

Lentes gravitacionais de baixo custo: unindo analogias de observações astronômicas e a teoria do lenteamento gravitacional em sala de aula

Danyel C. de Oliveira e Habib S. Dumet-Montoya

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resumo

O efeito do lenteamento gravitacional oferece uma ampla riqueza de imagens espetaculares do céu, que podem despertar a curiosidade de alunos dos primeiros anos do ensino e da população em geral. Neste trabalho, abordaremos uma introdução ao fenômeno de lenteamento gravitacional, com três focos principais: compreensão do fenômeno em imagens astronômicas, representação do fenômeno com equipamentos de baixo custo e, mostrar como a matemática elementar pode representar o lenteamento gravitacional em sistemas galácticos. Em particular, conseguiu-se ilustrar algumas imagens astronômicas e apresentou-se um método que permite encontrar soluções analíticas para a formação de imagens geradas pelo lenteamento gravitacional na escala galáctica sendo de fácil implementação computacional, e que poderá ser acessível a estudantes avançados do ensino médio e para alunos de graduação nas áreas de ciências da natureza, matemáticas e de engenharias interessados no assunto.

Abstract

The gravitational lensing effect offers a wide range of spectacular images of the sky that can awake the curiosity of students and the general population. In this work, we shall address an introduction to gravitational lensing with three main focus: understanding the phenomenon in astronomical images, illustrating the gravitational lensing effect with low-cost equipment, and show how a elementary mathematics can represents the galaxy-galaxy lensing. In particular, we illustrate some astronomical images, both with the low-cost equipment and with analytics solutions for the formation of images generated by gravitational lensing in galaxy scale. The solutions are easy to implement computationally, and can be accessible to advanced high school students and for undergraduate students in the STEM fields interested in the subject.

Palavras-chave: relatividade geral, astrofísica, lentes gravitacionais, arcos gravitacionais, equação algébrica.

Keywords: general relativity, astrophysics, gravitational lensing, gravitational arcs, algebraic equation

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v5n1.43563](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v5n1.43563)

1 Introdução

As primeiras ideias do lenteamento gravitacional (LG) remontam-se à época de Newton (que especulou a possibilidade do desvio da luz por corpos massivos), passando por John Mitchell e Cavendish, sendo este último o precursor do cálculo do ângulo de deflexão de um feixe de luz ao passar pelo sol, de acordo a

$$\hat{\alpha} = \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (1)$$

em que G é a constante de gravitação universal, c a velocidade escalar da luz e r define a distância de máxima aproximação entre o feixe de luz e o

sol (parâmetro de impacto). Entretanto, esse trabalho não foi publicado, mas refeito por Johhan von Soldner em 1801 [1] e por Einstein utilizando o princípio de equivalência em 1911 [2]. Diante desse resultado, foram propostas duas expedições para verificação da fórmula [3–5], liderada por Carlos Dillon Perrine no Brasil em 1912 e a outra, liderada por E. Frindlay-Freundlich em 1914 na Crimeia. Felizmente as duas deram errado, pois atualmente sabe-se que esse resultado está errado.

Em 1915, após Einstein completar sua Teoria da Relatividade Geral (TRG), refez os cálculos e

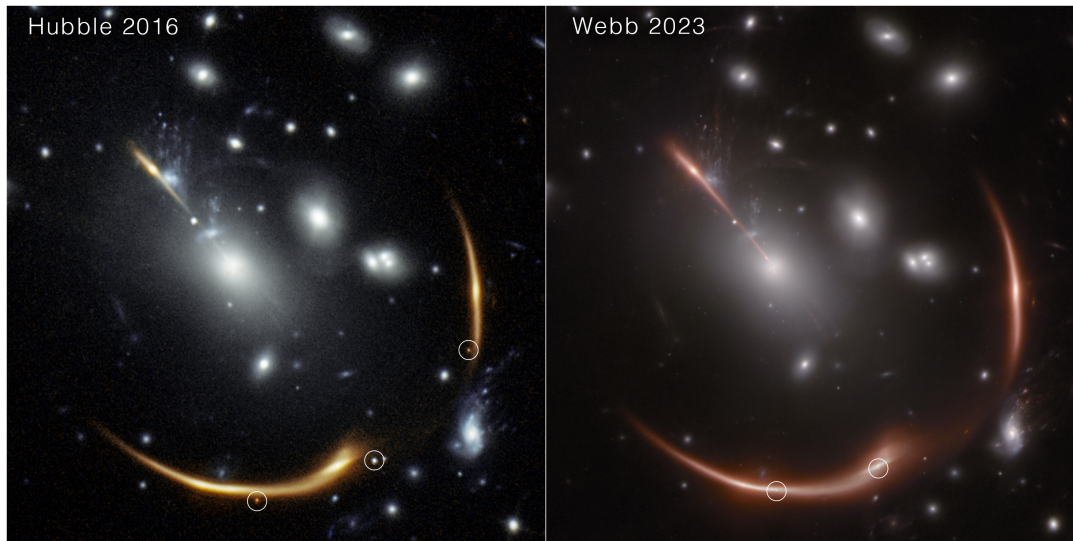


Figura 1: Imagens fortemente distorcidas de uma galáxia de fundo e as respectivas imagens múltiplas das Supernovas *Requiem* (esquerda) e *Encore* (direita). A observação foi possível devido ao LG da galáxia e das supernovas pelo Aglomerado MACS J0138. Créditos da Imagem do Hubble: NASA, ESA, STScI, Steve A. Rodney (University of South Carolina) and Gabriel Brammer (Cosmic Dawn Center/Niels Bohr Institute/University of Copenhagen). Créditos da Imagem do James Web: NASA, ESA, CSA, STScI, Justin Pierel (STScI) e Andrew Newman (Carnegie Institution for Science). Fonte <https://blogs.nasa.gov/webb/2023/12/21/supernova-encore-nasas-webb-spots-a-second-lensed-supernova-in-a-distant-galaxy/>.

dessa vez obteve

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 r}, \quad (2)$$

que leva a um desvio de $1.74''$ próximo ao disco solar [6]. Em 1918 a baixa resolução dos equipamentos, utilizados na observação de um Eclipse em Washington, concluía que não era possível a deflexão da luz, descartando a TRG [7]. Entretanto, e felizmente, claro, em 1919 foram organizadas mais duas expedições, cujo objetivo era medir a distância entre as estrelas à esquerda e à direita do Sol durante o eclipse e compará-las com as mesmas medidas efetuadas 6 meses antes [8]. A primeira equipe, liderada por Sir Arthur Eddington, a realizou na Ilha de Príncipe. A segunda, liderada por Andrew Claude de la Cherois Crommelin a realizou na cidade de Sobral do Estado do Ceará. O ângulo de deflexão obtido a partir dessas medidas foi de $1,61'' \pm 0,30''$,¹ resultado este que verificava a previsão da TRG [9].

De 1920 a 1975, essa época caracterizou-se por especulações como a existência de imagens múltiplas (miragens) de uma única fonte [10], ima-

¹Um segundo de arco, representado por $''$, que corresponde a $1/3.600$ de grau ou $1/1.2960.000$ da circunferência.

gens duplas de estrelas é até a formação de imagem com aspecto anelar [11], possibilidade do uso de uma estrela atuar como lente de outra mais distante [12] e, numa escala observacional maior, Fritz Zwicky, argumentou que as lentes gravitacionais podiam ser usadas como candidatos a Telescópios Naturais e, o fenômeno em si, podia ser utilizado para medir de maneira acurada a massa de objetos extragalácticos que atuarem como lentes [13, 14]. Com a descoberta dos *quasi stellar radio source* — quasares, que são fontes de rádio com aparência ótica aproximadamente estelar, possuidores de um espectro característico (que permitia observar as imagens múltiplas), serem altamente luminosos e estarem a distâncias cosmológicas da nossa galáxia (desvio ao vermelho alto), levou ao Jean M. Barnothy, considerá-los como objetos ideais para estudar o lenteamento gravitacional [15]. Essa conexão Quasar-LG, deu início ao desenvolvimento de muitos aspectos teóricos, dentre dos quais podemos citar o de Sjur Refsdal, que deduziu as equações básicas do LG, e mostrou que, medindo a separação angular e o tempo de chegada dos raios de luz da imagens lentadas, poderiam ser obtidas estimativas da taxa de expansão do Universo [16–18].

A partir de 1979, os grandes avanços na as-

tronomia observacional, permitiram transformar as especulações em fatos devidamente comprovados. Dentro dos quais podemos citar a primeira detecção da imagem dupla do quasar Q0957+561 por Walsh, Carsvell e Weyman [19], a identificação, em 1986, de imagens distorcidas em forma de arco no Aglomerado Abell A370 [20, 21], correspondendo, como sugerido por Packzyński [22] a imagens de galáxias de fundo, fortemente distorcidas por aglomerados de galáxias atuando como lentes [23]. Foi observado, em 1988, a formação de um anel luminoso (conhecido como Anel de Einstein) em imagens de fontes de raio [24], o lenteamento de um quasar por estrelas na galáxias que atuam como lente, correspondendo à primeira detecção de um evento de microlenteamento [25]. O advento de grandes levantamentos do céu por consórcios internacionais têm levado à descoberta de milhares de sistemas de LG, dentro dos quais podemos citar os apresentados nas referências [26–36]. Para uma leitura mais completa da descrição histórica, compreensão do fenômeno e informações sobre os levantamentos astronômicos, recomenda-se as referências [3, 37–40].

A inserção dos conteúdos apresentados até agora, no Ensino Básico, pode ser um desafio interessante. Entretanto, quando são consideradas as Competências Específicas das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [41], especificamente quando analisamos a Competência Específica 2 (p. 558) encontramos:

“[...] os estudantes têm a oportunidade de elaborar reflexões que situem a humanidade e o planeta Terra na história do Universo, bem como inteirar-se da evolução histórica dos conceitos e das diferentes interpretações e controvérsias envolvidas nessa construção. [...] Nessa competência específica, podem ser mobilizados conhecimentos conceituais relacionados a: [...] modelos atômicos, subatômicos e cosmológicos; astronomia; evolução estelar; gravitação; mecânica newtoniana; previsão do tempo; história e filosofia da ciência; entre outros.”

Todavia, ao analisarmos a Habilidade EM13CNT204:

“Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como

softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)”.

Utilizar simulações e/ou representações de fenômenos da natureza podem oferecer benefícios significativos para uma experiência de aprendizado mais eficaz e envolvente no contexto de ensino.

Neste trabalho, objetivando motivar o estudo do LG e ao mesmo tempo, produzir material que possa ilustrar e contribuir à discussão sobre o fenômeno entre estudantes de Ensino Médio, apresentaremos as principais definições e regimes do LG na Seção 2. A seguir, ao invés de adentrar à formulação matemática, apresentaremos a confecção de uma lente gravitacional de baixo custo na Seção 3. Como toda observação e (ilustração da mesma) requer um(s) modelo(s) matemático(s), na Seção 4 explicaremos como trabalhar os modelos de lentes mais simples que descrevem em boa aproximação o lenteamento em galáxia-galáxias, para que desse modo os estudantes possam compatibilizar os resultados teóricos com os observacionais. Por fim, na Seção 5 apresentaremos algumas discussões e perspectivas deste trabalho.

2 Lentes gravitacionais: panorama geral de e regimes de lenteamento

Após essa breve resenha apresentada na Seção 1, os leitores interessados no assunto poderão compreender que o LG é a deflexão da luz, emitida por fontes estelares (estrelas, planetas, quasares, supernovas, galáxias, etc.), ao atravessar uma lente, isto é, uma área no céu que contém uma distribuição de matéria (estrelas, objetos compactos, galáxias, aglomerados de galáxias, estrutura em grande escala, etc) e que é observada por telescópios espaciais como o [Hubble](#) e o [James Webb](#) ou, na Terra como os telescópios [Blanco](#), [Keck](#), o *Very Large Telescope VLT*, o [Subaru](#), o *Southern Astrophysical Research SOAR*, o *Canada-France-Hawaii (CFHT)*, o *Dark Energy Survey (DES)*, dentre outros.

Essa deflexão pode ser observada na forma de: *a)* posições aparentes; *b)* aumento da magnificação (área efetiva observada); *c)* distorções da forma ou; *d)* multiplicidade de imagens (são observadas mais de uma imagem de um mesma fonte). Em particular, o que torna interessante

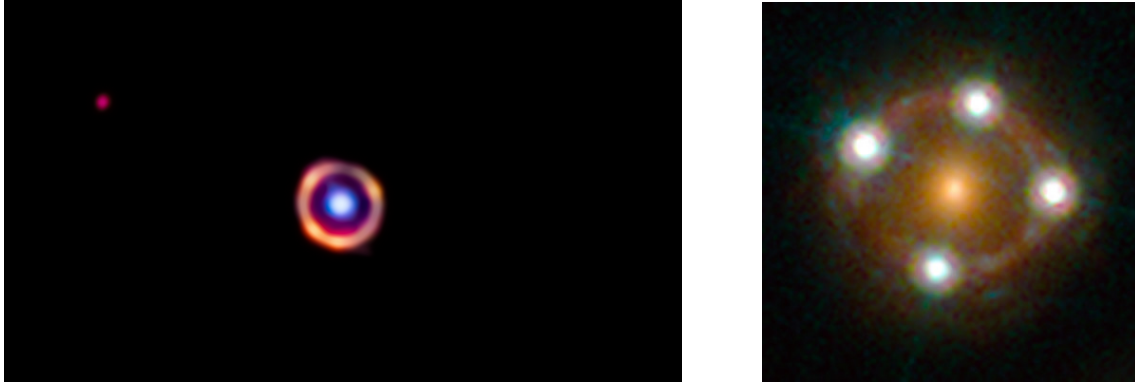


Figura 2: Imagens de fontes que sofreram LG por galáxias. Esquerda: Anel de Einstein detectado pelo Telescópio James Webb. Esse anel é devido ao LG de uma galáxia distante, rica em moléculas orgânicas complexas, quando o universo tinha aproximadamente 1,5 bilhões de anos. Créditos: J. Spilker/S. Doyle, NASA, ESA, CSA. Fonte: <https://www.flickr.com/photos/nasawebbtelescope/52958010034/in/album-72177720305127361/>. Direita: Imagens do Quasar HE0435-1223 que sofreu LG por uma galáxia. Créditos: ESA/Hubble, NASA, Suyu et al. Fonte: <https://esahubble.org/images/heic1702e/>.

essa deflexão é que depende apenas da distribuição de matéria (tanto bariônica quanto escura) nas lentes (sem uso de hipóteses sobre processos físicos ou estados dinâmicos) e das distâncias cosmológicas entre o observador, lente e a fonte.

Por esse motivo, o lenteamento gravitacional constitui de fato uma das ferramentas mais poderosas para estudar o conteúdo de matéria no universo, devido principalmente a sua natureza puramente gravitacional, e que permite ao mesmo tempo complementar outros observáveis cosmológicos [18, 42].

O efeito do LG pode ser dividido de acordo com as escalas astronômicas nas quais ocorrem e também por sua intensidade [43–45]. Referente às escalas, o LG pode ser classificado em micro, mili ou o e macrolenteamento. A denominação está em função da separação angular das imagens ou do raio de Einstein. No caso do microlenteamento a separação angular típica é de microssegundos de arco $10^{-6}''$ e ocorre principalmente quando as lentes são estrelas na nossa galáxia. De forma análoga, no mililenteamento, a separação angular é da ordem de $10^{-3}''$ e ocorre quando as lentes são estrelas de outras galáxias. Ressalta-se que os instrumentos atuais não têm a precisão suficiente para poder observar, nestas escalas, as imagens múltiplas, porém, conseguem observar a variação do brilho superficial (curva de luz) em função do tempo, considerando o movimento relativo entre a fonte, lente e o observador [45]. No macrolenteamento a separação angular das imagens é da

ordem de $''$, o que de fato permite ser observado pelos telescópios, em galáxias ou aglomerados de galáxias nos levantamentos de grandes áreas do céu.

Em relação à intensidade, o efeito de lenteamento gravitacional é dividido em fraco e forte. No caso do lenteamento fraco as imagens dos objetos de fundo são ligeiramente distorcidas, sendo que a detecção desse efeito requer análises estatísticas de milhares de objetos. Os aspectos matemáticos da modelagem deste fenômeno foram desenvolvidos por Gunn [46] e Blandford e Narayan [42]. Para os leitores interessados há um excelente artigo de revisão escrito por Bartelmann e Schneider [47].

Já o lenteamento forte, que ocorre em galáxias massivas ou em aglomerados de galáxias, tem como característica principal a formação de imagens múltiplas, magnificadas e/ou fortemente distorcidas, como mostradas por exemplo na Figura 1. Mas não unicamente são formadas imagens múltiplas (quase colineares) ou em forma de arcos, aliás quando um determinado tipo de lente está perfeitamente alinhada com uma fonte pode dar a formação de anéis luminosos, conhecidos como Anéis de Einstein ou podem dar origem ao surgimento de imagens dispostas de modo a dar aparência de uma cruz, conhecidas como Cruz de Einstein. Alguns exemplos dessas configurações de imagens estão sendo mostradas na Figura 2. É importante reforçar que sem a formação do sistema observador-lente-fonte não teria sido pos-



Figura 3: Lente de vidro semi-polida com rugosidades. Fonte: os autores.

sível observar as imagens mostradas nas Figuras 1 e 2, fato este que reforça a característica das Lentes Gravitacionais como Telescópios Naturais acunhados por Zwicky [13].

3 Lentes gravitacionais de baixo custo

A seguir apresentaremos sugestões para confecção de “lentes gravitacionais” de baixo custo [48, 49]. A ideia principal é empregar as propriedades de refração da luz como uma representação do lenteamento gravitacional é poder usá-las dentro de sala de aula ou até em exposições científicas que tenham como público alvo a população local.

Na prática, para a confecção delas precisa ser quebrada a haste de uma taça de vinho (pode ser de vidro ou de plástico) próximo da base e logo lixar. Embora o procedimento seja simples, será necessário utilizar equipamento de proteção individual² e uma superfície estável, plana e não inclinada (nivelada), de modo a garantir que a superfície superior da haste quebrada seja paralela à base da taça.

Para esse procedimento pode ser utilizado um

²Recomenda-se que o equipamento de proteção individual seja formado por um capacete e luva de segurança, protetor facial, camisa com material reforçado (não pode ser manga regata) e calçados para o caso de fragmentos de vidros caírem porventura.



Figura 4: Lente de vidro com o topo polido. Fonte: os autores.

alicate universal ou de bico longo e pressionar um ponto conveniente à medida que seja provocado torque até que se reparta. A seguir, utiliza-se uma lixa de massa com granulação próxima a 100 para aplanar o topo da lente, até o ponto em que esse plano fique paralelo à base. Após esse processo, a face menor ficará rugosa e translúcida, como mostrado na Figura 3. Para contornar esse problema, utilizam-se lixas d’água de granulação diferente, começando pelo número de granulação menor, observando que conforme mais grosso for o grão da lixa, menor é o número dela. Para o produto aqui apresentado (Figura 4), utilizou-se gradativamente lixas com granulações iguais a 280, 600 e 1200, respectivamente.

É importante utilizar regularmente um pano úmido para limpar a superfície onde está lixando o material. Isso impede que detritos aranhem/risquem o vidro ao longo do processo. Recomenda-se que ao lixar, faça movimentos com baixa amplitude, que ajudará a não desgastar as bordas da superfície.

Através da lente confeccionada podemos representar a distorção do espaço-tempo utilizando uma folha de papel com pauta de uma forma simples como mostrado na Figura 5. Seguindo nesta linha, desenhou-se um círculo (de modo a simbolizar uma fonte circular extensa) em um fundo negro³ e procedeu-se a formar o sistema fonte-

³Recomenda-se um local com baixa luminosidade para realizar a representação de formação da(s) imagem(ens).



Figura 5: Representação da Distorção do Espaço-Tempo. As linhas horizontais representam raios de luz que viajam por um espaço-tempo plano (esquerda) e o deformado por uma distribuição de matéria (direita). Fonte: os autores.

lente-observador.

Quando alinhados perfeitamente a fonte, lente e o observador, obteve-se a imagem de um anel luminoso, o conhecido Anel de Einstein, como mostrado no painel esquerdo da Figura 6. Logo em seguida, procurou-se desalinhar a lente da fonte, de modo a observar imagens em forma de arco, de modo a representar os conhecidos arcos gravitacionais, como mostrado no painel central da Figura 6. Mas como é conhecido das observações astronômicas, nem sempre são observadas duas imagens com forma de arcos e sim, imagens em número maior. Isso ocorre quando a lente não possui uma simetria axial (circular). Um dos modelos simples é aquele que contempla uma lente cuja distribuição superficial de massa possui uma simetria elíptica. Com esse intuito, para poder representar o lenteamento devido a uma distribuição de massa desse tipo, inclinou-se a lente de modo que ao ser projetada, seja vista uma elipse e ao deixar perfeitamente alinhada com a fonte, observou-se a formação de quatro imagens formando uma cruz, representando assim a Cruz de Einstein, como mostrado painel direito da Figura 6.

Dessa maneira, estamos representando de uma forma simples, algumas das mais espetaculares imagens de lenteamento gravitacionais obtidas pelos telescópios, mostrados neste trabalho nas Figuras 1 e 2.

Além disso, há a possibilidade de serem utilizados como fonte: luz de velas, diodos emissores de luz e/ou lanternas de celulares.

4 Modelagem matemática do LG

Para compatibilizar as imagens mostradas na seção anterior, revisitaremos a teoria do LG. Para os leitores interessados, que não tenham domínio do inglês, recomenda-se a leitura dos capítulos introdutórios das teses indicadas nas referências [38–40]. Para os leitores com um domínio mais avançado, recomenda-se a leitura dos livros indicados nas referências [43–45].

Em essência o LG possui alguns ingredientes chaves, como a fonte, a lente, as distâncias cosmológicas e uma equação, que relaciona a posição da fonte com as imagens lenteadas, conhecida como equação da lente. Para cada um desses ingredientes há modelos matemáticos (alguns deles bem simples) e que podem ser abordados em sala de aula.

Pois bem, o primeiro a ser considerado é ter uma visão esquemática do LG (Figura 7). As distâncias D_{OS} , D_{OL} e D_{LS} são as distâncias de Diâmetro Angular entre o observador e a fonte, entre o observador e a lente e, entre a lente e a fonte, respectivamente. O ângulo $\hat{\beta}$ representa a posição angular real da fonte e o ângulo $\hat{\theta}$ corresponde à posição angular onde a observamos, após o feixe de luz sofrer a deflexão caracterizada pelo ângulo $\hat{\alpha}$. Esses ângulos estão relacionados (supondo que $|\hat{\theta}| \ll 1$, $|\hat{\beta}| \ll 1$ e $|\hat{\alpha}| \ll 1$) [38] pela seguinte equação:

$$\vec{\theta}D_{OS} = \vec{\beta}D_{OS} + \vec{\alpha}D_{LS}. \quad (3)$$

Todavia, podemos relacionar as posições angulares da fonte e da(s) imagem(ens) com os parâmetros de impacto $\vec{\xi}$ e $\vec{\eta}$ no plano das lentes e das

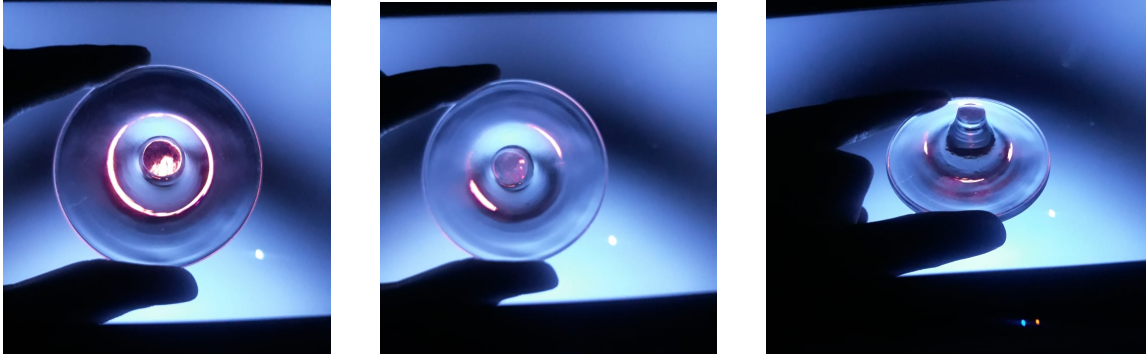


Figura 6: Representações de um Anel de Einstein (esquerda), de Arcos Gravitacionais (centro) e de uma Cruz de Einstein (direita). Fonte: os autores

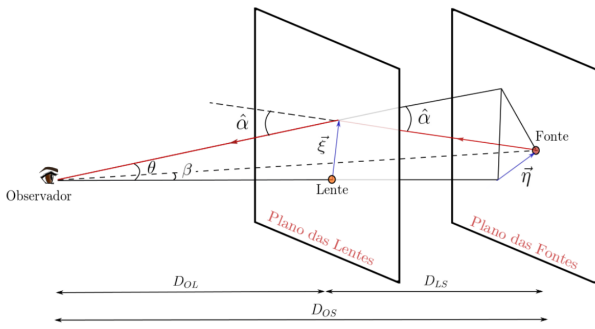


Figura 7: Representação esquemática do LG. Imagem retirada da Referência [38].

fontes, respectivamente, a traves das expressões

$$\vec{\gamma} = D_{OL}\vec{\theta}, \quad \vec{\eta} = D_{OS}\vec{\beta}. \quad (4)$$

Na prática, resolver a equação (3), ou sua versão alternativa com o uso da equação (4), requer cálculos numéricos, muitas vezes complicados e que fogem do escopo de uma sala de aula. Felizmente, no LG podemos escolher parâmetros de escala adequados que possibilitam excluir as distâncias cosmológicas dos cálculos e ainda, simplificam a matemática do problema, pois ao invés de trabalhar com uma equação dimensional, passamos a utilizar equações adimensionais [43–45]

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) \quad (5)$$

em que $\vec{y} = \vec{\eta}/\eta_0$, $\vec{x} = \vec{\xi}/\xi_0$ e

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \left(\frac{D_{OL}D_{LS}}{\xi_0 D_{OS}} \right) \vec{\hat{\alpha}}(\xi_0 \vec{x}). \quad (6)$$

sendo a escolha de ξ_0 arbitrária. A informação sobre a distribuição de matéria está contida no ângulo de deflexão, equação (6).

4.1 Modelo de lente gravitacional

Muitos modelos de lentes utilizados para a modelagem de lenteamento gravitacional forte [50] requerem o uso de técnicas numéricas para poder inverter a equação da lente. Contudo, há uns modelos de lente que representa bem o LG em sistemas galáxia-galáxia, que além de constituírem excelentes aproximações para a distribuição total de matéria, proporcionam uma simplicidade computacional única [51–57]. Esses modelos são baseados no perfil de densidade da Esfera Isotérmica Singular, com simetria axial, cujo ângulo de deflexão é [3, 38, 40]

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \cos \phi \hat{e}_1 + \sin \phi \hat{e}_2. \quad (7)$$

Todavia, as generalizações desse modelo para distribuições de matéria com simetria elíptica, que ajudam a reproduzir imagens múltiplas em número superior a 2, têm a particularidade de que o ângulo não depende da distância. Por exemplo, para um modelo com potencial elíptico (que representa bem uma distribuição elíptica até uma elipticidade $\varepsilon_\varphi \leq 0.2$ como mostrado em [40]) o ângulo de deflexão é

$$\vec{\alpha}_\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{b_\varphi \cos \phi}{a_\varphi} \hat{e}_1 + \frac{a_\varphi \sin \phi}{b_\varphi} \hat{e}_2 \right), \quad (8)$$

em que

$$\Delta = a_\varphi^2 \sin^2 \phi + b_\varphi^2 \cos^2 \phi, \quad (9)$$

com a_φ e b_φ ($a_\varphi > b_\varphi$) definem a elipticidade do potencial da lente

$$\varepsilon_\varphi = 1 - \frac{b_\varphi}{a_\varphi}. \quad (10)$$

A elipticidade refere-se ao parâmetro que mede o “achatamento” do potencial gravitacional (quanto mais próxima de zero, o potencial aproximasse bem da forma circular). Sendo a mesma definição aplicável a uma distribuição de massa.⁴

4.2 Resolvendo a Equação da Lente

Antes de adentrar especificamente na solução da equação da lente, saibamos que a equação para calcular o tempo de percurso no movimento oblíquo, fornecerá pistas para resolver o problema de lenteamento gravitacional por modelos isotérmicos singulares. Estamos nos referindo a equação algébrica de segundo grau do tipo

$$x^2 + 2px + q = 0. \quad (11)$$

A qual tem soluções — reais — da forma

$$x^{(\pm)} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}, \quad (12)$$

desde que o argumento da raiz quadrada seja maior ou igual do que zero. Todavia, mesmo que p e q sejam funções de alguma variável (desde que não seja x), a forma funcional da solução (12) é mantida. Mas qual a relação desta equação, com a equação da lente, usualmente altamente não linear em x ? Pois bem, quando consideramos a equação (5), com ângulo $\vec{\alpha}$ ⁵ definido de acordo a (7) ou (8), (que independem da distância radial) decorrerá uma equação de segundo grau, claro que com outros símbolos ou letras, mas o procedimento de solução permanece o mesmo.

O primeiro passo é desenhar a fonte no correspondente plano. Essa fonte, de raio $|\vec{R}_0|$ estará centralizada na posição \vec{s} e será dividida em N pontos, cada um em uma posição \vec{y}_k . A ideia é inserir o ponto $\vec{y}_k = \vec{s} + \vec{R}_0$, na equação da lente (eq. (5)), de modo a obtermos a seguinte equação (vetorial):

$$\vec{R}_0 = \vec{x}_k - (\vec{\alpha} + \vec{s}), \quad (13)$$

⁴Adentrar na relação entre potencial gravitacional, distribuição superficial de massa e ângulo de deflexão, requer conhecimento de cálculo diferencial e integral e como o foco principal é o uso de uma matemática elementar não está sendo incluído neste trabalho

⁵Muito embora o ângulo de deflexão do modelo com distribuição de matéria elíptica não depende da distância, as expressões podem ser não tão conhecidas por estudantes de ensino médio. Contudo, as soluções apresentadas nas equações (20) e (21), são válidas. Basta substituir as expressões das componentes do ângulo de deflexão nas equações (18) e (19).

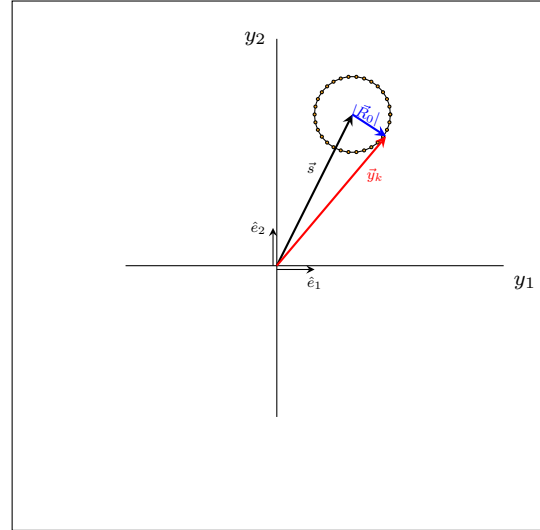


Figura 8: Representação esquemática da parametrização de uma fonte extensa, de raio R_0 e posição \vec{s} , como uma coleção de N fontes pontuais. Fonte: os autores.

sendo

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2. \quad (14)$$

e de modo análogo

$$\vec{s} = s_1 \hat{e}_1 + s_2 \hat{e}_2. \quad (15)$$

Se escolhermos trabalhar com coordenadas cartesianas, os cálculos poderão se tornar bem dispendiosos. Contudo, ao trabalharmos com coordenadas polares, podemos expressar

$$\vec{x} = r_k \hat{e}_r, \quad \hat{e}_r = \cos \phi_k \hat{e}_1 + \sin \phi_k \hat{e}_2, \quad (16)$$

em que r_k a distância radial a partir da origem no plano das lentes da posição da imagem(ens) correspondente ao ponto \vec{y}_k . A seguir, calculamos a norma (módulo) do vetor \vec{R}_0 , lembrando que $|\vec{R}_0|^2 = \vec{R}_0 \cdot \vec{R}_0$. Desse modo, da equação (13), temos

$$r_k^2 - 2r_k [(\alpha_1 + s_1) \cos \phi_k + (\alpha_2 + s_2) \sin \phi_k] + |\vec{\alpha} + \vec{s}|^2 - R_0^2 = 0. \quad (17)$$

Assim, ao chamar de

$$p_k = (\alpha_1 + s_{0,1}) \cos \phi_k + (\alpha_2 + s_{0,2}) \sin \phi_k \quad (18)$$

e

$$q = (\alpha_1 + s_1)^2 + (\alpha_2 + s_2)^2 - R_0^2, \quad (19)$$

a solução da equação algébrica (17) é dada pela expressão dada na equação (12). Observando que

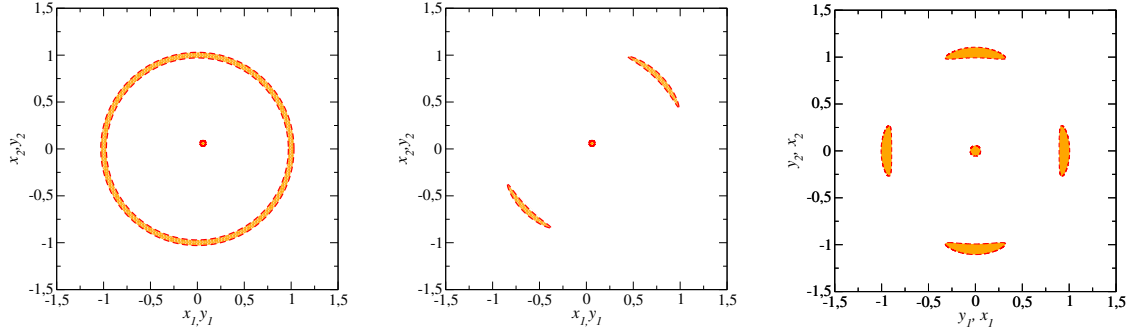


Figura 9: Soluções do Lenteamento de uma fonte circular de raio 0,03 por uma Esfera Isotérmica Singular perfeitamente alinhada (painel esquerdo) formando um Anel de Einstein, ligeiramente desalinhada (painel central) formando Arcos Gravitacionais e perfeitamente alinhada com uma lente do tipo Singular Isotérmico com Potencial Elíptico ($\varepsilon_\varphi = 0.1$), formando uma Cruz de Einstein (painel direito). Fonte: os autores

cada uma das soluções têm uma determinada interpretação. A cada ponto \vec{y}_k corresponderá um ponto “externo” dado por

$$r_k^{(+)} = -p_k + \sqrt{p_k^2 - q} \quad (20)$$

e um ponto “interno” dado por

$$r_k^{(-)} = -p_k - \sqrt{p_k^2 - q}. \quad (21)$$

De modo que ao efetuar uma varredura do ângulo ϕ_k desde 0 até 2π , em todos aqueles pontos que

$$p_k^2 - q \geq 0. \quad (22)$$

será formada uma borda externa, eq. (20), e uma interna, eq. (21), obtendo dessa maneira a(s) imagem(ens) de fonte extensa. Para efetuar o gráfico das fontes e imagens podem ser utilizados por exemplo o [Python](#) ou o [GeoGebra](#) (que vem com um formato mais amigável).

No caso de um alinhamento perfeito entre a lente, fonte e observador, que corresponde a $\vec{s} = \vec{0}$, e quando $|R_0| \leq 1$ as soluções correspondem a duas bordas com forma de círculo, uma de raio $r^{(+)} = 1 + |R_0|$ e outra de raio $r^{(-)} = 1 - |R_0|$, as quais em conjunto formam a imagem de um Anel, como mostrado no painel esquerdo da Figura 9. De maneira similar, ao deslocar ligeiramente a fonte da origem, haverá o surgimento de bordas externas e internas que formam imagens em forma de arcos, como mostrado no painel central da Figura 9 e por último, quando consideramos o ângulo de deflexão dado pela Eq. (8) obteremos a configuração de 04 imagens em forma de cruz, como mostrado no painel direito da Figura 9.

5 Discussões e perspectivas

A inserção de conteúdos de física moderna no ensino básico poder ser um desafio em razão da complexidade dos conceitos envolvidos e a necessidade de adaptação desses conteúdos para atender ao nível de compreensão dos discentes. Nesse contexto, a sugestão da confecção de um aparelho de baixo custo para a representação de fenômenos relacionados às lentes gravitacionais e à teoria da relatividade geral pode se mostrar relevante como recurso educacional. A ferramenta tem a potencialidade de representar fenômenos físicos abstratos e de difícil visualização em seu cotidiano (como é o caso do LG por estrelas ou galáxias) e, desta forma, há uma possibilidade de tornar mais acessíveis a compreensão dos conceitos e aplicações deste fenômeno.

Um outro fator a ser considerado da “lente gravitacional de baixo custo” é seu caráter interativo, promovendo um aprendizado mais ativo, isto é, mais centrado no estudante. Através do movimento relativo da lente em relação a fonte e o observador o aluno será capaz de perceber a geração de diferentes padrões de imagens, como dispostas na Figura 6 e conectar com a teoria, a qual também permite reproduzir essas configurações de imagens como mostradas na Figura 9.

Muito embora a lente gravitacional de baixo custo represente uma lente pontual, como apontado na referência [49], a solução da equação da lente para esse tipo de ângulo de deflexão acarreta uma equação quártica, que não é trivial de ser encontrada a solução e até onde é conhecido pelos autores, não foi observado até agora o LG forte por uma estrela. Por esse motivo, foi utilizada

unicamente com um ilustrador do efeito, e já que a formação de anéis luminosos, arcos ou imagens múltiplas ocorrem na escala galáctica, e todavia, pela sua simplicidade matemática, utilizou-se os modelos baseados no perfil isotérmico singular. Assim, a curto prazo, pode ser apresentado a confecção de uma lente que represente o perfil isotérmico singular.

Por outro lado, apesar das soluções apresentadas na Seção 4.2, já tenham sido obtidas em trabalhos anteriores [3, 38, 40], o procedimento utilizado para obter a solução fez uso direto das propriedades do produto escalar de dois vetores unitários perpendiculares, o que simplificou a obtenção das soluções. O Código escrito na linguagem C pode ser fornecido aos interessados, sendo suficiente enviar um e-mail aos autores.

Do ponto de vista da modelagem matemática, este trabalho pode ser generalizado ao trabalhar com duas quantidades do LG, conhecidas como convergência e cisalhamento externos que representam o efeito de distribuições de matéria próxima da lente. Nesse caso, as soluções (para fontes extensas circulares) mantêm-se válidas, mas será necessário redefinir as equações (18) e (19). Também poderia ser pensando em obter a solução para fontes elípticas (inclusive com orientação). Entretanto, recomenda-se que este último trabalho possa ser foco de um aluno de Vocação Científica.

Sobre os autores

Danyel C. de Oliveira (oliveira.daan@hotmail.com) é graduado em Licenciatura em Física pelo CEFET/RJ *campus* Nova Friburgo. Durante a trajetória acadêmica, realizou Mobilidade Internacional para o Instituto Politécnico de Bragança (*campus* Santa Apolónia) em Portugal. Atualmente atua no ensino básico como professor de física e robótica das escolas das redes municipais de Macaé e de Rio das Ostras. É aluno do [Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física \(MNPEF\) no Instituto Politécnico](#) da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Habib S. Dúmet-Montoya (habib@macae.ufrj.br) é Professor Doutor do Programa de Ciências da Natureza e suas Tecnologias do [Instituto Politécnico](#) da UFRJ, sediado na cidade de

Macaé. É professor permanente do Programa do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) no Instituto Politécnico da UFRJ.

Referências

- [1] S. L. Jaki, *Johann Georg von Soldner and the gravitational bending of light, with an English translation of his essay on it published in 1801*, [Foundations of Physics](#) **8**(11–12), 927 (1978).
- [2] A. Einstein, *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, [Annalen der Physik](#) **340**(10), 898 (1911).
- [3] M. Makler, *Lentes Gravitacionais: Um Rico Recurso Didático na Ocasão da Celebração dos 100 Anos do Eclipse de Sobral*, [Conexões - Ciência e Tecnologia](#) **13**(2), 21 (2019).
- [4] I. d. C. Moreira e A. A. P. Videira, *Einstein e o Brasil* (Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 1995).
- [5] K. Brecher, *Revealing the Universe* (MIT Press, Cambridge, 1982).
- [6] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, [Annalen der Physik](#) **354**(7), 769 (1916).
- [7] R. S. Ellis, *Gravitational lensing: a unique probe of dark matter and dark energy*, [Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences](#) **368**(1914), 967 (2010).
- [8] K. d. S. Oliveira Filho e M. d. F. O. Saraiva, *Astronomia e Astrofísica* (Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [9] F. W. Dyson, A. S. Eddington e C. R. Davidson, *The determination of the Deflection of the Light by the Sun's Gravitational Field, from observation made at total Eclipse of May 29, 1919*, *Memoirs of the Royal Astronomical Society* **62** (1920).
- [10] A. S. Eddington, *Space, Time and Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1920).

- [11] O. Chwolson, *Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne*, *Astronomische Nachrichten* **221**(20), 329 (1924).
- [12] A. Einstein, *Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field*, *Science* **84**(2188), 506 (1936).
- [13] F. Zwicky, *Nebulae as Gravitational Lenses*, *Physical Review* **51**(4), 290 (1937).
- [14] F. Zwicky, *On the Probability of Detecting Nebulae Which Act as Gravitational Lenses*, *Physical Review* **51**(8), 679 (1937).
- [15] J. M. Barnothy, *Quasars and the Gravitational Image Intensifier*, *The Astronomical Journal* **70**, 666 (1965).
- [16] S. Refsdal e H. Bondi, *The Gravitational Lens Effect*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **128**(4), 295 (1964).
- [17] S. Refsdal, *On the Possibility of Determining Hubble's Parameter and the Masses of Galaxies from the Gravitational Lens Effect*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **128**(4), 307 (1964).
- [18] S. Refsdal, *On the Possibility of Testing Cosmological Theories from the Gravitational Lens Effect*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **132**(1), 101 (1966).
- [19] D. Walsh, R. F. Carswell e R. J. Weymann, *0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?*, *Nature* **279**(5712), 381 (1979).
- [20] G. Soucail et al., *A blue ring-like structure in the center of the A 370 cluster of galaxies*, *Astronomy & Astrophysics* **172**, L14 (1987).
- [21] R. Lynds e V. Petrosian, *Luminous Arcs in Clusters of Galaxies*, *The Astrophysical Journal* **336**, 1 (1989).
- [22] B. Paczynski, *Giant luminous arcs discovered in two clusters of galaxies*, *Nature* **325**(6105), 572 (1987).
- [23] G. Soucail et al., *The giant arc in A 370 : spectroscopic evidence for gravitational lensing from a source at $Z=0.724$.*, *Astronomy & Astrophysics* **191**, L19 (1988).
- [24] J. N. Hewitt et al., *Unusual radio source MG1131+0456: a possible Einstein ring*, *Nature* **333**(6173), 537 (1988).
- [25] M. J. Irwin et al., *Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event*, *The Astronomical Journal* **98**, 1989 (1989).
- [26] K. U. Ratnatunga, R. E. Griffiths e E. J. Ostrander, *The Top 10 List of Gravitational Lens Candidates from the HUBBLE SPACE TELESCOPE Medium Deep Survey*, *The Astronomical Journal* **117**(5), 2010 (1999). [ArXiv:astro-ph/9902100](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9902100).
- [27] C. D. Fassnacht et al., *Strong Gravitational Lens Candidates in the GOODS ACS Fields*, *The Astrophysical Journal* **600**(2), L155 (2004). [ArXiv:astro-ph/0309060](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0309060).
- [28] P. J. Marshall et al., *An Automated Search for Gravitational Lenses in the HST Imaging Archive*, in *American Astronomical Society Meeting Abstracts* (2005), vol. 207, 200.03.
- [29] A. S. Bolton et al., *The Sloan Lens ACS Survey. I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Massive Early-Type Lens Galaxies*, *The Astrophysical Journal* **638**(2), 703 (2006). [ArXiv:astro-ph/0511453](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0511453).
- [30] L. V. E. Koopmans et al., *The Sloan Lens ACS Survey. III. The Structure and Formation of Early-Type Galaxies and Their Evolution since $z \approx 1$* , *The Astrophysical Journal* **649**(2), 599 (2006). [ArXiv:astro-ph/0601628](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0601628).
- [31] L. A. Moustakas et al., *A Strong-Lens Survey in AEGIS: The Influence of Large-Scale Structure*, *The Astrophysical Journal* **660**(1), L31 (2007). [ArXiv:astro-ph/0607239](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0607239).
- [32] C. Faure et al., *First Catalog of Strong Lens Candidates in the COSMOS Field*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **176**(1), 19 (2008). [ArXiv:0802.2174](https://arxiv.org/abs/0802.2174).
- [33] N. Jackson, *Gravitational lenses and lens candidates identified from the COSMOS fi-*

- eld*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **389**(3), 1311 (2008). [ArXiv:0806.3693](#).
- [34] J. R. Brownstein et al., *The BOSS Emission-Line Lens Survey (BELLS). I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Lens Galaxies at Redshift ~ 0.5* , *The Astrophysical Journal* **744**(1), 41 (2011). [ArXiv:1112.3683](#).
- [35] R. A. Cabanac et al., *The CFHTLS strong lensing legacy survey. I. Survey overview and T0002 release sample*, *Astronomy & Astrophysics* **461**(3), 813 (2006). [ArXiv:astro-ph/0610362](#).
- [36] A. More et al., *The CFHTLS-Strong Lensing Legacy Survey (SL2S): Investigating the Group-scale Lenses with the SARCS Sample*, *The Astrophysical Journal* **749**(1), 38 (2012). [ArXiv:1109.1821](#).
- [37] J. A. S. Lima e R. C. Santos, *Do Eclipse Solar de 1919 ao Espetáculo das Lentes Gravitacionais*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**(suppl 1) (2019).
- [38] V. P. Freitas, *Arcos Gravitacionais na Escala Galáctica: Modelagem Analítica e Seções de Choque.*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2018). Disponível em https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6333965, acesso em fev. 2024.
- [39] G. B. Caminha, *Um prelúdio para o lenteamento gravitacional forte em levantamentos de grandes áreas.*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2013). Disponível em https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=599511, acesso em fev. 2024.
- [40] H. S. Dúmet-Montoya, *Modelagens Semianalíticas para Arcos Gravitacionais: Seção de Choque e Método Perturbativo em Lentes Pseudoelípticas.*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2011). Disponível em <https://cbpfindex.cbpf.br/index.php?module=main&moduleFile=pubDetails&pubId=5823&typeId=9>, acesso em fev. 2024.
- [41] Brasil, Ministério da Educação, *Base Nacional Curricular Comum*, Brasília (2018).
- [42] R. D. Blandford e R. Narayan, *Cosmological Applications of Gravitational Lensing*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **30**(1), 311 (1992).
- [43] P. Schneider, J. Ehlers e E. E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [44] A. O. Petters, H. Levine e J. Wambsganss, *Singularity theory and gravitational lensing* (Birkhäuser, Berlin, 2001).
- [45] S. Mollerach e E. Roulet, *Gravitational lensing and microlensing* (WORLD SCIENTIFIC, 2002).
- [46] J. E. Gunn, *On the Propagation of Light in Inhomogeneous Cosmologies. I. Mean Effects*, *The Astrophysical Journal* **150**, 737 (1967).
- [47] M. Bartelmann e P. Schneider, *Weak gravitational lensing*, *Physics Reports* **340**(4-5), 291 (2001). [ArXiv:astro-ph/9912508](#).
- [48] R. M. Ros, *Gravitational lenses in the classroom*, *Physics Education* **43**(5), 506 (2008).
- [49] J. Surdej et al., *The optimal gravitational lens telescope*, *The Astronomical Journal* **139**(5), 1935 (2010).
- [50] C. R. Keeton, *A Catalog of Mass Models for Gravitational Lensing*, arXiv (2001). [ArXiv:astro-ph/0102341](#).
- [51] E. L. Turner, J. P. Ostriker e I. Gott, J. R., *The statistics of gravitational lenses - The distributions of image angular separations and lens redshifts*, *The Astrophysical Journal* **284**, 1 (1984).
- [52] R. Kormann, P. Schneider e M. Bartelmann, *A gravitational lens model for B 1422 +*

- 231, *Astronomy & Astrophysics* **286**(2), 357 (1994). [ArXiv:astro-ph/9311011](#).
- [53] T. Treu, *Strong Lensing by Galaxies*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **48**(1), 87 (2010). [ArXiv:1003.5567](#).
- [54] R. Gavazzi et al., *The Sloan Lens ACS Survey. IV. The Mass Density Profile of Early-Type Galaxies out to 100 Effective Radii*, *The Astrophysical Journal* **667**(1), 176 (2007). [ArXiv:astro-ph/0701589](#).
- [55] A. S. Bolton et al., *The BOSS Emission-Line Lens Survey. II. Investigating Mass-density Profile Evolution in the SLACS+BELLS Strong Gravitational Lens Sample*, *The Astrophysical Journal* **757**(1), 82 (2012). [ArXiv:1201.2988](#).
- [56] C. Grillo, *On the Average Density Profile of Dark-matter Halos in the Inner Regions of Massive Early-type Galaxies*, *The Astrophysical Journal* **747**(1), L15 (2012). [ArXiv:1202.3791](#).
- [57] G. van de Ven, R. Mandelbaum e C. R. Keton, *Galaxy density profiles and shapes - I. Simulation pipeline for lensing by realistic galaxy models*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **398**(2), 607 (2009). [ArXiv:0808.2493](#).