

# Halos de matéria escura em galáxias

Rubens E. G. Machado

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

## Resumo

Halos de matéria escura são indispensáveis para se compreender a dinâmica de galáxias. Neste artigo, apresentamos de maneira introdutória o conceito de curva de rotação, para explicar a necessidade de matéria escura em galáxias. Em seguida, examinamos em mais detalhes a distribuição espacial da matéria escura, isto é, seu perfil de densidade. Por fim, colocamos o halo de matéria escura no contexto das outras componentes (disco estelar, bojo e gás) para construir um modelo dinâmico composto.

## Abstract

Dark matter halos are essential for understanding the dynamics of galaxies. In this paper, we present the concept of rotation curve in an introductory manner to explain the need for dark matter in galaxies. Subsequently, we delve into a more detailed examination of the spatial distribution of dark matter, namely, its density profile. Finally, we place the dark matter halo in the context of the other components (stellar disk, bulge, and gas) to construct a compound dynamical model.

---

**Palavras-chave:** astronomia, galáxias, matéria escura.

**Keywords:** astronomy, galaxies, dark matter.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v5n1.43132](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v5n1.43132)

## 1 Introdução

Ao se propor uma definição de galáxia, pareceria natural afirmar que galáxias são feitas de estrelas — centenas de bilhões de estrelas. No entanto, as estrelas (somadas ao gás) respondem por apenas cerca de 15% da massa total de uma galáxia típica; os outros 85% correspondem à matéria escura. A imagem que temos atualmente é que cada galáxia está imersa em um grande halo de matéria escura. É a gravidade desse halo que determina o movimento das estrelas como um todo. Hoje em dia, é essencialmente impossível compreender a estrutura de galáxias sem falar em matéria escura.

Ainda não sabemos de que substância a matéria escura é composta. Ela não pode ser observada diretamente, pois não emite luz em nenhum comprimento de onda. Além disso, também não absorve luz. Só conseguimos deduzir a presença da matéria escura indiretamente, pois ela tem massa. Tendo massa, ela exerce forças gravitacionais, que afetam o movimento das estrelas de maneiras bem específicas. E o movimento das estrelas, esse sim, pode ser observado, já que as

estrelas emitem luz.

Do ponto de vista histórico, costuma-se citar o trabalho de Fritz Zwicky [1] sobre o aglomerado de galáxias de Coma como sendo a primeira evidência para existência de matéria escura. No entanto, essa citação em ordem cronológica poderia fazer crer que o tópico de matéria escura estava ativamente presente na astronomia desde os anos 1930, o que não é bem o caso. Foi apenas ao longo da década de 1970 que a existência de matéria escura mostrou-se incontornável na astronomia. Isso deu-se graças à observação das curvas de rotação de galáxias espirais. Não faremos aqui uma revisão histórica das observações, mas na referência [2], de autoria de Albert Bosma, encontra-se um interessante e detalhado relato histórico do gradual entendimento que emergiu ao longo dos anos 1970. Outro problema em começar a contar a história da matéria escura desde Zwicky é que, naquela época, a suposta “massa faltante” poderia em princípio se referir a alguma massa não-luminosa (no sentido de não-estelar): talvez gás, poeira ou eventuais componentes difíceis de observar. Não estava clara ainda a natureza do pro-

blema. No nosso vocabulário atual, quando dizemos *matéria escura*, já estamos excluindo toda a eventual massa na forma de átomos.

O presente artigo pretende introduzir o conceito de matéria escura em galáxias para o leitor que ainda não tem familiaridade com o tema. Na seção 2, entenderemos como exatamente as curvas de rotação de galáxias espirais evidenciam a presença da matéria escura. O leitor poderá acompanhar aquela seção apenas partindo de conceitos físicos e matemáticos do ensino médio. Discutiremos as implicações da existência da matéria escura e seu status atual na astronomia.

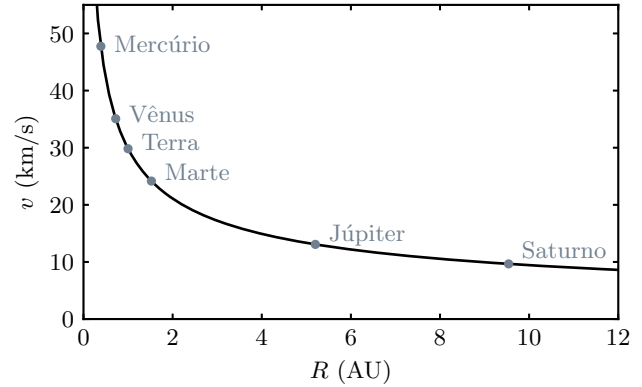
Na seção 3, veremos em mais detalhe como a matéria escura se distribui em galáxias, isto é, estudaremos perfis de densidade. Aquela seção pode ser útil para alunos de graduação que estejam começando a estudar astronomia extragaláctica. A abordagem matemática não é demasiadamente avançada e é apresentada inicialmente de modo a convidar todos os leitores a acompanhar os argumentos.

Por fim, na seção 4, o halo de matéria escura será colocado no contexto das demais componentes estelares e gasosas da galáxia, para compor um modelo dinâmico. Essas duas últimas seções trazem equações que são bastante usadas na pesquisa em astronomia extragaláctica, mas que não são comumente encontradas em materiais didáticos voltados à graduação. Nesse sentido, essa compilação pode servir como um material de consulta para estudantes.

Já que nosso foco aqui são as galáxias em si, não abordaremos o tópico de matéria escura em aglomerados de galáxias. Tampouco será aprofundado o tema de matéria escura na cosmologia, embora a formação de galáxias se dê nesse contexto cosmológico. Além disso, nosso enfoque será nos conceitos e na modelagem teórica das estruturas envolvidas, e não tanto nos aspectos observacionais das curvas de rotação. O leitor interessado poderá encontrar outros detalhes na referência [3].

## 2 Curvas de rotação

Estrelas orbitam o centro da galáxia. Cada estrela está a uma certa distância do centro, e tem uma certa velocidade. Essa velocidade  $v$  em fun-



**Figura 1:** Velocidades orbitais de alguns dos planetas do sistema solar em função do raio orbital em Unidades Astronômicas.

ção da distância galactocêntrica  $R$  é o que chamamos de curva de rotação:  $v(R)$ . Trata-se de uma dinâmica governada pela força gravitacional. Antes de seguirmos para o estudo das curvas de rotação em galáxias, precisamos dar um passo atrás. Como sempre se faz na física, antes de estudar sistemas complicados, convém estudar o sistema mais simples possível. Do ponto de vista gravitacional, o sistema de interesse mais simples é um sistema de 2 corpos; por exemplo, a órbita de um planeta ao redor do Sol.

### 2.1 Órbitas planetárias

Por simplicidade, considere que o planeta está em órbita circular, de raio  $R$ . Qual a velocidade orbital nesse raio? Se o Sol tem massa  $M$  e o planeta tem massa  $m$ , a segunda lei de Newton escrita para o planeta é:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ \frac{GMm}{R^2} &= m \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

A resultante de forças que age no planeta é a força gravitacional  $GMm/R^2$ . A aceleração é a aceleração centrípeta  $a_c = v^2/R$ , pois trata-se de um movimento circular uniforme. Resulta que a velocidade é:

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (1)$$

Essa é uma manifestação da terceira lei de Kepler. Para re-expressá-la numa forma mais usual, basta substituir  $v = 2\pi R/P$ . Assim obtém-se a proporcionalidade  $P^2 \propto R^3$  entre o período orbital  $P$  e o raio. Por esse motivo, essa dependência

funcional  $v(R)$  é chamada de uma curva de rotação kepleriana.

Agora compreendemos que a velocidade é inversamente proporcional a  $\sqrt{R}$ . Ou seja, se fizermos um gráfico para os planetas do sistema solar, teremos uma curva como a da Fig. 1. Mercúrio orbita o Sol com uma alta velocidade; Saturno orbita o Sol com uma baixa velocidade. Tendo como base esse entendimento do sistema solar, podemos voltar ao nosso estudo de galáxias.

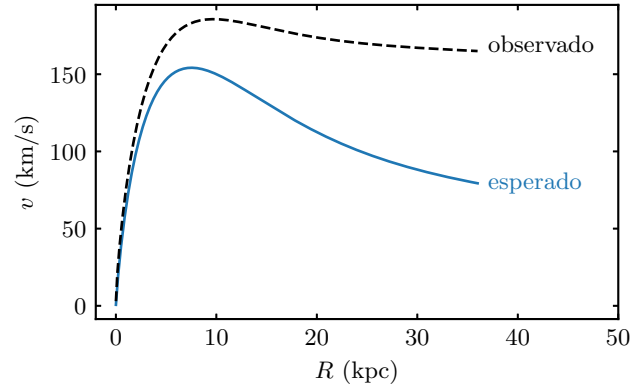
## 2.2 Curvas de rotação de galáxias espirais

Galáxias e sistemas planetários têm em comum a característica de que existe rotação ao redor do centro: planetas orbitam o Sol; estrelas orbitam o centro da galáxia. Essa analogia não nos levará muito longe, mas é com ela que começamos. Vamos concluir em breve que a curva de rotação de um disco estelar deveria ser semelhante à curva de rotação do sistema solar — ao menos para grandes raios. No entanto, vejamos primeiro quais são as ressalvas quanto à região mais interna do disco.

Em que aspectos uma galáxia difere do sistema solar? Importaneamente, a distribuição de massa da galáxia é bastante diferente. Afinal, no sistema solar a massa total está praticamente concentrada em um único ponto, que é o Sol. A massa de qualquer dado planeta (ou de vários planetas) é minúscula comparada à massa do Sol. Nosso resultado da curva de rotação kepleriana depende especificamente dessa suposição: trata-se de força gravitacional exercida por uma massa puntiforme. Já em uma galáxia, não é verdade que a massa esteja concentrada em um único ponto central: a massa das estrelas está distribuída por todo o disco estelar.<sup>1</sup>

Em princípio, não poderíamos aplicar uma conta tão simples como a equação 1 em galáxias. No entanto, ocorre que a massa do disco estelar, embora não puntiforme, é bastante concentrada na região central. De fato, veremos mais adiante que a densidade de estrelas decresce exponenci-

<sup>1</sup>Galáxias em geral têm em seus centros um buraco negro supermassivo, mas ele é pouco relevante para dinâmica galáctica como um todo. Como a massa desse buraco negro é relativamente pequena ( $\sim 10^6 M_\odot$ ) diante da massa total da galáxia ( $\sim 10^{12} M_\odot$ ), a sua influência gravitacional se limita a uma vizinhança imediata relativamente pequena. Para estrelas orbitando a alguns kiloparsecs, é indiferente que exista um buraco negro supermassivo.



**Figura 2:** Representação esquemática comparando a curva de rotação esperada (caso só existisse a massa do disco) e uma a curva de rotação típica observada em galáxias espirais.

almente com o raio. Ou seja, a maior parte da massa estelar está nas regiões centrais, e não na periferia do disco. Imagine que nós vamos nos afastando do centro da galáxia e, em cada raio  $R$ , notamos qual é a massa interna a esse raio. Rapidamente, essa massa interna se aproxima da massa total. Seria válido substituir a massa interna a essa esfera por um ponto na origem? A rigor, não, pois o sistema não é esférico. Recordemos os resultados do teorema de Newton para cascas esféricas: (i) Toda a massa interna a um raio  $R$  pode ser substituída por um ponto na origem; (ii) Toda a massa externa a um raio  $R$  não exerce força gravitacional nenhuma.

Esses resultados só se aplicam a uma distribuição esférica de massa, o que claramente não é o caso para um disco estelar. Embora não seja exatamente correto substituir a massa interna a essa esfera por um ponto na origem, é uma primeira aproximação tolerável. Ainda mais, visto que nosso interesse principal está justamente nos grandes raios. Se estivermos suficientemente longe do centro galáctico, o erro incorrido não é tão grande. O formato exato da curva de rotação no centro será estudado mais adiante. E inclusive ele levará em conta o bojo, que é efetivamente esférico.

A conclusão, por enquanto, é que o formato da curva  $v(R)$  para grandes raios deveria ser semelhante à curva kepleriana  $v(R) \propto R^{-1/2}$ . Em outras palavras, a velocidade orbital das estrelas deveria diminuir intensamente em função do raio. Aqui vem o resultado fundamental: os dados observacionais indicam que não é isso que ocorre.

Pelo contrário, a velocidade das estrelas continua sendo muito alta, mesmo em grandes raios. A Fig. 2 mostra esquematicamente essa situação. A curva de rotação azul é o que se esperaria para um disco estelar. A curva preta é o que de fato se observa. Isso é o que chamamos de uma curva de rotação “plana”, isto é, a velocidade continua com um valor aproximadamente constante em função do raio. Para galáxias do porte da Via Láctea, esse valor é próximo de 200 km/s.

Algumas breves ressalvas observacionais. Ao introduzir o tópico de curvas de rotação, nos referimos às estrelas do disco. No entanto, o disco estelar não se estende muito além de 15 kpc — considerando galáxias do mesmo porte da Via Láctea. Depois desse raio, as estrelas são muito escassas e seria difícil medir precisamente suas velocidades. Medidas de velocidades de estrelas restritas a raios pequenos seriam inconclusivas, pois não permitiriam distinguir conclusivamente um desvio do regime kepleriano. Já o disco gasoso geralmente se estende para além do disco estelar, até raios maiores. Então na realidade as medidas de velocidades do gás (feitas em rádio) é que são cruciais para caracterizar a região externa. Outro detalhe observacional é que, por razões diversas, as curvas de rotação das galáxias observadas não são exatamente planas. Algumas podem ser levemente crescentes, outras levemente decrescentes e outras planas dentro das incertezas de medição. O que importa é que, como um todo, elas não decaem fortemente em grandes raios e são incompatíveis com uma curva kepleriana.

### 2.3 A necessidade de matéria escura

Por que essas altas velocidades exigem a presença de mais massa? Na equação 1, vemos que as velocidades serão maiores se  $M$  for maior. No caso do sistema solar, aquele  $M$  era uma constante: a massa do Sol.<sup>2</sup> No caso da galáxia, seria a massa  $M(r)$  contida dentro de cada raio esférico  $r$ . Se essa massa fosse meramente estelar, as velocidades deveriam ser baixas. Para as velocidades serem altas como indicam as observações, é necessário que exista mais massa. Essa massa

<sup>2</sup>Essa relação é amplamente empregada em várias áreas da Astronomia, como um método de determinação de massa. Por exemplo, medindo as velocidades orbitais das luas de Júpiter e seus respectivos raios, é possível calcular a massa de Júpiter usando a equação 1.

“faltante” é a matéria escura. E ela resulta ser bem maior que a soma das massas das estrelas.

Veremos na seção 3 que a matéria escura está distribuída na forma de um halo. Esse halo<sup>3</sup> é uma estrutura aproximadamente esférica, bem maior que a parte visível da galáxia. Se numa galáxia do porte da Via Láctea as estrelas do disco alcançam não muito mais que 15 kpc, o halo de matéria escura alcança cerca de 200–250 kpc. É importante perceber que o halo não é uma casca esférica oca que envolve a galáxia: ele permeia a galáxia como um todo. É uma distribuição contínua de massa. O halo é mais denso no centro e mais rarefeito na borda, como geralmente acontece com sistemas astronômicos auto-gravitantes. Isso significa que deve haver matéria escura por toda a galáxia. O Sol encontra-se a cerca de 8 kpc do centro da Via Láctea. Podemos estimar que, aqui na vizinhança solar, a densidade de matéria escura corresponderia a cerca de  $0,07 M_{\odot}/\text{pc}^3$ . Essa densidade pode parecer muito baixa em contextos não-astronômicos: menos de  $5 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ , ou seja, o equivalente a alguns prótons por centímetro cúbico. No âmbito do sistema solar, essa densidade se traduziria em algo da ordem de 1 asteroide (digamos, Vesta) dentro do volume da órbita de Netuno. Está claro que a massa de um único asteroide a mais ou a menos não modificaria a dinâmica do sistema solar. Por esses motivos, é consistente com o nosso entendimento atual o fato de que a presença da matéria escura não se manifeste perceptivelmente nessas pequenas escalas. É apenas na escala galáctica como um todo que os volumes são suficientemente imensos para que a massa da matéria escura seja uma contribuição não apenas relevante, mas dominante.

O halo de matéria escura (com massa, densidade e tamanho detalhados na seção 3) é, por-

<sup>3</sup>Existe também uma estrutura chamada de halo estelar, que corresponde a estrelas que não fazem parte do disco estelar, mas que estão distribuídas esfericamente ao redor do centro galáctico. O halo estelar é interessante para estudos de formação e evolução galáctica, pois lá estão os aglomerados globulares, que são associações de estrelas muito antigas. No entanto, como a massa do halo estelar é da ordem de apenas 1% da massa do disco, ele pode ser ignorado em primeira aproximação ao se fazer uma modelagem dinâmica. O halo estelar não tem a ver com o halo de matéria escura. Ambos têm o nome de halo apenas porque trata-se de distribuições esféricas “ao redor” da galáxia.

tanto, necessário para explicar as velocidades observadas nas curvas de rotação — velocidades estas que seriam incompreensíveis de outra forma, diante das leis da física conhecidas. Uma outra abordagem seria questionar se as leis da física estão erradas.

Uma analogia histórica frequentemente usada para ilustrar esse dilema consiste em narrar dois problemas astronômicos que foram detectados no fim do século XIX. Um deles era uma pequena discrepância na órbita de Urano, que levou à descoberta de Netuno — na realidade, levou à previsão teórica de que Netuno precisava existir. Neste caso, mantivemos as leis da física (mecânica newtoniana) e postulamos a existência de uma massa até então não detectada (Netuno). Se essa massa postulada fosse levada em conta nos cálculos, as perturbações gravitacionais induzidas por ela reconciliariam a teoria com os dados observacionais. Como sabemos, essa abordagem teve sucesso e Netuno foi detectado com telescópios logo em seguida, muito próximo da posição prevista. Esse evento pode ser considerado um dos mais estrondosos triunfos da mecânica clássica e quiçá da física como um todo.

O outro problema orbital no século XIX era, famosamente, o da órbita de Mercúrio. Os sintomas desse problema eram similares ao descrito anteriormente, mas a tentativa de aplicar a mesma solução revelou-se infrutífera: não existe uma massa extra (um hipotético planeta Vulcano) próxima do Sol e causando perturbações gravitacionais na órbita de Mercúrio. Nesse caso, não se tratava de postular uma massa faltante. Foi só com o advento da relatividade geral no começo do século XX que se pôde finalmente compreender a órbita de Mercúrio. A física newtoniana não é suficiente para explicar com precisão movimentos tão próximos de um potencial gravitacional do porte do Sol. A relatividade geral veio substituir a física newtoniana como a melhor explicação que conhecemos para fenômenos gravitacionais.

Diante dessas histórias, onde se encaixa o atual mistério da matéria escura? As opções são: manter as leis da física e incluir uma massa faltante nos cálculos; ou encontrar novas leis da física. Atualmente, o consenso entre os astrônomos é que estamos diante de uma situação como a primeira, a de Netuno. Não se conhece, nos dias de hoje, motivos convincentes para abandonar a te-

oria da relatividade geral, que vem sobrevivendo a todos os severos testes a que a submetemos durante um século. Uma nova teoria de gravidade que tivesse a pretensão de a suplantaria precisaria explicar todos os fenômenos atualmente explicados com estupendo êxito pela relatividade geral e, além disso, explicar outros fenômenos e ainda fazer novas previsões. Pode ser que um dia uma tal nova teoria seja alcançada, mas atualmente não conhecemos algo assim. Se a relatividade geral segue sendo a melhor teoria disponível, então é necessário que existam halos de matéria escura.

Embora a necessidade da matéria escura tenha se estabelecido na astronomia inicialmente através das curvas de rotação de galáxias espirais, as evidências observacionais hoje em dia são provenientes de diferentes fontes, em diferentes escalas. A explicação detalhada de cada uma dessas evidências está além do escopo do presente texto, mas podemos citar brevemente as seguintes. Em aglomerados de galáxias, temos as massas determinadas via lentes gravitacionais, via temperatura do gás observado em raios-X, e dinamicamente via teorema do virial com as velocidades das galáxias — este último, o método empregado por Zwicky nos anos 1930. Já na escala cosmológica, temos evidências de matéria escura na abundância primordial de hélio, na radiação cósmica de fundo, e na própria formação de estruturas em larga escala — para citar apenas algumas. O importante é que diversas dessas fontes de informação são independentes entre si. E no entanto, todas apontam não apenas para a necessidade de uma massa não-bariônica,<sup>4</sup> mas quantitativamente para uma proporção específica. Esse acordo entre resultados independentes é notável e torna difícil hoje em dia abandonar a matéria escura. É possível argumentar que as evidências cosmológicas talvez sejam as mais fortes atualmente.

Diante desse cenário, vale a pena enfatizar que — do ponto de vista prático — estamos operando no regime não-relativístico, onde a mecânica clássica é sem dúvida suficiente para os tópicos de

<sup>4</sup>No jargão da astronomia, chamamos de bárions tudo aquilo que tenha massa e que não seja matéria escura ou neutrinos. É claramente um abuso de linguagem, em dissonância com o léxico dos físicos. No entanto, para fins do saldo total de massa do Universo, não vale a pena separar os elétrons e neutrinos do resto.

dinâmica galáctica. Por exemplo, em buracos negros e outros objetos compactos o potencial gravitacional é muito profundo, o que exige a aplicação da relatividade geral. Já em galáxias, a gravitação newtoniana é uma aproximação suficiente. Embora a massa de uma galáxia seja grande, essa massa está espalhada por distâncias imensas, o que faz com que a galáxia não seja um sistema tão denso. Em outras palavras, não se trata de um poço de potencial gravitacional tão acentuado. Em suma, um sistema de  $\sim 10^{12} M_{\odot}$ , com órbitas de  $\sim 100$  km/s a 10 kpc é plenamente não-relativístico, para todos os fins práticos.

Outro esclarecimento diz respeito ao termo kepleriano. As leis de Kepler carregam esse nome por razões históricas, mas em última análise sabemos que são uma decorrência direta da gravitação newtoniana, aplicada ao problema de 2 corpos. Quando dizemos que a curva de rotação é não-kepleriana isso não significa dizer que trata-se de algum desvio com relação à mecânica clássica, muito menos nova física ou teorias alternativas de gravidade. Dizer que a curva de rotação não é kepleriana significa apenas que a dependência funcional não é  $v \propto R^{-1/2}$ , ou seja, que não se aplica a aproximação de massas puntiformes. Mas certamente continuamos no regime da gravitação newtoniana. O elemento que deixa de ser satisfeito é apenas a suposição de que a massa total  $M$  estaria concentrada num ponto central; essa suposição precisa ser substituída por uma distribuição contínua de massa  $M(r)$ . Portanto, nossa interpretação atual é que a não-keplerianidade indica que faltava levar em conta uma componente extensa de massa (o halo de matéria escura).

### 3 Perfis de densidade da matéria escura

Para explicar a curva de rotação não-kepleriana observada, não basta que a matéria escura exista e não basta que tenha grande massa. É necessário, também, que ela tenha uma distribuição radial específica. Isto é, se a matéria escura estivesse concentrada em um ponto central, isso não resolveria o problema.

Agora precisamos nos debruçar sobre uma questão específica: como exatamente se distribui a matéria escura radialmente? O único dado observacional de que dispomos pode parecer pobre

em informação:  $v$  é constante com o raio — nada mais. Surpreendentemente, é possível extrair características interessantes do halo de matéria escura apenas com esse dado aparentemente pouco promissor.

#### 3.1 Massa cumulativa

Para isso, vamos considerar o conceito de massa cumulativa  $M(r)$ , que é a massa contida dentro de uma esfera de raio  $r$ . Às vezes, também é usada a notação  $M(<r)$  para enfatizar que trata-se de toda a massa em raios menores que  $r$ : desde o centro até aquele  $r$ .

No sistema solar, se tomarmos sucessivas esferas de raio  $r$ , a massa contida em cada esfera será sempre a mesma: a massa do Sol. É por isso que  $M$  era uma constante na equação 1. Já na galáxia, cada esfera de raio  $r$  contém uma massa  $M(r)$  interna àquele raio. É claro que, em função de  $r$ , essa função só pode ser monotonicamente crescente, até que se atinja a massa total. Agora, a velocidade circular será:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (2)$$

Podemos nos perguntar qual deve ser a forma funcional da função  $M(r)$  para que a velocidade resulte ser uma constante. Ora, é fácil ver que se  $M(r)$  for linearmente crescente com  $r$ , obtemos o comportamento desejado:

$$\begin{aligned} M(r) &\propto r \\ v(r) &= \text{cte.} \end{aligned}$$

O que significa dizer que a massa “cresce” com o raio? Significa que cada  $r$  contém mais massa cumulativa que o  $r$  anterior. Ou seja, ainda há halo de matéria escura nas regiões onde curvas de rotação estão sendo medidas, já que cada próxima esfera ainda abarca uma certa massa adicional, com relação à esfera anterior. No entanto, isso certamente não significa que o halo seja mais denso em raios maiores: pelo contrário, a densidade cai com o raio.

Agora precisamos esclarecer como densidade se conecta com massa. Vamos imaginar inicialmente uma configuração simples (e errada): suponha que o halo seja uma esfera de densidade uniforme. Nesse caso, poderíamos fazer um cálculo simples

em cada raio:

$$\text{massa} = \text{densidade} \times \text{volume}$$

Em cada dado raio, o volume da esfera é  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , então a massa interna àquele raio seria simplesmente uma densidade constante  $\rho = \text{cte}$  multiplicada por  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . Nesse caso,

$$\begin{aligned} M(r) &= \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\ M(r) &\propto r^3 \end{aligned}$$

Colocando esse  $M(r)$  na equação 2, resulta uma velocidade não-constante:

$$v \propto \sqrt{\frac{r^3}{r}} \propto r,$$

o que contraria a curva de rotação plana e mostra que o halo não pode ser uma esfera uniforme. Precisa haver alguma dependência radial  $\rho(r)$  no perfil de densidade.

Como calcular massa cumulativa de uma esfera em que a densidade depende do raio conforme  $\rho(r)$ ? Continua sendo verdade que a massa é densidade multiplicada por volume. Porém, agora a conta precisa ser feita em cada raio, dentro de uma casca esférica de raio  $r$  e de espessura infinitesimal  $dr$ . Podemos considerar que o volume dessa casca esférica é sua área  $4\pi r^2$  multiplicada pela sua espessura  $dr$ :

$$\begin{aligned} dV &= A dr \\ dV &= 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

Este volume  $dV$  multiplicado pela densidade naquele raio  $\rho(r)$  dará a massa contida na casca:

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

Agora basta somar todas as cascas desde o centro até um dado  $r$ :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (3)$$

Repare que a integral está sendo feita na variável  $r'$ . Os extremos de integração são desde  $r' = 0$  até  $r' = r$ . Este  $r$  é o que aparece no resultado  $M(r)$ : é a massa cumulativa desde 0 até um dado  $r$ .

Com esse raciocínio, conseguimos na equação 3 a relação geral entre uma densidade qualquer  $\rho(r)$  e sua massa cumulativa, para um perfil esférico.

Agora podemos nos perguntar qual é a dependência funcional específica  $\rho(r)$  que leva ao  $M(r)$  desejado:  $M(r) \propto r$ . Bem, parece fisicamente razoável que  $\rho(r)$  diminua com  $r$ . Portanto faz sentido considerar expoentes negativos em  $r$ . Em particular, o ansatz  $\rho(r) \propto r^{-2}$  é especialmente simples, pois faz sobrar apenas a integral de uma constante, em  $r'$ , que dá  $r$ :

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r k dr' \\ M(r) &= k r, \end{aligned}$$

onde  $k$  é uma constante.

Diante disso, concluímos que o halo de matéria escura deveria ter uma densidade que cai com o quadrado do raio, ao menos nas regiões mais externas, onde a curva de rotação é medida. Se o perfil de densidade for aproximadamente desse tipo, resultará uma curva de rotação aproximadamente plana.

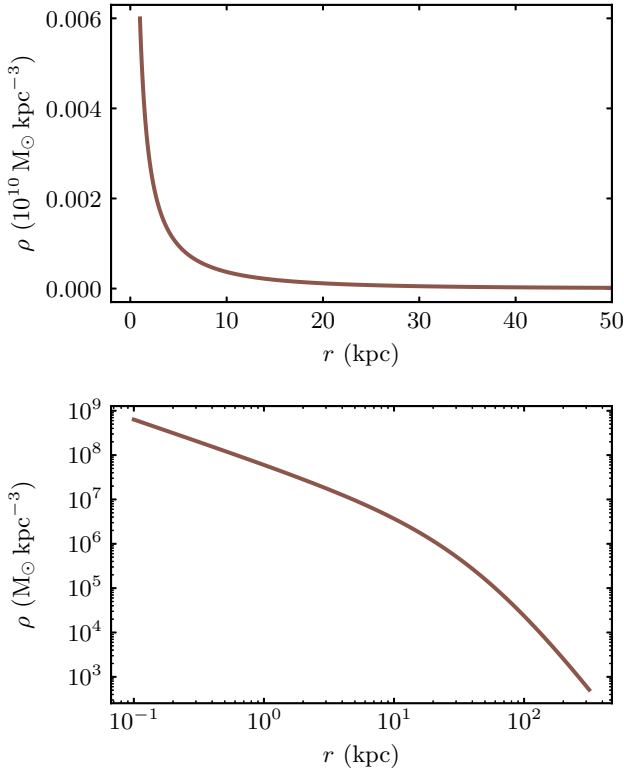
Esses cálculos nos dão uma intuição bastante útil sobre perfis de densidade da matéria escura. No entanto, cabe a ressalva de que esses argumentos não devem ser entendidos como uma demonstração teórica — entre outros motivos porque a planaridade da curva de rotação não é uma exigência matemática exata; é apenas uma simplificação baseada num vínculo observacional. É um vínculo qualitativamente importante, porém quantitativamente aproximado. Em outras palavras, a suposta dependência  $1/r^2$  não é uma exigência física precisa; é apenas um argumento motivador dos tipos de perfis de densidade plausíveis. Veremos a seguir que, para os perfis mais realistas, a potência de  $r$  não é única ao longo de todo o halo.

### 3.2 Perfil de Hernquist

Um perfil de densidade frequentemente usado em astronomia extragaláctica é o chamado perfil de Hernquist [4]. É útil para representar um halo de matéria escura. A dependência funcional do perfil de densidade de Hernquist é:

$$\rho(r) = \frac{M_h a_h}{2\pi r} \frac{1}{(r + a_h)^3}, \quad (4)$$

onde  $M_h$  é a massa total do halo, e  $a_h$  é um comprimento de escala. Esse  $a_h$  não é um tamanho de alguma estrutura física específica. Ele deve



**Figura 3:** Perfil de densidade de Hernquist (equação 4). O painel superior mostra eixos lineares, e o painel inferior mostra a mesma função com eixos logarítmicos. Note que os intervalos radiais exibidos são diferentes.

ser entendido como um parâmetro que controla o quanto o halo é centralmente concentrado. Um halo com uma dada massa fixa  $M_h$  poderia ser mais concentrado ( $a_h$  pequeno), ou mais difuso ( $a_h$  grande).

A Fig. 3 mostra a equação 4 primeiro em escala linear, para enfatizar o seu rápido decaimento desde o centro; e em seguida em escala logarítmica, para exibir os diferentes regimes. Neste exemplo, foram usados os parâmetros  $M_h = 10^{12} M_\odot$  e  $a_h = 44$  kpc, que são apropriados para representar o halo de matéria escura de uma galáxia do porte da Via Láctea. Nota-se no painel inferior da Fig. 3 que a inclinação muda de comportamento nas imediações de  $r = a_h$ , sendo mais suave no centro e mais acentuada na região externa.

Podemos inspecionar os limites da equação 4, rearranjando os termos para explicitar a razão  $r/a_h$ :

$$\rho(r) = \frac{M_h}{4\pi a_h^3} \frac{1}{\frac{r}{a_h}} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{a_h}\right)^3} \quad (5)$$

Quando o raio é muito pequeno ( $r/a_h \ll 1$ ), podemos aproximar<sup>5</sup> o termo ao cubo por:

$$\left(1 + \frac{r}{a_h}\right)^{-3} \simeq 1 - 3\frac{r}{a_h}$$

Resulta, para raios pequenos, que  $\rho(r) \propto r^{-1}$ . Já para raios muito grandes ( $r/a_h \gg 1$ ), basta notar que:

$$\left(1 + \frac{r}{a_h}\right)^3 \simeq \left(\frac{r}{a_h}\right)^3 \quad (6)$$

Daí resulta  $\rho(r) \propto r^{-4}$ . Em suma, comportam-se da seguinte forma os regimes interno e externo do perfil de densidade de Hernquist:

$$\begin{aligned} \rho(r) &\propto \frac{1}{r} && \text{se } r \ll a_h \\ \rho(r) &\propto \frac{1}{r^4} && \text{se } r \gg a_h \end{aligned}$$

Obviamente, a transição não é abrupta, pois trata-se de uma função suave, que passa gradualmente pelas inclinações intermediárias.

Na realidade, este perfil de Hernquist poderia ser visto como um caso particular de uma família mais geral de perfis com duas leis de potência.<sup>6</sup> Genericamente, poderíamos escrever:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{a}\right)^{\beta-\alpha}}, \quad (7)$$

com limites:

$$\begin{aligned} \rho(r) &\propto \frac{1}{r^\alpha} && \text{se } r \ll a \\ \rho(r) &\propto \frac{1}{r^\beta} && \text{se } r \gg a \end{aligned}$$

O perfil de Hernquist é o caso particular onde  $\alpha = 1$  e  $\beta = 4$ .

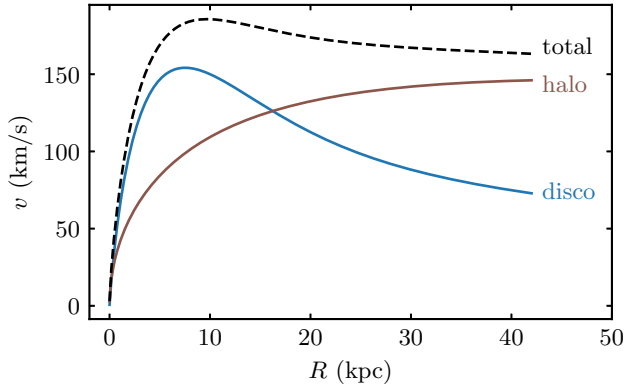
Tendo caracterizado o perfil de densidade, podemos seguir adiante usando a equação 3 para calcular a sua massa cumulativa de Hernquist. Resulta ser uma expressão simples:

$$M(r) = M_h \left(\frac{r}{r + a_h}\right)^2 \quad (8)$$

Substituindo essa massa cumulativa na equação 2, obtemos a velocidade circular associada a esse perfil:

$$v(r) = \frac{\sqrt{GM_h r}}{r + a_h} \quad (9)$$





**Figura 4:** Contribuições do disco estelar e do halo de matéria escura para a curva de rotação total. A curva marrom corresponde a um halo com o perfil de Hernquist (equação 9).

Na Fig. 4, a curva marrom corresponde à equação 9, isto é, representa a velocidade devida à massa do halo de matéria escura. A curva azul representa a velocidade devida ao disco estelar. Veremos adiante como exatamente essas contribuições se compõem para dar a curva de rotação total. Por enquanto, a Fig. 4 é suficiente para apreciar como a presença de um halo de matéria escura — com um perfil de densidade apropriado — consegue explicar a curva de rotação observada. Percebemos que a contribuição proveniente do disco estelar existe e é, sim, aproximadamente kepleriana em grandes raios. Ocorre que o disco não é a única contribuição.

O perfil de Hernquist não decorre diretamente de princípios primeiros da física. Deve ser entendido como um modelo fenomenológico, ou como uma proposta de dependência funcional, que vem a ser conveniente pela sua simplicidade analítica e por representar razoavelmente bem as estruturas em questão.

### 3.3 Perfil de Navarro–Frenk–White

Um outro perfil de densidade amplamente usado para representar halos de matéria escura é o chamado perfil de Navarro–Frenk–White, ou NFW [6]. Esse perfil também não é deduzido da física fundamental, mas tem uma origem peculiar: a equação que o descreve pode ser entendida como um “ajuste empírico”. Porém aqui não estamos nos referindo a dados observacionais do

Universo real, mas sim de universos simulados.

Simulações cosmológicas são cálculos numéricos onde acompanhamos a evolução gravitacional, em função do tempo, das estruturas em larga escala.<sup>7</sup> A condição inicial é um cubo cujo volume seja comparável a uma fração representativa do Universo observável — ou ao menos uma escala acima da qual o Universo pode ser considerado homogêneo. As faces do cubo são condições de contorno periódicas. Em seu interior, há partículas (no sentido computacional) representando a distribuição de massa do Universo jovem, pouco tempo depois do Big Bang — essa é a condição inicial da simulação. As partículas podem representar gás e matéria escura nas simulações feitas atualmente; porém as simulações mais antigas usavam apenas matéria escura e obtinham resultados já muito próximos da real distribuição de galáxias. No Universo jovem, a densidade era quase a mesma em todos os pontos do espaço, a menos de pequenas flutuações locais — regiões levemente mais densas que a média, e regiões levemente menos densas que a média. Graças à ação aglutinadora da gravidade, com o passar dos bilhões de anos, as regiões sobredensas sofrem colapso gravitacional e vão dar origem aos halos de matéria escura que, por sua vez, hospedam as galáxias. O resultado é que, ao longo de quase 14 bilhões de anos, o Universo que começou homogêneo termina nos dias atuais repleto de halos de matéria escura. Isto é, os halos de matéria escura formam-se “espontaneamente” dentro da simulação cosmológica. Os ingredientes são: gravidade e uma distribuição inicial de massa quase homogênea.

Com os dados provenientes dessas simulações cosmológicas, é possível medir diretamente os perfis de densidades dos halos de matéria escura. Basta centralizar cada halo na origem de um sistema de coordenadas e medir a densidade em função do raio: na prática, isso consiste em medir a massa contida dentro de sucessivas cascas esféricas, e dividi-la pelo volume de cada casca. Isso nos dá  $\rho(r)$  medido numericamente. Essa análise aplicada para halos de diferentes massas revelou que a seguinte função ajusta muito bem o perfil de densidade que emergiu espontaneamente das

<sup>5</sup>Lembrando que  $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ , se  $x \ll 1$ .

<sup>6</sup>Ver a seção 3.4.6 da referência [5].

<sup>7</sup>Uma revisão do estado atual das grandes simulações cosmológicas pode ser encontrada em [7].

simulações:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \quad (10)$$

Esse é o perfil de NFW. Percebemos que, comparado com a equação 7, trata-se de um caso particular onde  $\alpha = 1$  e  $\beta = 3$ . Portanto, o perfil de NFW tem comportamento assintótico de  $\rho \propto r^{-3}$  em grandes raios. A parametrização aqui é outra: os parâmetros são  $r_s$ , que é um comprimento de escala (diferente de  $a_h$ ); e  $\rho_s$  que é uma densidade característica. Repare que  $\rho_s$  não é a densidade central; afinal, nem existe densidade finita em  $r \rightarrow 0$ . É o que chamamos de *cusp* (cúspide): quando a densidade cresce acentuadamente em direção ao centro. Se a densidade tendesse a um valor constante para  $r = 0$ , diríamos que o perfil tem um *core* (caroço).

Na realidade, é mais comum re-expressar  $r_s$  em termos de um parâmetro adimensional  $c$ , chamado concentração, que é definido da seguinte forma:

$$c = \frac{r_{200}}{r_s} \quad (11)$$

Quanto menor  $r_s$ , maior a concentração. Mas agora precisamos definir esta importante grandeza que é o  $r_{200}$ , chamado de raio do virial. A definição é a seguinte. O raio do virial é o raio da esfera dentro da qual a densidade média vale 200 vezes a densidade crítica do Universo. Essa densidade crítica é uma grandeza que vem da cosmologia e está relacionada com a expansão do Universo. Para nossos propósitos imediatos,  $\rho_{cr}$  pode ser entendido como uma constante da natureza; serve como uma certa densidade de referência. Seu valor vem a ser:

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0}{8\pi G} = 9.2 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3, \quad (12)$$

onde  $H_0$  é a constante de Hubble<sup>8</sup> e  $G$  é a constante de gravitação universal. Uma vez definido o raio do virial, a massa do virial  $M_{200}$  é simplesmente a massa contida dentro da esfera de raio  $r_{200}$ . É simples conectar  $M_{200}$  e  $r_{200}$ :

$$\frac{M_{200}}{\frac{4\pi}{3} r_{200}^3} = 200 \rho_{cr} \quad (13)$$

<sup>8</sup>Aqui foi adotado o valor aproximado da constante de Hubble  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Essa relação também serve para ressaltar que a densidade que importa para o critério de 200  $\rho_{cr}$  não é a densidade *em* um dado  $r$ , mas sim a densidade *média* dentro da esfera: toda a massa interna dividida por todo o volume.

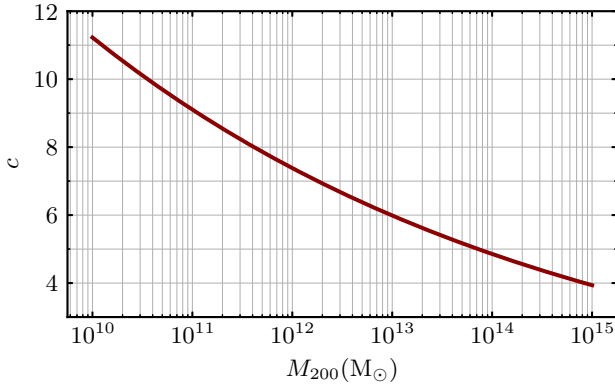
O fator numérico 200 poderia, à primeira vista, ser aceito como uma convenção arbitrária, que serve para definir quantitativamente tamanhos de estruturas difusas que não têm fronteiras nítidas. Afinal, não há um raio bem definido onde acaba por completo a massa de uma galáxia; a densidade poderia decrescer indefinidamente. Mas na realidade, essa sobredensidade de 200  $\rho_{cr}$  tem uma motivação dentro da teoria de formação de estruturas: é aproximadamente esse limiar que determina se uma perturbação irá colapsar localmente. Então na prática, esse critério acaba sendo apropriado para definir o tamanho da região dentro da qual deve valer o equilíbrio dinâmico. Quando um sistema está em equilíbrio dinâmico, dizemos que está “virializado”.

Voltando ao  $c$ , podemos nos perguntar se um halo de dada massa  $M_{200}$  poderia ter qualquer concentração. Do ponto de vista da equação genérica, até poderia. Mas aqui temos mais uma importante relação empírica proveniente das simulações cosmológicas. Com os resultados das simulações, foi possível obter  $r_s$  ajustando o perfil NFW para qualquer halo. O  $r_{200}$  mede diretamente em cada halo simulado. Assim, tem-se  $c$  medido para todos os halos. Um gráfico de  $c$  em função de  $M_{200}$  revela que existe uma correlação bem definida entre essas duas grandezas, no sentido de que os halos de alta massa são menos concentrados. Essa relação vale desde massas de galáxias (com  $c$  por volta de 8 ou mais), até massas de aglomerados de galáxias (com  $c$  por volta de 4). Uma das referências muito usadas para esse fim é [8], cujo ajuste entre  $c$  e  $M_{200}$  pode ser expresso assim:<sup>9</sup>

$$c = \frac{6.71}{(1+z)^{0.44}} \left( \frac{M_{200}}{2.9 \times 10^{12} M_\odot} \right)^{-0.091}, \quad (14)$$

onde  $z$  é o redshift. No Universo local (dias de hoje), o redshift é  $z = 0$ . A Fig. 5 mostra a equação 14 para  $z = 0$ .

<sup>9</sup>Aqui também já foi adotado o valor aproximado  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Ver na referência [9] outras expressões e outros gráficos para a concentração.



**Figura 5:** Relação entre concentração e massa do virial (equação 14 para redshift  $z = 0$ ), segundo o ajuste de [8].

Essas parametrizações podem parecer indiretas, mas o resultado então é que tudo decorre diante de um único dado de entrada: o  $M_{200}$ . Dele decorre a concentração pela equação 14; decorre  $r_{200}$  pela equação 13; e decorre  $r_s$  pela equação 11. Por fim,  $\rho_s$  também pode ser obtido unicamente, sem liberdade de escolha adicional:

$$\rho_s = \frac{200}{3} \rho_{\text{cr}} \frac{c^3}{[\ln(1+c) - c/(1+c)]} \quad (15)$$

Note que  $\rho_s$  fica completamente determinado por  $c$ . Então poderíamos enxergar o numerador da equação 10 como sendo uma mera função de  $c$  multiplicada por uma constante. A maneira de chegar na equação 15 é: calcular a massa cumulativa  $M(r)$  de NFW, avaliá-la em  $r = r_{200}$ , e isolar  $\rho_s$ . Fica como exercício para o leitor fazer a integral:

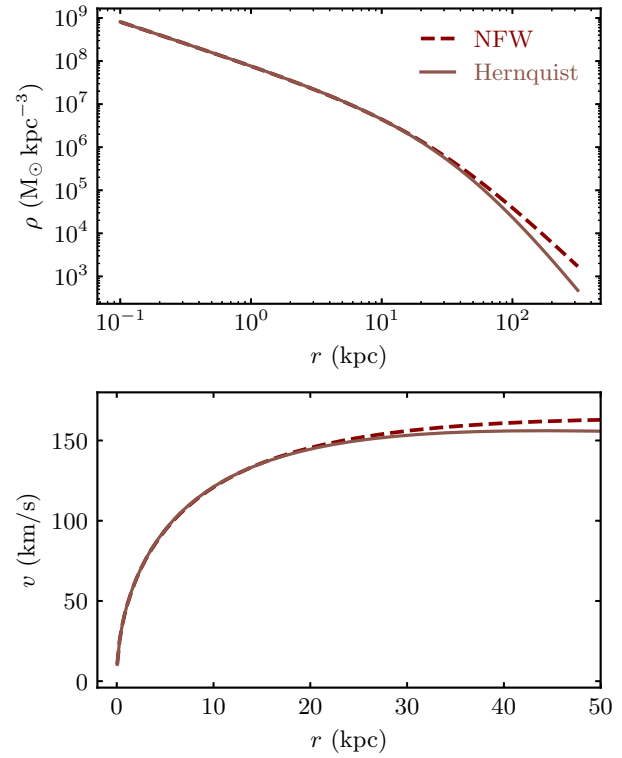
$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \frac{\rho_s}{\left(\frac{r'}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r'}{r_s}\right)^2} dr'. \quad (16)$$

Para isso, faz-se a mudança de variável  $r/r_s = cx$ . O resultado é:

$$M(r) = 4\pi\rho_s \frac{r_{200}^3}{c^3} \left[ \frac{1}{1 + \frac{r}{r_s}} + \ln\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) - 1 \right] \quad (17)$$

Essa massa cumulativa pode ser substituída na equação 2, o que dá a velocidade circular devida ao perfil NFW.

Na Fig. 6 são comparados os perfis de Hernquist e de NFW. No painel superior, vemos que eles coincidem na região central e começam a se afastar para grandes raios, com o NFW caindo mais lentamente ( $\propto r^{-3}$ ) do que o Hernquist,

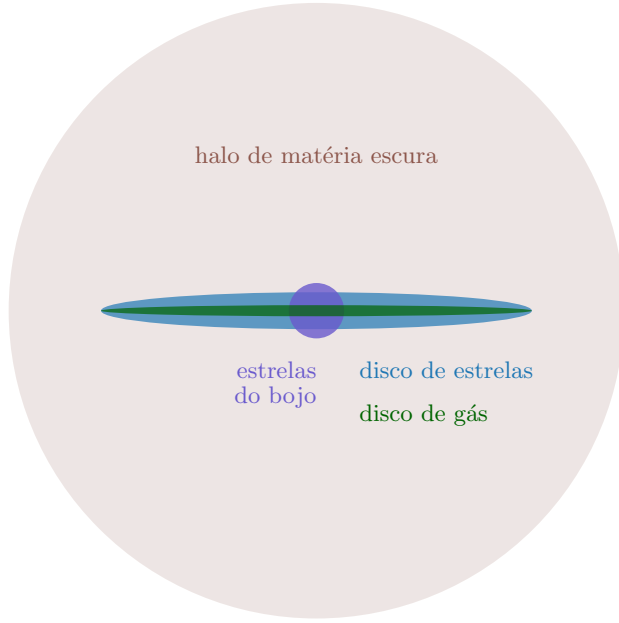


**Figura 6:** Comparação entre os perfis de densidade de Hernquist e de NFW. O painel inferior mostra as respectivas curvas de rotação.

que cai de maneira mais acentuada ( $\propto r^{-4}$ ). De fato, essa dependência tem uma consequência um pouco inconveniente: a massa total do perfil NFW não converge. Apesar dessa inconveniência matemática, o perfil NFW é muito usado, pois o conceito massa do virial é mais relevante do que o conceito de “massa total”. Do ponto de vista numérico, costuma-se aplicar algum truncamento arbitrário dependendo da aplicação. Ao mesmo tempo, constatamos na Fig. 6 que o perfil de Hernquist é uma aproximação bastante satisfatória. A região onde ele discorda de NFW é uma região de relativa baixa densidade, o que dificilmente acarretaria grandes diferenças do ponto de vista dinâmico.

A dinâmica na região onde se encontra a galáxia (disco de estrelas e gás) é evidenciada na curva de rotação, no painel inferior da Fig. 6. Aí percebemos também que ambos os perfis resultam em curvas de rotação com as propriedades desejadas, e bastante similares entre si.

Um último detalhe da relação entre os dois perfis. Para que eles de fato coincidam no centro, é necessária uma escolha adequada do parâmetro



**Figura 7:** Representação esquemática das 4 componentes de massa usadas no modelo composto. Note que as dimensões espaciais não estão em escala proporcional. Em particular, o halo de matéria escura deveria ser cerca de 15 vezes maior que a parte visível da galáxia.

$a_h$ , o comprimento de escala de Hernquist. Escrevendo as duas aproximações de pequenos raios (isto é,  $r \ll r_s$  e  $r \ll a_h$ ) e exigindo que essas aproximações coincidam, é possível obter a relação entre os comprimentos de escala:

$$\frac{a_h}{r_s} = \sqrt{2 [\ln(1+c) - c/(1+c)]} \quad (18)$$

#### 4 Um modelo composto

Na seção anterior, caracterizamos detalhadamente a distribuição de matéria escura, na forma de um halo esférico com perfil de densidade específico. Agora, podemos colocar esse halo no contexto das demais componentes de uma galáxia espiral. Assim, vamos completar um modelo dinâmico de uma galáxia composta de (i) halo de matéria escura, (ii) disco estelar, (iii) disco de gás, e (iv) estrelas do bojo. Cada um desses componentes tem a sua massa e essa massa está distribuída de uma certa maneira. O halo de matéria escura já está estabelecido. A seguir, vamos caracterizar as componentes bariônicas.

#### 4.1 Disco estelar

Precisamos de uma função que descreva como a massa do disco estelar está distribuída espacialmente. Pela geometria do disco, é conveniente usar coordenadas cilíndricas: o raio cilíndrico  $R$  e a altura  $z$ . Uma maneira usual de modelar o perfil de densidade de um disco estelar é a seguinte.

$$\rho(R, z) = \frac{M_d}{4\pi R_d^2 z_d} e^{-R/R_d} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{z_d}\right) \quad (19)$$

onde  $M_d$  é a massa do disco estelar. Olhando para a parte radial, vemos que a densidade diminui exponencialmente com o raio, e o ritmo dessa queda é controlado pelo comprimento de escala  $R_d$ . Não acontece nada fisicamente especial nesse raio; é apenas o raio onde a densidade central terá caído por um fator  $1/e$ . Já na parte vertical, pode parecer exótica a dependência com a secante hiperbólica. Ocorre que essa função (ao quadrado) se assemelha a uma exponencial, mas com a vantagem de ter um topo suave. Isso significa que, verticalmente, a densidade de estrelas diminui quase exponencialmente com a altura  $z$ . Por construção, esse perfil é simétrico com relação ao plano  $z = 0$ . O parâmetro  $z_d$  regula a espessura do disco estelar. A equação 19 pode ser aceita com uma motivação observacional: é uma dependência funcional simples que representa bem os perfis (de luz) medidos em galáxias espirais observadas.

Para certos fins, é desejável ter uma grandeza projetada, que dependa só de  $R$ . Projetar toda a massa no plano  $z = 0$  significa integrar a equação 19 ao longo de todos os  $z$ :

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z) dz \quad (20)$$

O resultado é a densidade superficial de massa (massa dividida por área). Como a dependência com  $z$  desaparece, sobra apenas a dependência com  $R$ :

$$\Sigma(R) = \frac{M_d}{2\pi R_d^2} e^{-R/R_d} \quad (21)$$

Se precisássemos de uma massa cumulativa, poderíamos usar não esferas, mas sim anéis. Considere um anel de raio  $R$  e largura infinitesimal  $dR$ . A área desse anel será  $dA = 2\pi R dR$ . Por isso, a massa cumulativa dentro de anéis de raio  $R$  será:

$$M(R) = \int_0^R 2\pi R' \Sigma(R') dR' \quad (22)$$

Substituindo o  $\Sigma(R)$  da equação 21, resulta a massa cumulativa do disco exponencial:

$$M(R) = M_d \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R}{R_d} \right) e^{-R/R_d} \right] \quad (23)$$

Até aqui, fizemos somente operações lícitas com o perfil exponencial. O próximo passo é, a rigor, inválido. Consiste em fingir que a massa cumulativa da equação 23 pode ser usada para calcular velocidade circular. Esse cálculo não é correto, já que o teorema de Newton sobre as cascas esféricas supõe distribuição esférica de massa, o que evidentemente não é válido para o disco. Mesmo assim, substituindo a equação 23 na equação 2, obtemos uma velocidade circular devida à massa do disco.

$$v^2(R) = \frac{G}{R} M_d \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R}{R_d} \right) e^{-R/R_d} \right] \quad (24)$$

Esse resultado é inexato, mas veremos a seguir que o erro não é muito grande.

O procedimento exato para obter a velocidade circular de um disco exponencial fino ultrapassa o escopo deste artigo, mas a solução pode ser consultada na referência [10] e está reproduzida a seguir:<sup>10</sup>

$$v^2(R) = 4\pi G \Sigma_0 R_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)], \quad (25)$$

onde  $I_n$  e  $K_n$  são as funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo. Definiu-se a variável:

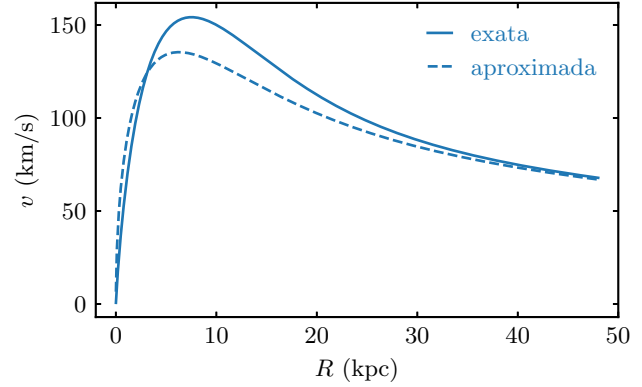
$$y \equiv \frac{R}{2R_d} \quad (26)$$

e a densidade central foi escrita como sendo:

$$\Sigma_0 = \frac{M_d}{2\pi R_d^2}, \quad (27)$$

Se a equação 25 é a solução exata, ela pode ser comparada com a aproximação que usou a massa cumulativa. A comparação está mostrada na Fig. 8. A aproximação subestima o pico de velocidade em quase 15%. Para raios maiores, a aproximação se assemelha ao valor exato. Embora seja conceitualmente incorreto substituir a massa cumulativa do disco por uma partícula na origem, na prática, essa aproximação vai ficando progressivamente menos errada conforme

<sup>10</sup>Equação 2.165 da referência [10]



**Figura 8:** Comparação entre a solução exata para a velocidade circular de um disco exponencial fino [10] e a aproximação de massa cumulativa em esferas.

nos afastamos do centro. Isso é compreensível, tendo em mente que, para quem está a dezenas de kiloparsecs do centro, a exata geometria da região interna do disco já não é tão relevante. Visto de longe, tudo parece um ponto.

## 4.2 Disco de gás

Além de estrelas, há uma componente de gás no disco das galáxias espirais. Esse gás compõe o chamado meio interestelar. Em uma galáxia como a Via Láctea, o gás contribui com cerca de 10% da massa do disco.

Para representar o disco de gás, podemos adotar a mesma forma funcional da equação 19, apenas com outros parâmetros para o gás, que são sua massa  $M_g$ , seu comprimento de escala radial  $R_g$ , e seu comprimento de escala vertical  $z_g$ .

$$\rho(R, z) = \frac{M_g}{4\pi R_g^2 z_g} e^{-R/R_g} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{z_g}\right) \quad (28)$$

Aplicando os mesmos procedimentos usados no disco estelar, teremos a velocidade circular devida à massa do gás.

## 4.3 Estrelas do bojo

No centro das galáxias espirais, há uma estrutura estelar esferoidal chamada de bojo. Pela sua simetria esférica, o bojo pode ser representado pelo próprio perfil de Hernquist, com parâmetros  $M_b$  e  $a_b$ :

$$\rho(r) = \frac{M_b}{2\pi} \frac{a_b}{r} \frac{1}{(r + a_b)^3}, \quad (29)$$

**Tabela 1:** Parâmetros usados no modelo composto.

$M_h$	$1 \times 10^{12} M_\odot$
$a_h$	44 kpc
$M_d$	$5 \times 10^{10} M_\odot$
$R_d$	3.5 kpc
$M_g$	$1 \times 10^9 M_\odot$
$R_g$	3.5 kpc
$M_b$	$1 \times 10^{10} M_\odot$
$a_b$	1 kpc

Aplicando os mesmos procedimentos usados no halo, teremos a velocidade circular devida à massa das estrelas do bojo.

#### 4.4 Curva de rotação total

Finalmente, temos todos os ingredientes para compor a curva de rotação total, que inclui a contribuição das 4 componentes: halo, disco estelar, gás e bojo. A tabela 1 apresenta os parâmetros adotados para construir esse modelo composto. Tais parâmetros não visam reproduzir a estrutura da Via Láctea especificamente, mas são escolhas plausíveis para uma galáxia desse tipo.

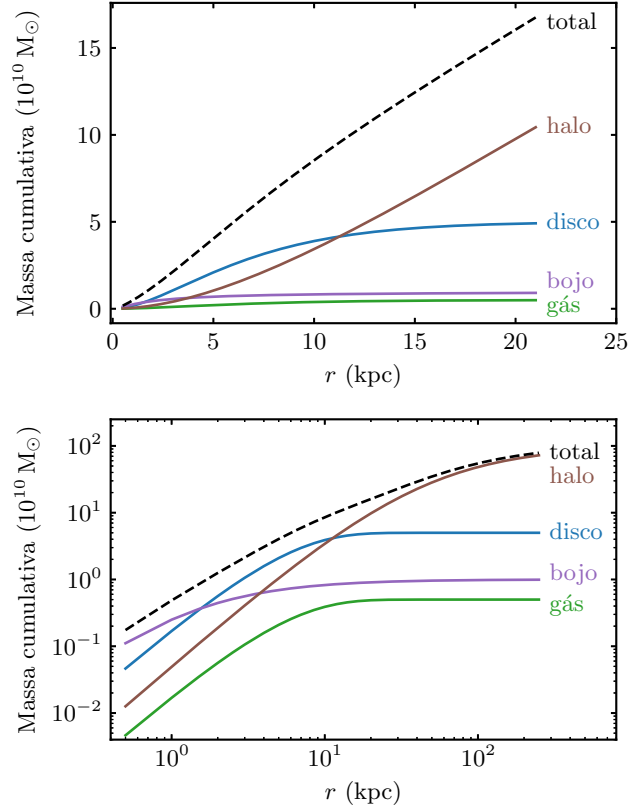
Na curva de rotação total, não são as velocidades que se somam linearmente, mas sim as massas. Se pensarmos em termos das massas cumulativas, cada esfera de raio  $r$  contém a soma das massas das 4 componentes:

$$M_{\text{total}} = M_h + M_d + M_b + M_g \quad (30)$$

Como cada velocidade depende de  $v \propto \sqrt{M}$ , então as velocidades precisariam ser somadas quadraticamente:

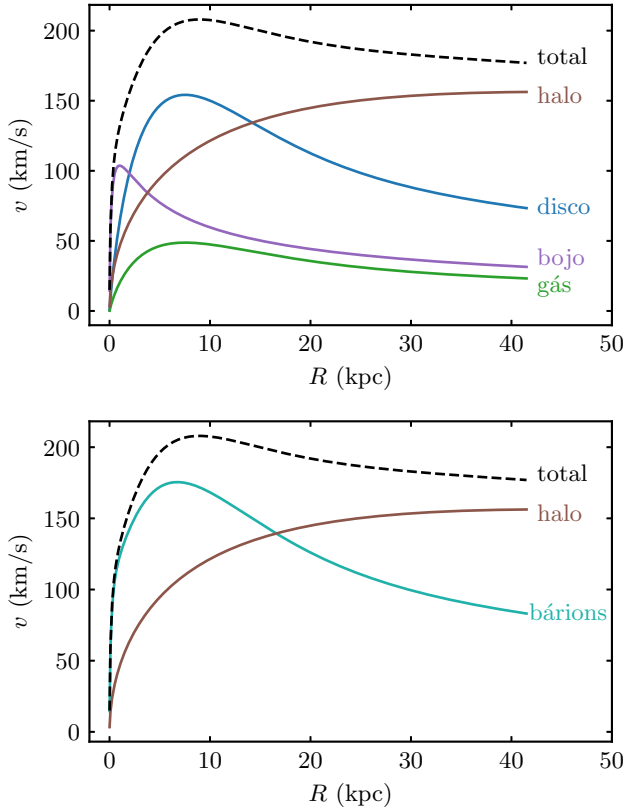
$$v_{\text{total}}^2 = v_h^2 + v_d^2 + v_b^2 + v_g^2 \quad (31)$$

Para juntar todas as componentes, acabamos confundindo os raios cilíndricos  $R$  e os raios esféricos  $r$ . Já vimos que considerar massas dentro de esferas, mesmo quando o sistema não é esférico, gera erros toleráveis (ou, no mínimo, erros conhecidos). Do ponto de vista de modelagens teóricas, tende a ser natural pensar em raios esféricos. Ao fazer a conexão com o vocabulário observacional das curvas de rotação, pode ser desejável se expressar em termos de raios cilíndricos, já que imagens observadas são bidimensionais.



**Figura 9:** Massas cumulativas das diferentes componentes no modelo composto. O painel superior exibe a região central em escala linear. O painel inferior mostra as mesmas curvas em escala logarítmica e em outro intervalo radial.

Na Fig. 9 podemos avaliar as contribuições relativas em termos da massa cumulativa. O painel superior da Fig. 9 mostra a massa cumulativa em escala linear, enfatizando a região mais central. Aí podemos notar que a massa do disco está essencialmente toda contida dentro de  $\sim 15$  kpc, pois por volta desse raio, a curva azul pára de crescer. Já a massa cumulativa do halo segue crescendo, de maneira aproximadamente linear nessa região. No painel inferior da Fig. 9, as mesmas massas cumulativas estão mostradas em escala logarítmica. Aí podemos inspecionar em mais detalhe os raios internos e externos. Vemos que o bojo está praticamente limitado a  $\sim 2$  kpc. O gás é, por construção, paralelo ao disco, mas contribui menos por um fator fixo. Ironicamente, a massa do halo de matéria escura não é a predominante na região muito interna — para as escolhas de parâmetros deste modelo específico. Ou seja, embora a massa total de matéria escura seja muito maior que a soma da massa dos bárions,



**Figura 10:** Curvas de rotação para o modelo composto. O painel superior mostra a contribuição de cada componente separadamente. No painel inferior, a contribuição dos bárions (gás e todas as estrelas) foi reunida numa única curva.

calha que na região bem interna da galáxia há mais bárions do que matéria escura. Isso ocorre porque os perfis de cada componente não têm as mesmas formas funcionais. Então a razão entre bárions e matéria escura não é constante em cada raio.

Por fim, a Fig. 10 mostra a culminação do nosso esforço em compreender exatamente como calcular a curva de rotação total de uma galáxia. O painel superior da Fig. 10 exibe a contribuição das 4 componentes separadamente. Aqui, cabe um esclarecimento sobre o conceito teórico de velocidade circular. As velocidades circulares mostradas separadamente não correspondem às velocidades que estrelas efetivamente têm. Ou seja, certamente não é o caso que as estrelas do disco giram com as velocidades azuis, e o gás gira com as velocidades verdes etc. Não. A velocidade circular corresponde à velocidade que uma partícula de teste precisaria ter para manter uma órbita circular, caso ela fosse colocada naquele raio.

Também é importante perceber o significado de analisar as curvas separadas em componentes. A curva azul significa a velocidade que uma partícula de teste teria, caso só existisse a massa do disco. A curva marrom significa a velocidade que uma partícula de teste teria, caso só existisse a massa do halo. E assim por diante. Ou seja, nenhuma dessas velocidades separadas efetivamente existe na galáxia. As curvas de velocidade circular são um recurso teórico que nos permite avaliar o papel desempenhado por cada componente. Ou seja, ao estudar a dinâmica dessa forma, podemos comparar as contribuições relativas de cada componente para a dinâmica global.

Já a curva de rotação total, essa sim, é a única com conexão mais direta com as observações. Os corpos reais (estrelas, gás) na galáxia estão efetivamente sujeitos a terem essa velocidade. Mesmo assim, cabe mais uma ressalva: cada estrela individual da galáxia não é obrigada a ter órbita exatamente circular. De fato, há uma grande variedade de órbitas complexas em potenciais galácticos. No entanto, a dinâmica global do disco realmente vem a ser a de um movimento de rotação como um todo, ao redor do centro. Afinal, é esse movimento ordenado, e não isotrópico, que caracteriza a morfologia de disco. Portanto, mesmo que haja certas componentes adicionais de velocidade (radial, tangencial e vertical), para a maior parte da estrelas em grandes raios, a velocidade tangencial de movimento circular será a predominante. Tomando o movimento médio de uma certa quantidade de estrelas ou de gás dentro de certos anéis, fica ainda mais bem caracterizado um movimento aproximadamente circular.

Tendo em mente qual deve ser o olhar para as velocidades circulares, percebemos na Fig. 10 que, para grandes raios, a dinâmica da galáxia de fato é dominada pela contribuição da massa de matéria escura.

No painel inferior da Fig. 10, a contribuição dos bárions (o gás e todas as estrelas) foi reunida numa única curva. Curiosamente, a curva de rotação devida à massa dos bárions vem a ser dominante na região mais interna — para os parâmetros do nosso exemplo. Isso não significa que o halo de matéria escura seja irrelevante ali: ele existe e contribui, apenas não é dele a contribuição dominante naquela região.

## 5 Conclusão

Apresentou-se uma explicação introdutória de como curvas de rotação planas implicam na existência de halos de matéria escura em galáxias. Pudemos entender que, além de existir, o halo de matéria escura precisa ter um perfil de densidade apropriado, para explicar as velocidades observadas. Estudando os detalhes dos perfis de densidade comumente adotados, pudemos construir um modelo que coloca o halo de matéria escura no contexto das demais componentes (dico estelar, gás e estrelas do bojo).

## Agradecimentos

O autor agradece o apoio do CNPq (307205/2021-5) e da Fundação Araucária.

---

## Sobre o autor

Rubens Eduardo Garcia Machado ([rubensmachado@utfpr.edu.br](mailto:rubensmachado@utfpr.edu.br)) é professor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), em Curitiba, onde atua no Programa de Pós-graduação em Física e Astronomia. É bolsista de produtividade do CNPq. Fez bacharelado em Física e mestrado em Astronomia na USP. Fez doutorado pela USP e pela Université de Provence, na França. Passou por pós-doutorados na USP e no Chile. Tem experiência na área de simulações computacionais de galáxias e de aglomerados de galáxias.

## Referências

- [1] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, *Helvetica Physica Acta* **6**, 110 (1933). Disponível em <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1933AChPh...6..110Z>, acesso em 22/01/2024.
- [2] A. Bosma, *Rotation curves and the dark matter problem*, in *Connaitre le Cosmos. Enjeux philosophiques et scientifiques*, editado por S. Beyne e J. Bernard (Spartacus-IDH, 2023), Nouvelle Vision des Sciences, no prelo. [ArXiv:2309.06390](https://arxiv.org/abs/2309.06390).
- [3] D. C. Rodrigues e A. Hernández-Arboleda, *Rotação de galáxias e matéria escura*, *Cadernos de Astronomia* **2**(1), 6 (2021).
- [4] L. Hernquist, *An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges*, *ApJ* **356**, 359 (1990).
- [5] J. Bovy, *Dynamics and Astrophysics of Galaxies* (Princeton University Press, Princeton, 2023), no prelo. Disponível em <https://galaxiesbook.org/>, acesso em jan. 2024.
- [6] J. F. Navarro, C. S. Frenk e S. D. M. White, *A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering*, *ApJ* **490**(2), 493 (1997). [ArXiv:astro-ph/9611107](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9611107).
- [7] M. Vogelsberger et al., *Cosmological simulations of galaxy formation*, *Nature Reviews Physics* **2**(1), 42 (2020). [ArXiv:1909.07976](https://arxiv.org/abs/1909.07976).
- [8] A. R. Duffy et al., *Dark matter halo concentrations in the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe year 5 cosmology*, *MNRAS* **390**(1), L64 (2008). [ArXiv:0804.2486](https://arxiv.org/abs/0804.2486).
- [9] G. B. Lima Neto, *Astronomia extragalática e cosmologia*, Notas de aula [on-line] (2022). Disponível em <http://www.astro.iag.usp.br/~gastao/Extragal.html>, acesso em jan. 2024.
- [10] J. Binney e S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton, 2008), 2<sup>a</sup> ed.