fórmula

$$\ell = \int_{u_i}^{u_f} \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du}} du. \quad (18)$$

que generaliza (12). En el caso de la esfera, por

⁴Cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, todos los valores de ϕ señalan el mismo punto; esto es un ejemplo de lo que llamamos *singularidad de coordenadas*.

ejemplo, aplicando (18) resulta

$$\ell = \int_{u_i}^{u_f} \sqrt{R^2 \left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + R^2 \sin^2(\theta(u)) \left(\frac{d\phi}{du}\right)^2} du,$$

y en el caso de \mathbb{R}^3 , cuyo elemento de línea en coordenadas cartesianas es $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, obtenemos (12). Aquellas curvas estacionarias, esto es, las que ante variaciones de primer orden $x^a(u) + \delta x^a(u)$ que mantengan los extremos fijos ($\delta x^a(u_i) = \delta x^a(u_f) = 0$) cumplan la condición extremal $\delta \ell = 0$, se llaman *geodésicas*.⁵ Puede probarse que estas curvas son de longitud mínima. Las geodésicas en la esfera, por ejemplo, son aquellas curvas que se obtienen intersectando la esfera con un plano que pasa por su centro. Dado que minimizan distancia, estas son las curvas que conviene seguir en navegación aérea para ahorrar tiempo y combustible.

La Relatividad General (RG) se formula usando variedades riemannianas de dimensión 4 cuya métrica *no es definida positiva*, como en la esfera, sino *lorentziana*. Esto significa que tiene tres direcciones positivas o *espaciales* y una negativa o *temporal*.⁶ Un caso particular es el espacio tiempo de Minkowski: aquí la variedad es \mathbb{R}^4 y la métrica, en coordenadas $x^a = (ct, x, y, s)$, es la dada en (6). La forma explícita de la métrica depende de las coordenadas con que trabajemos. En coordenadas $x^a = (v, r, \theta, \phi)$, por ejemplo, la métrica de Minkowski asume la forma (15).

La revolución de la Relatividad General es mayúscula: Einstein propone que el espacio-tiempo es una variedad lorentziana de dimensión 4, y que su geometría (codificada en la métrica g_{ab}) está determinada por la distribución de materia y energía. Esta última está representada por el *tensor energía-momento*, también una matriz 4×4 , denotada T_{ab} , que generaliza el tensor de tensiones usado en mecánica de medios continuos. Esta sofisticación es el costo que hay que pagar para conjugar la gravitación con el postulado de velocidad máxima c . La condición de que la velocidad de una partícula (medida en el encuentro con un observador) sea inferior a c , se expresa en RG como en Relatividad Especial: la

línea mundo $x^a(u)$ de una partícula es una curva en el espacio tiempo que debe satisfacer la condición $g_{ab}(x(u))\dot{x}^a\dot{x}^b < 0$, donde el punto significa derivada respecto del parámetro u . A las curvas $x^a(u)$ que satisfacen esta condición las llamamos *temporales*. Las ondas electromagnéticas se propagan de manera tal que las líneas $x^a(u)$ ortogonales a los frentes de onda satisfacen⁷

$$g_{ab}(x(u))\dot{x}^a\dot{x}^b = 0. \tag{19}$$

A estas curvas las llamamos *nulas*. La condición (19) define el cono de luz del punto P cuyas coordenadas son $x^a(u)$: si la línea mundo de una partícula contiene a P , la partícula debe llegar a P por dentro de su cono pasado, y emerger por dentro del cono futuro. La noción de cono de luz y esta última afirmación generalizan lo enunciado para Relatividad Especial en el espacio-tiempo de Minkowski, también los conceptos siguientes. La métrica se usa para medir el tiempo propio de una línea mundo temporal, τ está dado por la ecuación (11) donde debe reemplazarse g_{ab}^M (la métrica de Minkowski) por la métrica del espacio-tiempo correspondiente. Aquellas curvas temporales extremas, esto es, las que ante pequeñas variaciones (manteniendo los extremos fijos) satisfagan $\delta \tau = 0$ corresponden a líneas-mundo de partículas no aceleradas. En el caso de variedades lorentzianas las curvas temporales extremas *maximizan* el tiempo propio τ . Recordemos que para métricas definidas positivas las curvas extremas *minimizan* longitud. La diferencia entre uno y otro caso es consecuencia del signo menos – dentro de la raíz cuadrada– que distingue (18) de (11). En cualquier caso, a las curvas extremas se las llama *geodésicas*. En el caso del espacio-tiempo de Minkowski y de las curvas dadas en la Figura 3, la línea-mundo azul es geodésica, por eso el tiempo propio entre los dos encuentros es mayor que el que se mide a lo largo de la línea-mundo roja, que no es geodésica.

Dado que la atracción gravitatoria es inevitable (todo objeto está sujeto a ella), no existen partículas “sobre los que no actúa ninguna fuerza” (recordemos que estas partículas son necesarias para testear que un observador sea inercial). En el mejor de los casos, tendremos partículas en *caída libre*, esto es, sujetas *sólo* a la gravitación. Einstein

⁵Determinar la condición de geodésica es un problema variacional que conduce a ecuaciones de Euler-Lagrange para la lagrangiana $\mathcal{L}(x^a, \dot{x}^b) = \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}$.

⁶En algunos libros a las variedades con métrica no definidas positivas se las llama *semi-riemannianas* o también *seudo-riemannianas*.

⁷Estrictamente, esto ocurre en la aproximación eikonal. Para soluciones exactas debemos mirar la función de Green, y ésta tiene soporte en el cono de luz *y también en su interior*.

postula que éstas se mueven siguiendo *geodésicas del espacio-tiempo*, esto es líneas mundo que *maximizan* el tiempo propio (11) entre los eventos inicial y final.

Las ecuaciones de Einstein tienen por incógnita a la métrica $g_{ab}(x)$ del espacio-tiempo y admiten la siguiente escritura minimalista:

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ab} \quad (20)$$

La matriz 4×4 de la izquierda, G_{ab} , es el llamado *tensor de Einstein*. Se construye usando $g_{ab}(x)$ y sus dos primeras derivadas parciales respecto de las coordenadas (de una forma no-lineal y complicada cuya fórmula omitiremos). El tensor energía-momento T_{ab} es también una matriz 4×4 que depende de las coordenadas. El lado izquierdo de la ecuación es puramente geométrico: las ecuaciones de Einstein permiten determinar la geometría del espacio-tiempo (enteramente codificada en la métrica g_{ab} que se usa para construir G_{ab}) a partir de la distribución de materia T_{ab} . La presencia de las constantes fundamentales G y c en el lado derecho nos asegura que estamos tratando con una teoría de gravitación (por eso aparece la constante de Newton G), que además es relativista (por eso aparece la velocidad de la luz c). Si desplegáramos G_{ab} y T_{ab} en expresiones explícitas, veríamos que estas ecuaciones no-lineales en derivadas de $g_{ab}(x)$ son tan complejas que parece imposible obtener soluciones exactas. Sin embargo, bajo suposiciones muy idealizadas de simetrías, pueden obtenerse soluciones exactas de interés. La primera de ellas, de hecho, fue obtenida por Karl Schwarzschild pocos meses después de presentar Einstein su teoría [7]. Schwarzschild se propuso modelar el espacio tiempo asociado a una estrella estática idealizada, en la que la distribución de materia tiene simetría esférica. Para simplificar el problema, se restringió a estudiar el *exterior* de la estrella, donde hay vacío y entonces $T_{ab} = 0$. Su solución tiene un aspecto relativamente simple: la métrica se ve como una deformación de la de Minkowski. De las tres versiones dadas de la métrica de Minkowski (o equivalentemente, su elemento de línea, ver (5), (13) y (14)), la que resulta más adecuada para comparar es (14). Expresada en coordenadas (v, r, θ, ϕ) análogas a las usadas para Minkowski en (14), la métrica de Schwarzschild es

$$ds_S^2 = -f(r)dv^2 + 2dv dr + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (21)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{r_S}{r}. \quad (22)$$

En esta ecuación r_S es el llamado *radio de Schwarzschild*, una constante con unidades de longitud, proporcional a la masa M del objeto central:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (23)$$

La matriz métrica en estas coordenadas puede inferirse de (21):

$$g_{ab}^M = \begin{pmatrix} -f(r) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (24)$$

Es interesante compararla con la métrica de Minkowski en estas coordenadas, ecuación (15).

3 El agujero negro de Schwarzschild

¿Cuánto difiere la métrica de Schwarzschild dada en (24) de la de Minkowski en (15)? La pregunta se reduce a cuánto difiere $f = 1 - r_S/r$ de la unidad. Claramente, si $r \gg r_S$ tendremos $f \simeq 1$ y las métricas serán semejantes. Para estimar lo que significa esta condición necesitamos calcular el radio de Schwarzschild del objeto central. Este radio, dado en (23), es minúsculo para objetos astronómicos usuales: para un objeto de la masa del Sol, por ejemplo, tendremos $r_S \simeq 3$ km, y para la masa de la Tierra resulta $r_S \simeq 9$ mm. Dado que la métrica de Schwarzschild es la solución de las ecuaciones de Einstein (20) estática, esféricamente simétrica y *de vacío*,⁸ podemos usarla para modelar el sistema solar sólo *fuera de la superficie del Sol*, tratando a los planetas como pequeñas partículas –esto es, con una contribución irrelevante en T_{ab} –. La expresión (24) de la métrica será válida para $r > r_{Sol} \simeq 7 \times 10^5$ km, rango en el que $0.99999 < f(r) < 1$. Si reemplazamos $r =$ distancia Tierra-Sol resulta $f \simeq 0.999999999$. Podemos concluir entonces que la métrica del espacio-tiempo en nuestros alrededores es *muy similar* a la de Minkowski.

Los efectos de mayor deformación geométrica se advertirán en aquellas regiones donde $r \simeq r_S$ pero, dado que esta métrica sólo es válida *fuera de la estrella central*, sólo tiene sentido evaluarla

⁸Puede probarse que es la *única* solución de vacío esféricamente simétrica (teorema de Birkhoff).

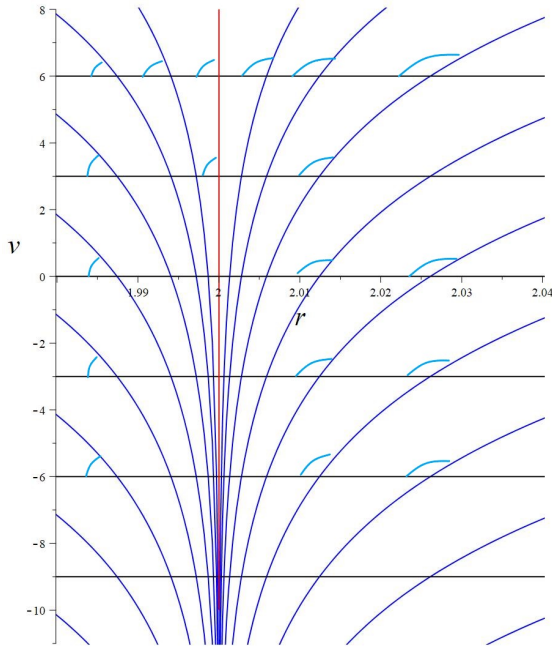


Figura 5: Diagrama (v, r) del espacio-tiempo de Schwarzschild para $r_S = 2$. Las curvas dibujadas corresponden a rayos de luz radiales ($\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$). Éstos definen los semi conos de luz futuros (arcos celestes). En rojo se muestra el horizonte de eventos (ver la explicación en el texto).

en $r \simeq r_S$ si el radio de la estrella es inferior a r_S , lo que requiere densidades extremas: imaginemos al Sol comprimido a un radio menor de 3 km, o a la Tierra comprimido a un radio de menos de 9 mm; o bien masas enormes. ¿Cuáles serían los efectos más notables de la curvatura del espacio-tiempo en el caso de objetos cuyo radio no excede el de Schwarzschild?

Para responder esta pregunta, analizaremos los conos de luz del espacio-tiempo de Schwarzschild. Para esto, procederemos como hicimos con Minkowski en el desarrollo que comprende a las ecuaciones (15)-(17), pero usando la métrica (24). El resultado es que el borde del cono de luz en un punto del plano (v, r) está dado por vectores (\dot{v}, \dot{r}) que satisfagan $\dot{v}(-f(r)\dot{v} + 2\dot{r}) = 0$, esto es, o bien $\dot{v} = 0$, o bien $f(r)\dot{v} = 2\dot{r}$. En la Figura 5 damos una representación (v, r) del espacio-tiempo de Schwarzschild. Las unidades fueron elegidas de manera que $r_S = 2$. Las líneas-mundo que satisfacen $\dot{v} = 0$ están dadas en negro y las que satisfacen $f(r)\dot{v} = 2\dot{r}$ están dadas en azul, excepto la vertical en rojo, que pasa por los puntos donde $f(r) = 0$. Todas estas líneas corresponden a rayos de luz radiales, esto es, con $\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$. Al evolucionar en el tiempo, los rayos de luz horizon-

tales (en negro) se desarrollan hacia la izquierda (r disminuye), mientras que los azules y el rojo lo hacen hacia arriba (v aumenta). Las direcciones tangentes a estas líneas en sus intersección determinan los conos de luz. Algunos de los semiconos de luz futuros se señalan en la figura con un arco celeste. Los semiconos de luz pasados –no indicados– son los opuestos por el vértice. Recordemos que toda línea mundo temporal (esto es, de una partícula con masa) que pase por un punto dado, lo hace ingresando por el semicono pasado y emergiendo por semicono el futuro. Una inspección de la figura nos dice entonces que estas líneas-mundo sólo podrían satisfacer $\dot{r} > 0$, esto es, dirigirse hacia regiones de mayor r , si están fuera del horizonte $r = r_S$ ($r = 2$ en el ejemplo de la figura) –esto, ciertamente no ocurre en el espacio-tiempo de Minkowski, como se advierte tras una simple inspección a la Figura 4–. Si una línea-mundo entra en la región $r < r_S$ (que llamamos agujero negro), dada la configuración de los semiconos futuros, tendrá desde ese momento en adelante $\dot{r} < 0$ y no podrá regresar a la zona $r > r_S$ (que llamamos *dominio exterior*). Toda línea mundo temporal (partículas con masa) o nula (señales luminosas) dentro del agujero negro, acabará en $r = 0$.⁹ Desde el agujero negro es imposible enviar señales luminosas o partículas hacia el dominio exterior. El horizonte funciona como una membrana que sólo permite el paso en la dirección $\dot{r} < 0$.

La solución de Schwarzschild, como hemos dicho, modela el vacío exterior de un objeto central de masa M . ¿Cómo podemos construir un agujero negro más realista, cubriendo también la materia de la estrella que le da origen? Supongamos una estrella no rotante, de manera que la métrica del espacio-tiempo pueda tener simetría esférica.¹⁰ Supongamos que la estrella colapsa –esféricamente– de manera tal que su superficie se comprime a un radio menor que el radio de Schwarzschild correspondiente a su masa. Durante el colapso, los puntos de la superficie describen una línea-mundo temporal (con $\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$) que podemos representar en el plano (v, r) . La

⁹ $r = 0$ corresponde a una divergencia en la curvatura del espacio-tiempo. Esta divergencia indica un *borde* del espacio-tiempo de Schwarzschild: el espacio-tiempo se restringe a la región $r > 0$, v arbitrario.

¹⁰Si la estrella rota, el eje de rotación señala una dirección privilegiada y la métrica no podría tener simetría esférica.

métrica del espacio-tiempo coincide con la de Schwarzschild para puntos *fuera de esa línea* (que es la región de vacío), de manera que podemos aprovechar *parte* del diagrama dado en la Figura 5, y reemplazar la porción correspondiente al interior de la estrella por lo que arroje la solución dinámica y esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein (20) con $T_{ab} \neq 0$ representando la materia de la estrella. El resultado es el diagrama de la Figura 6. Dado que obtener la métrica en el interior de la estrella (región gris en la figura) es un problema complejo que podemos, a los efectos de este análisis, omitir, nos limitamos a utilizar la información de la que ya disponemos: el exterior de la estrella está modelado por la métrica de Schwarzschild, de manera que las líneas-mundo de los rayos de luz, y los semiconos futuros son aquéllos de la Figura 5. La región indicada AN es el agujero negro: es una zona de no-escape, desde allí es imposible ir al dominio exterior DE. El horizonte (en rojo) actúa como una membrana unidireccional, como hemos dicho. La forma en que los rayos de luz dibujados y el horizonte se continúan dentro de la estrella es algo que dependerá de la métrica dentro de la estrella y, por lo tanto, de cómo sea su contenido de materia T_{ab} . La primera solución completa de las ecuaciones de Einstein (esto es, incluyendo la métrica en el interior de la estrella) que se ajusta a la figura 6. fue obtenida por Oppenheimer y Snyder en 1939 [8].

Hacemos, finalmente, una observación: fuera de la estrella, la región de no-escape está definida por el radio de Schwarzschild: ninguna partícula, tampoco ninguna señal luminosa, podrá alejarse de la estrella si el radio de la estrella es $R < r_S$. Notemos (ver (23)) que esta es *exactamente* la condición (3) obtenida por John Michell para sus “estrellas oscuras” basándose en un modelo que de ninguna manera involucra la sofisticación de la Relatividad General. “Subtle is the Lord, but malicious he is not”, dijo Einstein en una visita a Princeton en 1921.

4 Desde Schwarzschild hasta hoy

Interpretar una solución de las ecuaciones de Einstein es a veces un problema de una dificultad comparable a la *obtener* la solución. El caso de la solución de Schwarzschild es un buen ejemplo: Schwarzschild no obtuvo su solución en la forma

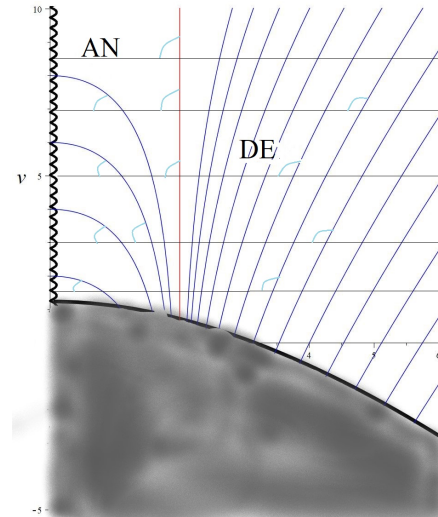


Figura 6: Diagrama (v, r) del espacio-tiempo de un colapso esférico que conduce a la formación de un agujero negro. La superficie de la estrella que colapsa está representada por la línea-mundo negra gruesa. En el interior de la estrella (en gris) la métrica *no es* la de Schwarzschild. Se indican el agujero negro (AN) y el dominio exterior (DE). La línea en forma de serrucho ($r = 0$ dentro del agujero negro) indica una divergencia de la curvatura, es un borde del espacio-tiempo.

(21) (24), sino que trabajó con un conjunto de coordenadas que resultaban singulares en el horizonte (del mismo modo que las coordenadas (θ, ϕ) de una esfera son singulares en los polos de la esfera). La solución que obtuvo Schwarzschild podía usarse para $r > r_S$ ¹¹ y entonces velaba la característica más notable de esta métrica: la existencia de un horizonte que separa un agujero negro del dominio exterior. De todos modos, dado que r_S resultaba tan pequeño para el problema de interés más urgente (modelar la métrica del sistema solar *fuera del sol*, despreciando la masa de los planetas y tratándolos como partículas de prueba, esto es, sin incidencia en T_{ab}), la solución de Schwarzschild, tal como él la obtuvo, fue extremadamente importante para comprobar que, tanto las mediciones de la precesión del perihelio de Mercurio, como las del efecto en la propagación de la luz causado por la curvatura del espacio-tiempo provocada por Sol, coincidieran con las predicciones de la teoría. Estas fueron, de hecho, las primeras comprobaciones experimentales de la RG [9]. La métrica en la forma dada en este artículo fue obtenida de manera independiente por Eddington en 1924 [10] y Finkelstein en 1958 [11].

¹¹Estrictamente, también para $0 < r < r_S$, pero no para un abierto que contuviera a la hipersuperficie $r = r_S$.

La interpretación del horizonte en $r = r_S$ como una membrana que permite el paso de partículas y señales electromagnéticas sólo en una dirección fue tardía. Einstein, por su parte, no creía en la posibilidad de que los agujeros negros existieran realmente [9]. Por otra parte, las estrellas rotan, y nuestra intuición newtoniana nos indica que rotarán con mayor velocidad angular a medida que se contraigan, de manera que un agujero negro realista, resultante del colapso de una estrella, debería rotar. La solución correspondiente a un agujero negro rotante fue encontrada por Roy Kerr recién en 1963 [12]. El análisis de su geometría es fascinante, pero su dificultad excede las posibilidades de este artículo introductorio. Sí es interesante remarcar su unicidad: la solución de Kerr es la *única* solución *estacionaria* de agujero negro rotante. Todo colapso estelar, toda coalescencia de agujeros negros se estabiliza, eventualmente, en un agujero negro de Kerr, y esta métrica sólo depende de dos parámetros, la masa M y el momento angular J del agujero negro. Dicho de otro modo, si sucesos dinámicos -de cualquier clase- dan origen a la formación de un agujero negro, la parte “superior” (tiempos futuros) del diagrama de espacio-tiempo estará modelada por la métrica de Kerr.

La década del ‘60 (y principios de la del ‘70) se conoce como *la edad dorada de la investigación teórica de agujeros negros*. Destacan las contribuciones de Roger Penrose, quien prueba que dentro del horizonte de eventos se oculta una singularidad, y que es posible extraer enormes cantidades de energía de agujeros negros rotantes a costa de disminuir su momento angular, y las aplicaciones de teoría cuántica de campos de Stephen Hawking, con las que probó que los agujeros negros irradian con un espectro de cuerpo negro [9].

La última década, por su parte, puede considerarse como la edad dorada de la Relatividad experimental: el 14 de septiembre de 2015 se detectó la primera onda gravitacional: una alteración de la geometría del espacio-tiempo en nuestras inmediaciones causada por la coalescencia de dos agujeros negros de aproximadamente 36 y 29 masas solares [13]. Llegar a este resultado demandó un enorme esfuerzo: el proyecto de detector de ondas gravitacionales LIGO (concebido en los ‘60) fue finalmente aprobado para su construcción en 1990, y el detector con la sensibilidad adecuada (*advanced LIGO*) entró en funciones poco antes

de la detección de este primer evento. El modelado computacional de la coalescencia de dos agujeros negros (y la formación de un único agujero negro final), para cotejar con las señales detectadas en LIGO, supuso un desafío (llamado *The binary black hole Grand Challenge Project*) que involucró a decenas de investigadores durante casi una década. Otro notable éxito experimental de los últimos años fue la obtención de las primeras “imágenes” de un agujero negro [14]: señales de radio del gas que circunda al agujero negro súper masivo M87, alteradas por la presencia del agujero negro central. Esto requirió la sincronización de un arreglo de radiotelescopios en distintos lugares del planeta, con un consecuente notable aumento de la capacidad de resolución.

Una vez más, hemos usado la vieja idea de John Michell: la posibilidad de detectar *estrellas oscuras* por la existencia de objetos visibles que las orbiten.

Agradecimientos

Agradezco a Alan Velásquez-Toribio y a Júlio Fabris por su invitación a contribuir a este volumen de los *Cadernos de Astronomía*.

Sobre o autor

Gustavo Dotti (gdotti@famaf.unc.edu.ar) es profesor de física en la Universidad Nacional de Córdoba (UNC) e investigador del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Argentina. Es especialista en el área de la gravitación, habiéndose dedicado a temas como estabilidad de agujeros negros, singularidades desnudas y teorías gauge.

Referências

- [1] J. Michell, VII. *On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose.* By the Rev. John Michell, B.D. F.R.S. In a letter to Henry Cavendish, Esq. F.R.S. and A.S, *Philosophical*

- [Transactions of the Royal Society of London](#) **74**, 35 (1784).
- [2] *November 27, 1783: John Michell anticipates black holes*, American Physical Society News, vol. 18(10), sección This month in history (2009), disponible en <https://www.aps.org/publications/apsnews/200911/physicshistory.cfm>, acceso en feb. 2023.
- [3] C. Montgomery, W. Orchiston e I. Whittingham, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, [Journal of Astronomical History and Heritage](#) **12**(02), 90 (2009).
- [4] J. Bradley, *IV. A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F. R. S. to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars*, [Philosophical Transactions of the Royal Society of London](#) **35**(406), 637 (1728).
- [5] F. Eisenhauer et al., *SINFONI in the galactic center: Young stars and infrared flares in the central light-month*, [The Astrophysical Journal](#) **628**(1), 246 (2005).
- [6] Ver El Sitio De and Eso: <https://www.eso.org/public/videos/eso0226a/>.
- [7] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 189–196 (1916).
- [8] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, *On continued gravitational contraction*, [Physical Review](#) **56**(5), 455 (1939).
- [9] K. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (Commonwealth Fund Book Program, 1995).
- [10] A. S. Eddington, *A comparison of whitehead's and einstein's formulæ*, [Nature](#) **113**(2832), 192 (1924).
- [11] D. Finkelstein, *Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle*, [Physical Review](#) **110**(4), 965 (1958).
- [12] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, [Physical Review Letters](#) **11**(5), 237 (1963).
- [13] B. P. Abbott et al., *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, [Physical Review Letters](#) **116**(6), 061102 (2016).
- [14] S. Doelman, *The Astrophysical Journal Letters* (2019), disponible en https://iopscience.iop.org/journal/2041-8205/page/Focus_on_EHT, acceso en feb. 2023.