

# Achatamento rotacional dos planetas

J. A. de Freitas Pacheco

Observatoire de la Côte d'Azur, França

---

## Resumo

Corpos celestes em rotação não possuem simetria esférica, pois a gravidade efetiva é menor no equador do que nos polos. A deformação depende não somente da velocidade de rotação mas também da estrutura interna do corpo. Neste artigo, a deformação ou “achatamento” dos planetas do sistema solar, devido a rotação dos mesmos, é estimada modelizando tais corpos como um “fluido” ou como um corpo “elástico”. A comparação com as observações permite obter informações sobre a estrutura interna.

## Abstract

Rotating celestial bodies do not have spherical symmetry, since the effective gravity is different between the poles and the equator. Deviation from sphericity, dubbed the flattening of the body, depends on the rotation velocity but also on the internal structure. In this article the flattening of solar system planets is calculated by considering these bodies either as an incompressible fluid or constituted by an elastic material. Comparison with data permits to obtain information about the internal structure of these bodies.

---

**Palavras-chave:** achatamento dos planetas, achatamento rotacional, Sistema Solar.

**Keywords:** flattening of planets, rotational flattening, solar system.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v5n2.44870](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v5n2.44870)

## 1 Introdução

Um dos sucessos da teoria da gravitação de Isaac Newton refere-se ao cálculo do achatamento do globo terrestre devido sua rotação. Em outras palavras, a forma da Terra não deveria ser à de uma esfera mas sim à de um elipsoide com o eixo polar menor que o eixo equatorial. O achatamento  $f$  é definido pela razão entre a diferença entre os raios equatorial e polar e o raio médio da configuração. O cálculo de  $f$  para um dado planeta e em particular para a Terra, implica em hipóteses sobre a estrutura interna. Newton, em 1687, em suas estimativas modelizou a Terra como um fluido incompressível e homogêneo, com uma velocidade angular constante [1]. Ele obteve  $f = 1/230$ , valor muito próximo do atual, considerando a pouca precisão dos valores conhecidos na época, tanto da densidade média da Terra como da constante gravitacional. Em 1735, a pedido de Luiz XV, uma expedição organizada pela Academia de Ciências da França efetuou medidas de arcos na superfície terrestre [2], próximos do equador e do polo, obtendo  $f = 1/178$ , o que permitiu uma confirmação da previsão de Newton.

Deve-se mencionar que valores modernos, estimados por métodos diferentes e em particular por satélites artificiais, indicam  $f = 1/298,25$ ; próximo do valor estimado originalmente por Newton.

O cálculo do achatamento terrestre foi motivo de inúmeras investigações por físicos e matemáticos célebres no decorrer destes últimos três séculos como, Descartes, Maupertius, Clairaut, Bernoulli, MacLaurin, Euler, d'Alembert, Jacobi, Lagrange, Cavendish, Laplace, Gauss, Poisson, Cauchy, entre outros. Na realidade, a questão aparentemente simples de modelizar um planeta como um fluido ou como um corpo elástico (ou rígido) submetido ao seu próprio campo gravitacional, é mais complexa do que se possa imaginar. O problema pode ser, em princípio, definido da seguinte forma: considera-se um corpo de referência no qual, inicialmente, a auto gravitação é desprezada. Neste caso, o corpo é desprovido de tensões, é homogêneo ou seja, compressível e elástico. Em seguida, considera-se o corpo sujeito ao seu próprio campo gravitacional, situação que define um planeta "elástico". A questão agora é encontrar as configurações possíveis de equilíbrio. Em geral,

uma hipótese importante discutida por Love [3,4] é considerada, isto é, admite-se que o corpo esteja em um estado de equilíbrio hidrostático. Esta hipótese altera a natureza inicial do problema, que agora se assemelha ao estudo do equilíbrio de um corpo constituído por um fluido. Se as tensões presentes no corpo são suficientemente pequenas, pode-se utilizar a teoria linear da elasticidade e os leitores interessados em maiores detalhes podem encontrar uma análise mais completa, por exemplo, no livro de Landau & Lifshitz sobre a teoria da elasticidade [5].

Neste artigo desenvolveremos uma análise simples do problema do achatamento rotacional dos planetas do Sistema Solar dirigida aos estudantes e aos não especialistas. Consideraremos inicialmente os planetas modelizados como um fluido e em seguida introduziremos modelos submetidos a tensões elásticas, os quais serão comparados a um planeta considerado como constituído por um fluido ideal. Em geral, serão considerados casos em que a velocidade de rotação é pequena, o que implica em um achatamento  $f \ll 1$  ou, em outras palavras, um pequeno desvio da forma esférica.

## 2 O modelo fluido

Como mencionado acima, na aproximação “fluido” o planeta é suposto satisfazer a equação de equilíbrio hidrostático, isto é

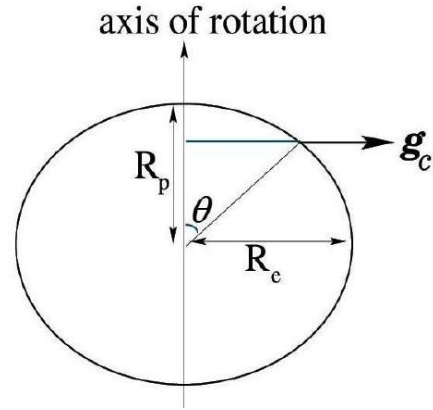
$$\vec{\nabla}P + \rho\vec{\nabla}W = 0 \tag{1}$$

Supondo-se que a forma do planeta em rotação uniforme é a de um esferoide oblato, portanto com simetria azimutal, a pressão  $P$  do fluido assim como sua densidade  $\rho$  dependem somente das coordenadas esféricas  $(r, \theta)$ . Na equação acima,  $W$  é o potencial efetivo que definiremos mais abaixo. Se a pressão do fluido obedece a uma equação politrópica da forma  $P \propto \rho^\gamma$ , podemos reescrever a equação (1) sob a forma

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + W \right) = 0 \tag{2}$$

A equação (2) pode ser integrada resultando na constância, em uma dada superfície  $(r, \theta)$ , da expressão

$$\left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + W \right) = C \tag{3}$$



**Figura 1:** Esquema da superfície de um planeta achatado pelo efeito de sua rotação.  $R_p$  e  $R_e$  são, respectivamente, os raios polar e equatorial.

Em particular, a equação (3) pode ser aplicada a superfície do planeta onde as condições de contorno impõem que a pressão seja nula (efeitos de uma eventual atmosfera são desprezados). Assim, a superfície do planeta representa uma equipotencial ou, em outras palavras, devemos ter  $W = C$ .

A Figura 1 representa a superfície em questão do planeta, onde  $R_p$  e  $R_e$  são respectivamente os raios polar e equatorial. Representando-se a superfície equipotencial por um elipsoide (em coordenadas polares) e expandindo-se em série em termos do achatamento  $f \ll 1$ , a equação da superfície equipotencial é dada aproximadamente por

$$r(\theta) = R_e (1 - f \cos^2 \theta) \tag{4}$$

Por outro lado, verifica-se facilmente que, se  $\Omega$  é a velocidade angular de rotação, a aceleração centrífuga pode ser decomposta em uma componente radial igual a  $g_r = \Omega^2 r \sin^2 \theta$  e uma componente tangencial ao longo do meridiano igual a  $g_\theta = \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta$ . Tais componentes podem ser expressas através do gradiente de um potencial “centrífugo”  $\chi$  tal que  $g_r = -\partial\chi/\partial r$  e  $g_\theta = -(1/r)\partial\chi/\partial\theta$ . Desta forma, o potencial centrífugo pode ser definido como

$$\chi(r, \theta) = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \tag{5}$$

No que se refere ao potencial gravitacional, considerando a simetria em torno do eixo  $z$  (coincidente com o eixo de rotação), ele pode ser expresso em termos de seus multipolos, isto é,

$$V(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left( \frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \tag{6}$$

onde  $M$  é a massa do planeta no interior de uma superfície  $r(\theta)$ ,  $P_n(\theta)$  são os polinômios de Legendre e os  $J_n$  são harmônicos zonais, constantes sem dimensão e definidas por

$$J_n = -\frac{3}{2\bar{\rho}} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)} \left(\frac{r}{R_c}\right)^{2n+2} \times \rho(r, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \frac{dr}{R_c} \quad (7)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média do corpo. Uma discussão detalhada da eq. (6) pode ser encontrada na referência [6]. Veremos mais adiante como os coeficientes zonais  $J_n$  podem ser estimados observacionalmente. Se a origem do sistema de coordenadas coincidir com o centro de massa, temos  $J_0 = 1$  e  $J_1 = 0$  e, em primeira aproximação, o potencial gravitacional pode ser expresso como

$$V(r, \theta) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM R_e^2}{2r^3} J_2 (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (8)$$

O segundo termo do lado direito da eq. (8) representa uma correção (de primeira ordem) ao potencial Newtoniano, devido a alteração da forma esférica pela rotação do corpo. Desta forma, o potencial efetivo  $W$  será dado pela soma das equações (5) e (8). A constante  $C$  que define a equipotencial na superfície pode agora ser calculada no polo definido pelas coordenadas  $r = R_p$  e  $\theta = 0$ . Nestas condições,

$$C = \frac{GM}{R_p} - \frac{GM}{R_p} \left(\frac{R_c}{R_p}\right)^2 J_2 \quad (9)$$

Em seguida, calculando-se  $W$  no equador, definido por  $r = R_e, \theta = \pi/2$  e usando-se a equação (9) obtemos

$$\frac{1}{2} \Omega^2 R_e^2 + \frac{GM}{R_e} \left(1 + \frac{J_2}{2}\right) = \frac{GM}{R_p} \left[1 - \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 J_2\right] \quad (10)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} \frac{\Omega^2 R_e^2 R_p}{GM} + J_2 \left(\frac{R_p}{2R_e} + \frac{R_p^2}{R_e^2}\right) = 1 - \frac{R_p}{R_e} = f \quad (11)$$

Considerando-se somente os termos de primeira ordem em  $f$  na expressão multiplicativa do segundo coeficiente zonal e lembrando que a massa

total do esferoide é  $M = 4\pi\bar{\rho}R_e^2R_p/3$ , podemos escrever que o achatamento de um corpo modelado por um fluido em rotação lenta é dado por

$$f = \frac{3\Omega^2}{8\pi G\bar{\rho}} + \frac{3}{2} J_2 \quad (12)$$

Esta equação será utilizada para estimar o achatamento de planetas do sistema solar sempre que o coeficiente zonal  $J_2$  for conhecido. No caso de um corpo homogêneo, podemos estimar  $J_2$  a partir de sua definição [eq. (7)], usando a eq. 4. Neste caso, obtemos facilmente que  $J_2 = (2/5)f$  e, substituindo-se na equação acima, obtemos o resultado bem conhecido para o achatamento de um corpo fluido e homogêneo em rotação lenta, isto é

$$f = \frac{15}{16\pi} \frac{\Omega^2}{G\bar{\rho}} \quad (13)$$

### 3 Determinação dos coeficientes zonais do potencial terrestre

A equação (8) indica que o primeiro termo significativo da expansão em multipolos do potencial gravitacional depende de  $J_2$  e que pode ser interpretado igualmente como uma perturbação ao potencial Newtoniano. Neste caso, um satélite (artificial) da Terra ou um planeta em torno do Sol, terão seus elementos orbitais perturbados. Em particular, o movimento secular do argumento do perigeu (ver, por exemplo, [7]). Em primeira aproximação, o avanço do perigeu (em radianos por revolução) é dado por

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} = -3\pi \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 J_2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} \quad (14)$$

onde  $i$  é a inclinação da órbita do satélite,  $e$  é a excentricidade e  $a$  o semieixo maior.

Façamos agora uma breve digressão histórica que nos parece relevante. Em 1957, logo após o lançamento do primeiro satélite artificial da Terra (o Sputnik I), suas passagens meridianas foram registradas no Instituto Astronômico e Geofísico da USP, graças a um rádio interferômetro instalado no campus do observatório por Luiz de Queiroz Orsini e Antônio Hélio Guerra Vieira, ambos professores da Escola Politécnica da USP e cujo objetivo inicial era o estudo da ionosfera.

Face aos resultados obtidos, não somente os registros das passagens meridianas do Sputnik I mas também, posteriormente, daqueles do Explorer I, permitiram ao professor Abrahão de Moraes, então diretor do IAG, utilizar tais informações para estimar o avanço do perigeu da órbita destes satélites artificiais, calcular os coeficientes zonais  $J_n$  e efetuar estimativas do achatamento da Terra. Os resultados foram publicados em 1959 pelos Anais da Academia Brasileira de Ciências, representando um dos primeiros trabalhos sobre perturbações orbitais devidas ao achatamento da Terra. O artigo inclui ainda soluções em termos das funções de Jacobi e de Weierstrass. Tal trabalho contribuiu enormemente a reputação internacional de Abrahão de Moraes, um dos "pais" da astronomia brasileira.

Desde então, graças ao estudo de levantamentos gravimétricos e das órbitas dos satélites artificiais, foi possível estimar-se os coeficientes zonais  $J_n$  de ordens elevadas ( $n > 30$ ), permitindo determinar o geóide terrestre com grande precisão. Adotaremos aqui o valor  $J_2 = 1,0827 \times 10^{-3}$ , recomendado pela União Astronômica Internacional (UAI) na sua resolução nº 1 da Assembleia Geral de 1967 em Lucerna. Neste caso, usando-se a equação (12), própria para um modelo "fluido não-homogêneo", obtemos para o achatamento rotacional da Terra o valor  $f = 1/298,25 = 0,00335289$ , próximo do valor original estimado por Newton. Notar que o valor do achatamento terrestre medido através de inúmeras missões geodésicas é  $f = 0,00335$ , em excelente acordo com o resultado teórico esperado do modelo fluido não-homogêneo. Voltaremos a esta questão mais adiante quando modelos elásticos serão discutidos.

### 3.1 O achatamento rotacional do Sol

O problema do achatamento rotacional do Sol tem um interesse histórico particular, pois está relacionado com um dos testes fundamentais da teoria Geral da Relatividade de Einstein.

Nos fins do século 19 a gravitação Newtoniana encontrava-se no seu apogeu, pois o movimento dos corpos que constituem o sistema solar (planetas, asteroides, cometas, etc.) podia ser calculado com grande precisão. No entanto, havia diferenças significativas no caso do planeta Mer-

cúrio. Uma teoria detalhada da órbita deste planeta foi desenvolvida desde 1843 pelo astrônomo e matemático que previu a existência de Netuno, Urbain Jean Joseph Le Verrier. Os estudos seguintes confirmaram uma discrepância entre o valor observado para o avanço secular do perigeu de Mercúrio e as correções devidas as perturbações dos demais planetas do sistema solar. O valor observado corresponde a  $574,5''/\text{século}$  enquanto as correções devidas ao demais astros é avaliada, segundo a teoria de Newton, em  $531,5''/\text{século}$  (ver, por exemplo, a referência [8]). Assim, resta um resíduo da ordem de  $43''/\text{século}$ , motivo de discussões desde o fim do século 19 e início do século 20.

Diferentes hipóteses foram levantadas procurando explicar tal diferença como a presença de um disco de poeira nas vizinhanças das órbitas de Mercúrio e Vênus ou a existência de um planeta interior denominado Vulcano, entre a órbita de Mercúrio e o Sol. No entanto, com o advento da teoria geral da relatividade em 1915, o avanço do perigeu de Mercúrio (e dos demais planetas) pode ser explicado naturalmente, constituindo-se em um dos maiores triunfos da teoria de Einstein.

Nos anos sessenta, Brans & Dicke [9] propuseram uma teoria escalar-tensorial da gravitação, procurando incorporar o princípio de Mach no qual as forças inerciais são a consequência da distribuição da matéria localizada nos confins do universo. Neste contexto, introduziram um campo escalar responsável por tal interação. O acoplamento entre o campo escalar e o tensorial é representado pela constante de interação  $\omega$  cuja intensidade se espera que seja da ordem da unidade. A teoria de Brans & Dicke prevê, igualmente, um avanço do perigeu de Mercúrio mas com um valor inferior ao da Relatividade Geral. Para explicar a diferença, Brans & Dicke sugeriram que seria devida a um achatamento do Sol, o qual teria uma rotação mais intensa no seu interior do que à observada na superfície. Utilizando a equação (14), calcula-se facilmente que o coeficiente zonal  $J_2$  necessário para explicar o avanço do perigeu de Mercúrio por um eventual achatamento solar seria  $J_2 = 1,96 \times 10^{-4}$ . Medidas do achatamento solar efetuadas por Dicke, usando um sofisticado sistema fotométrico, foram contestadas na literatura devido as dificuldades em definir uma superfície equipotencial, pois a fotos-

**Tabela 1:** Dados dos planetas e coeficiente de achatamento observado e calculado.

Planeta	$\rho$ ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )	$P$ (horas)	$J_2$	$f$ (observado)	$f$ (calculado)
Terra	5,513	24,00	$1,0826 \times 10^{-3}$	0.00335	0.00335
Marte	3,933	24,62	$1,9605 \times 10^{-3}$	0.00648	0.00523
Júpiter	1,323	9,93	$1,4730 \times 10^{-2}$	0,06487	0,06380
Saturno	0,687	10,75	$1,629 \times 10^{-2}$	0,09796	0,0931
Urano	1,270	-17,23	$3,510 \times 10^{-3}$	0,02293	0,0197
Netuno	1,638	16,11	$3,532 \times 10^{-3}$	0,01708	0,0181

fera depende do comprimento de onda no qual a profundidade ótica é definida.

Uma ampla revisão das medidas do achatamento solar foi apresentada em [10] e o valor atualmente aceito é  $J_2 = -(2,22 \pm 0,02) \times 10^{-7}$ , cerca de 3 ordens de grandeza inferior ao valor necessário para explicar o avanço observado do perigeu de Mercúrio, encerrando definitivamente a questão em favor da teoria de Einstein.

### 3.2 Coeficientes zonais dos demais planetas do sistema solar

A determinação dos coeficientes  $J_n$  para os planetas do sistema solar segue um procedimento similar ao descrito anteriormente, isto é, baseado nas variações seculares dos elementos orbitais e, em particular no avanço do perigeu dos satélites naturais, bem como nas variações orbitais das sondas espaciais enviadas nestas últimas décadas para estudar os planetas do sistema solar. Passagens próximas pelos planetas e seus satélites permitiram obter informações preciosas quanto aos campos gravitacionais dos mesmos.

Na tabela 1 apresenta-se um resumo dos valores do coeficiente zonal  $J_2$  medido por tais procedimentos bem como o achatamento estimado pela equação (12), resultante de um modelo fluido não-homogêneo. Para cada planeta é dado, igualmente, sua densidade média ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) na coluna dois e o período rotacional em horas na coluna três. Os valores medidos e previstos do achatamento são igualmente listados respectivamente nas duas últimas colunas.

Existem disponíveis na literatura valores dos coeficientes zonais para vários satélites naturais, que não foram incluídos na tabela 1. Isto se justifica porque a deformação destes corpos não é

devida unicamente a rotação mas também as forças de maré entre o planeta e o satélite, como é o caso da Lua. Apenas como ilustração e facilitar o trabalho de um leitor desejoso de se aprofundar no tema, citamos as referências [11–13] para valores dos coeficientes zonais da Terra e de outros planetas do sistema solar. Para os gigantes gasosos Urano e Netuno podemos mencionar as referências [14, 15] e explicitamente para Saturno a referência [16] e [17] para Júpiter.

Uma simples inspeção da tabela 1 sugere que o modelo “fluido não-homogêneo” explica razoavelmente o achatamento observado dos planetas, embora no caso de Marte o erro é maior do que se poderia esperar. Não se pode excluir que haja ainda uma incerteza na determinação do coeficiente zonal  $J_2$  deste planeta e/ou na compreensão de sua estrutura interna, exigindo termos adicionais para a representação do potencial gravitacional. Embora o modelo “fluido” seja o mais adequado para planetas gigantes gasosos, notamos pequenas diferenças entre os valores previstos do achatamento e os observados. Embora erros nos coeficientes zonais possam estar ainda presentes, deve-se levar em conta que a estrutura interna destes planetas é bastante complexa. Tais gigantes gasosos formam-se inicialmente a partir de um núcleo rochoso com massas entre 10 – 30 vezes a massa da Terra e, em seguida, por acreção do gás presente no disco protoplanetário [18]. No entanto, estes aspectos não serão considerados no presente artigo.

## 4 O modelo “elástico”

Como vimos anteriormente, o estudo da figura de equilíbrio de um corpo rígido/elástico foi mo-

tivo (e é ainda) de investigação por inúmeros pesquisadores de renome. No entanto, como veremos, modelos baseados na teoria linear da elasticidade não produzem resultados significativamente diferentes do modelo “fluido” discutido acima. No entanto, tratando-se de um texto com objetivos didáticos, apresentaremos as bases de tal modelo.

Inicialmente, é interessante procurar responder a seguinte questão: consideremos uma rocha de pequenas dimensões, dezenas de metros, por exemplo. Neste caso, tem a gravitação algum efeito no seu equilíbrio interno ou na determinação de sua forma? A resposta é certamente negativa, pois a estrutura do corpo nestas condições é determinada essencialmente por forças moleculares de origem eletromagnética. Se aplicarmos uma força externa (tração ou compressão) a distância intermolecular (ou entre os átomos) será alterada e uma energia elástica potencial é induzida. No regime linear, ou regime de Hooke, a energia potencial elástica é proporcional ao quadrado do módulo do vetor que caracteriza a deformação. Se aumentarmos, por exemplo, a tração a qual o corpo está submetido, nos afastamos do regime linear e o corpo pode sofrer uma ruptura. Um aspecto importante é que, experimentalmente, a ruptura ocorre antes do que se deveria esperar com base no valor do módulo de Young do material [19]. Para materiais diversos, a tração crítica situa-se entre (4–6)% do valor do módulo de Young. Por exemplo, uma barra de ferro ( $Y = 1,6 \times 10^{12}$  dyn/cm<sup>2</sup>) sofre ruptura quando submetida a uma tração de  $8,5 \times 10^9$  dyn/cm<sup>2</sup>.

Com base nestas informações, podemos retomar a discussão sobre a dimensão mínima de um corpo a partir da qual a gravitação tem um papel importante na determinação de sua forma ou no seu equilíbrio interno. Para simplificar a análise, suponhamos uma rocha homogênea de forma esférica. Neste caso, um cálculo simples mostra que a pressão central causada pela gravidade é da ordem de

$$P_0 = \frac{2\pi}{3} G\rho^2 R^2 \quad (15)$$

Tal pressão não pode ser superior a tensão crítica  $T_c$  do material acima da qual ocorre a ruptura, o que permite definir um raio crítico  $R_c$  acima do qual a gravitação domina as forças moleculares

de origem eletromagnética, isto é

$$R_c = \sqrt{\left(\frac{3T_c}{2\pi G\rho^2}\right)} \quad (16)$$

Para uma rocha constituída de basalto, a tensão de ruptura é da ordem de  $5 \times 10^8$  dyn/cm<sup>2</sup> e a densidade é tipicamente da ordem de  $2,2$  g/cm<sup>3</sup>. Neste caso, obtemos da eq. (16) que o raio crítico é aproximadamente  $R_c \sim 270$  km. Abaixo deste valor a gravitação é subdominante, o que explica as formas irregulares de asteroides com tais dimensões. Núcleos cometários são agregados de pequenas rochas constituídas pelo chamado gelo “sujo” (*dirty ice*), cuja tensão de ruptura é da ordem de  $10^7$  erg/cm<sup>2</sup> e uma densidade aproximada de  $1$  g/cm<sup>3</sup>. Neste caso, o raio crítico é  $R_c \sim 85$  km. As dimensões observadas dos núcleos cometários são apenas de alguns quilômetros, indicando a predominância de forças de coesão moleculares e explicando a ruptura frequente dos núcleos por forças de maré, quando tais corpos se aproximam demasiadamente do Sol ou de Júpiter.

Feitas tais considerações, podemos retomar a questão do equilíbrio de um planeta elástico em rotação. Admitiremos novamente que a rotação não é importante e que pode ser tratada como uma perturbação do potencial gravitacional  $V$ . Nestas condições, a equação equivalente ao equilíbrio hidrostático (equação de Cauchy) é

$$\partial_k T_i^k + \rho \partial_i V = 0 \quad (17)$$

O tensor de Cauchy no limite de Hooke é dado por

$$T_{jk} = \lambda e_{nn} \delta_{jk} + 2\mu e_{jk} \quad (18)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, relacionadas por  $\lambda = K - (4/3)\mu$  e onde  $K$  é o coeficiente de compressibilidade do material. A tensão  $e_{ij}$  está relacionada com o vetor de deformação  $\zeta_i$  pela relação

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right) \quad (19)$$

Notar que no caso incompressível temos a condição adicional  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} = 0$ . A equação (17) pode ser linearizada no sentido de Love, isto é, introduzindo-se o potencial centrífugo [ver eq. (5)] como uma perturbação.

Por outro lado, a solução para o modelo “fluido” foi obtida com a condição de contorno na qual a pressão na superfície é nula, o que não necessariamente é verdade no caso de um corpo sólido em rotação como a Terra. Neste caso, a superfície pode estar submetida a uma tensão elástica (não hidrostática)  $T_s$  que pode ser representada de uma forma geral, pela expressão

$$T_s = \sigma_c \left( \frac{R}{R_c} \right)^2 \left( \frac{\Omega^2}{4\pi G\rho} - \frac{4}{15}f \right) P_2(\cos\theta) \quad (20)$$

Na equação acima  $\sigma_c$  define a tensão crítica próxima do valor de fratura discutido anteriormente. Para tensões  $T_s$  acima de  $\sigma_c$ , a superfície comporta-se como um fluido;  $R$  é o raio (médio) do planeta e  $R_c$  é o raio crítico definido pela equação (16). Isto significa que, quando  $R \gg R_c$ , na ausência de rotação o corpo tem uma forma esférica. Por outro lado, se a tensão  $T_s$  for inferior ao valor crítico  $\sigma_c$ , a superfície vai responder de forma elástica. Para os interessados nos detalhes matemáticos, consultar a referência [20] para o cálculo do achatamento do planeta quando  $T_s \ll \sigma_c$ , dado pela expressão

$$f = \frac{15}{16\pi} \frac{\Omega^2}{G\rho} \frac{1}{1 + \tilde{\mu}} \quad (21)$$

onde o módulo de cisalhamento reduzido  $\tilde{\mu}$  é definido pela relação

$$\tilde{\mu} = \frac{57}{8\pi} \frac{\mu}{G\rho^2 R^2} \quad (22)$$

Em geral, para os planetas do sistema solar (tanto os chamados “terrestres” como os gasosos), a tensão na superfície gerada pela rotação é superior ao valor crítico  $\sigma_c$ , o que significa que o achatamento pode ser calculado com boa precisão pela equação (12). Pequenas diferenças entre os valores calculados e observados são provavelmente devidas as incertezas na estrutura interna dos planetas e nas componentes zonais do potencial gravitacional, em particular no caso dos planetas gigantes gasosos, como mencionado acima.

## 5 Considerações finais

A forma de um corpo (planeta) em rotação, submetido a sua gravitação, é uma questão que motivou inúmeros pensadores nestes últimos três

séculos e continua ainda como uma fonte importante de motivação científica. Com a descoberta dos exoplanetas e o desenvolvimento tecnológico da instrumentação para imageamento em alta resolução, graças a técnicas interferométricas (caso do instrumento SPHERE, em operação no ESO - European Southern Observatory), será possível no futuro, durante os trânsitos, resolver a forma dos planetas projetada na superfície da estrela e obter informações quanto ao seu achatamento. Tais observações nos fornecerão informações fundamentais quanto a rotação e a estrutura interna destes corpos.

As bases da teoria apresentadas neste artigo podem ser aplicadas a outros corpos compactos em rotação como as anãs brancas e estrelas de nêutrons, embora estas últimas necessitem de um tratamento relativístico e não Newtoniano [21]. Em todo caso, é interessante de ser mencionado que, o único pulsar (pulsar do Caranguejo) com um limite superior para seu achatamento rotacional, obtido pelo interferômetro gravitacional LIGO, é pouco deformado pois  $f < 1,3 \times 10^{-4}$ , enquanto a equação (13) prevê  $f \sim 2,4 \times 10^{-4}$ .

## Referências

- [1] I. Newton, *Natural philosophy and the principles of mathematics* (University of California Press, 1966).
- [2] P. L. M. de Maupertius, *La figure de la Terre déterminée* (Académie des Sciences, 1739).
- [3] A. Love, *Some problems of geodynamics being an essay to which the Adams prize in the University of Cambridge was adjusted in 1911* (Cambridge University Press, 1963).
- [4] A. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity* (Cambridge University Press, 1892).
- [5] L. Landau e E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity* (Oxford, 1959).
- [6] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*, vol. 31 (Springer Science & Business Media, 2012). Disponível em <http://eudml.org/doc/203661>, acesso em ago. 2024.

- [7] M. Lecar, J. Sorenson e A. R. Eckels, *A determination of the coefficient  $J$  of the second harmonic in the Earth's gravitational potential from the orbit of satellite 1958  $\beta_2$* , *Journal of Geophysical Research* **64**, 209 (1959), uma fórmula para o avanço do argumento do perigeu é dada como um exercício resolvido no livro “Mécanique” de L. Landau e E. M. Lifshitz, Editions de la Paix, Moscou (em francês).
- [8] B. Berche e E. Medina, *The advance of Mercury's perihelion* (2024). [ArXiv:2402.04643](#).
- [9] C. Brans e R. H. Dicke, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, *Physical Review* **124**(3), 925 (1961).
- [10] C. Damiani et al., *A brief history of the solar oblateness. A review*, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* **73**(2–3), 241 (2011).
- [11] A. C. M. Correia e A. Rodríguez, *On the equilibrium figure of close-in planets and satellites*, *The Astrophysical Journal* **767**(2), 128 (2013).
- [12] S. J. Peale, *The gravitational fields of the major planets*, *Space Science Reviews* **14**(3–4), 412 (1973).
- [13] C. F. Yoder, *Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System*, in *Global Earth Physics: A Handbook of Physical Constants, volume 1* (American Geophysical Union, 1995), 1–31.
- [14] B. Wang et al., *The Neptunian gravity estimated from the motion of Triton based on astrometric observations*, *Astronomy and Astrophysics* **671**, A70 (2023).
- [15] B. A. Neuenschwander e R. Helled, *Empirical Structure Models of Uranus and Neptune*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **512**(3), 3124 (2022). [ArXiv:2203.02233](#).
- [16] L. Iess et al., *Measurement and implications of Saturn's gravity field and ring mass*, *Science* **364**, eaat2965 (2019).
- [17] D. Kong, K. Zhang e G. Schubert, *On the interpretation of the equatorially antisymmetric Jovian gravitational field*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2017).
- [18] J. A. F. Pacheco, *Vida no universo* (Edusp, São Paulo, 2020), ver capítulo 2 - Formação do Sistema Solar, p. 55.
- [19] M. Marder e J. Fineberg, *How Things Break*, *Physics Today* **49**(9), 24 (1996).
- [20] I. de Pater e J. J. Lissauer, *Planetary Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010), second ed.
- [21] S. Vincent e J. A. de Freitas Pacheco, *Axisymmetric Oscillations of Rotating Neutron Stars: Gravitational Wave Emission*, in *Pulsar Astronomy: Unrevealing Compact Stars with China's New Facilities*, editado por J. H. Z. Gao, R. Xu e C. Vasconcellos (World Scientific, Singapore, 2024).