

Um pioneiro esquecido: Guido Beck e a previsão da existência de ondas gravitacionais

Alexandre Sampaio da Cruz¹, Rafael Velloso² e Antonio Augusto Passos Videira^{1,2}

¹*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas*

²*Universidade do Estado do Rio de Janeiro*

Resumo

Em 1925, o jovem físico austríaco Guido Beck obteve a primeira solução exata das equações da relatividade geral que expressa o fenômeno de transporte de energia por ondas gravitacionais. Apesar de sua relevância e caráter pioneiro, o trabalho de Beck permaneceu desconhecido da comunidade dos físicos por décadas. Trazemos aqui uma tradução para o português do artigo original, publicado em alemão, no qual Beck apresenta esse resultado, além de uma contextualização dos anos iniciais de sua carreira, quando trabalhou na área de relatividade geral.

Abstract

In 1925, the young Austrian physicist Guido Beck obtained the first exact solution to the equations of general relativity that exhibits the phenomenon of energy transport via gravitational waves. Despite its relevance and pioneering character, Beck's work remained unknown to the physics community for decades. Here we present a translation into Portuguese of the original article, written in German, in which Beck presents these results, along with an overview of the early years of his career, when he worked in the field of general relativity.

Palavras-chave: Guido Beck; ondas gravitacionais; relatividade geral.

Keywords: Guido Beck; gravitational waves; general relativity.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v6n2.49164](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v6n2.49164)

1 Introdução

No dia 11 de julho de 1925, a revista alemã *Zeitschrift für Physik* recebia a submissão de um artigo [1] escrito por um jovem doutor em física, Guido Beck (1903-1988), contendo um resultado importante, mas que, na época, foi completamente ignorado. Em breves palavras, o resultado apresentado por Beck dizia respeito à existência de ondas gravitacionais. Sua solução foi obtida no quadro da teoria da relatividade geral, formulada por Albert Einstein dez anos antes. Deve ser também observado que o próprio Einstein já havia em ao menos dois artigos, publicados na década de 1910, tratado do mesmo problema. Igualmente digno de nota é que este assunto, ao qual o físico de origem alemã retornaria em meados dos anos 1930, pode ser considerado como um tema pelo qual Einstein nutria sentimentos ambivalentes. No entanto, arriscamo-nos a dizer que ele preferia defender a não existência desse fenô-

meno. Como é bem conhecido, a existência das ondas gravitacionais foi comprovada em meados dos anos 2010 e é vista, pelos especialistas, como uma prova incontestável da correção da teoria da relatividade geral, merecedora, inclusive, de ser recompensada com o prêmio Nobel de Física para 2017. Nem sempre o criador compreende bem a sua própria criação.

O resultado apresentado por Beck havia sido formulado primeiramente em sua tese de doutorado, defendida no Instituto de Física Teórica da Universidade de Viena dois meses antes, em 04 de maio, e tinha sido avaliado como sendo de excelente qualidade. O supervisor de Beck foi o catedrático de física teórica e conhecido especialista em teoria da relatividade, Hans Thirring (1888-1976). Animado com a avaliação da sua banca, Beck encaminhou primeiramente o seu artigo para a prestigiosa revista, também ela alemã, *Annalen der Physik*, cujo diretor era então o prê-

mio Nobel de Física para o ano de 1911, Wilhelm Wien (1864-1928). Wien era, então, um dos mais importantes físicos experimentais em atividade. A recepção do artigo por Wien foi direta e sem possibilidade de apelação. Ele recusou o trabalho de Beck, alegando que o seu tema não era apropriado para a revista pela qual ele era responsável.

Mostrando confiança naquilo que havia feito, Beck não titubeou e submeteu o artigo para a *Zeitschrift für Physik*, criada havia não muito tempo e justamente para “driblar” os preconceitos científicos de Wien. Desta vez, Beck teve mais sorte, ao menos no que diz respeito à publicação. Outra foi, contudo, a recepção dada ao seu artigo. Este permaneceu ignorado por décadas até que um historiador da ciência norte-americano (Daniel Kennefick), motivado por um “entreviro” entre Einstein e o editor da *Physical Review*, isto já na década de 1930, redescobriu o trabalho de Beck.

Nesta nota introdutória, o nosso objetivo não é tentar explicar o porquê do artigo de Beck ter permanecido desconhecido. Talvez isso não possa ser explicado. O próprio Beck parece não ter se interessado em divulgar o seu resultado. Menos de dois anos depois de ter publicado o artigo, ele já tinha deixado de trabalhar em relatividade geral. Suas contribuições a essa área são escassas. Além do artigo de 1925, cuja tradução — esta, sim, o objetivo da presente nota — em português acontece agora pela primeira vez, ele publicou um breve texto em francês durante o período em que trabalhou por um semestre na Universidade de Berna em 1926: *La propagation des ondes électromagnétiques dans la théorie de la relativité générale* (*Archives des sciences physiques et naturelles*, (5), volume 8, p. 75-77) e, quatro mais tarde (1929), um capítulo no volume 4 do *Handbuch der Physik: Allgemeine Relativitätstheorie*, p. 299-407. O convite para escrever esse capítulo partiu do seu antigo orientador, que foi o editor deste volume. A partir de 1927, Beck passou para a ainda mais nova área da física: mecânica quântica. Em particular, ele se interessou em aplicar esse domínio a fenômenos que aconteciam no núcleo atômico. Em outras palavras, o físico austríaco foi um dos primeiros a tentar construir uma física nuclear.

Esta nota está dividida em quatro partes, incluindo esta introdução. Na segunda parte, des-

crevemos quem era Beck na segunda metade da década de 1920, época em que trabalhou em relatividade geral. Na terceira parte, abordamos os resultados que aí obteve. Nossos comentários são baseados em dois artigos: Havas (1995) [2] e Eisenstaedt (1995) [3], textos que comentam com propriedade as suas contribuições naquela que já foi considerada como a maior catedral científica construída por um ser humano [4]. Na quarta e última parte, dedicada à conclusão, arriscamos a fornecer algumas razões que tornam interessante a leitura deste artigo.

Uma última observação. A tradução, de nossa autoria, procurou respeitar o estilo e a organização dados pelo próprio Beck ao seu texto. Assim, não devem estranhar os leitores algumas expressões que ele empregou para expressar as suas ideias. Mesmo a sua notação não é exatamente a mesma dos nossos dias.

2 Guido Beck em 1925

Nascido em 29 de outubro de 1903, no antigo Império Austro-Húngaro, em uma cidade localizada na região da Boêmia e então chamada de Reichenberg (hoje Liberec, atual República Tcheca), Beck viveu os primeiros quatro anos de sua vida em sua cidade natal para, então, em 1908, mudar-se para Zurique (Suíça), em razão do trabalho de seu pai, Josef Beck. Beck filho, pai e sua mãe, Lucy (Sommernitz em solteira) permaneceram na Suíça até o fim da Primeira Guerra Mundial.

A descoberta das áreas às quais, futuramente, Beck dedicaria sua vida profissional, a saber, física e matemática, ocorreu durante sua adolescência, aos 13 anos, através de uma enciclopédia de seu pai, *Meyers Konversationslexikon*. A leitura da enciclopédia de seu pai permitiu a Beck ter acesso à trigonometria e a um verbete sobre a lei da queda livre dos corpos, desenvolvida por Galileu. Estas “descobertas” despertaram o interesse do jovem por física e matemática.

Outra obra que, de acordo com o próprio Beck [5], aprofundou seu interesse por física, foi o livro escrito por Einstein e publicado em 1916, cujo objetivo era descrever as novas ideias da relatividade geral e restrita, mas de forma que fosse compreensível para um público leigo, *Über die spezi-*

elle und die allgemeine Relativitätstheorie (Sobre a teoria da relatividade geral e restrita). Era à leitura deste livro que Beck atribuía o seu despertar para a relatividade e a consolidação daquela que seria sua companheira por toda a vida, a física. Tal interesse pode ser percebido, por exemplo, pelas palestras proferidas sobre relatividade, para um público leigo, pelo jovem estudante, enquanto ainda residia na Suíça. Ao que tudo indica, tais palestras ocorreram ao longo de 1919, quando Beck possuía cerca de 16 anos. Foi também em 1919 que o nome de Einstein passa a ser conhecido pelo público mais amplo, em razão da confirmação empírica da relatividade geral, em ocasião da observação do eclipse solar ocorrido neste mesmo ano [6]. Seus interesses o levaram, portanto, a ingressar no curso de física na Universidade de Viena, em 1921.

Enquanto estudante de física na Universidade de Viena, Beck pôde escolher cursos que correspondiam a seus interesses, pois o sistema universitário austríaco era bastante livre e não havia uma estrutura de disciplinas obrigatórias e pré-requisitos. Logo, os cursos acompanhados por Beck foram, basicamente, aqueles proferidos por Thirring, então catedrático de física teórica e especialista em relatividade. Dentre as disciplinas, Beck acompanhou um curso completo de física teórica, que abordava mecânica, termodinâmica e ótica, até chegar à física moderna, que se resumia, essencialmente, à relatividade mais fragmentos de mecânica quântica. Fragmentos, pois na primeira metade da década de 1920 o que hoje conhecemos como teoria quântica ainda não estava “terminada” e, além disto, este domínio da física encontrava-se imerso em polêmicas. Apesar de Thirring ter sido um nome apto para o ensino de mecânica quântica,¹ a Universidade de Viena ficou acéfala no que diz respeito ao ensino deste conteúdo até 1959, em virtude da recusa dos físi-

cos vienenses em aceitar os resultados desta nova física, considerados precários e repletos de lacunas, no que diz respeito ao seu conteúdo teórico-conceitual [9,10]. Ademais, recorrentes crises afetavam o cotidiano da Universidade de Viena; crises estas inicialmente causadas pelo desmantelamento do Império Austro-Húngaro e, posteriormente, pela anexação da Áustria pela Alemanha nazista e pela 2^a Guerra Mundial.

Com todas as dificuldades que afetavam o ensino e a pesquisa em mecânica quântica austríaca, parece-nos razoável que, ao menos até 1925, Beck seguisse uma carreira em relatividade. Afinal, além de estabelecidas e confirmadas empiricamente, as ideias de Einstein foram bem recebidas entre os físicos vienenses; não apenas pelos seus resultados, mas, principalmente, pela sua estrutura teórico-filosófica. Mesmo nos momentos em que as ideias de Einstein encontravam resistência dentre seus homólogos alemães, os austríacos não hesitavam e defendiam, publicamente, Einstein, a relatividade e suas implicações físico-filosóficas [11–13].

Como afirmado anteriormente, além deste artigo aqui traduzido, Beck possui apenas mais duas publicações em relatividade: *La propagation des ondes électromagnétiques dans la théorie de la relativité générale* (1926) e um capítulo no *Handbuch der Physik: Allgemeine Relativitätstheorie* (1929).

Pode-se questionar o porquê dessa mudança (da relatividade para a teoria quântica), diante da precária situação da pesquisa em física quântica no contexto austríaco. É verdade que Beck deixou Viena em 1926 a fim de se tornar assistente na Universidade de Berna (Suíça), retornando em 1927, para, um ano depois, mudar-se novamente, desta vez para trabalhar como assistente de Heisenberg, na Universidade de Leipzig (Alemanha), onde ficou até 1932. Além disto, já em 1925 a mecânica quântica parecia ser uma área promissora, vide seus bons resultados e aplicações, atraindo cada vez mais jovens pesquisadores [14]. Portanto, de uma perspectiva de um físico recém-formado, que almejava estabelecer-se profissionalmente, essa mudança de área era compreensível [5].

¹Thirring publica em 1928 um livro que, de acordo com o próprio catedrático, é um dos primeiros a estruturar os desenvolvimentos da época sobre mecânica quântica. Seu livro, *Die Grundgedanken der neueren Quantentheorie* [7] (As ideias fundamentais da nova Teoria Quântica), dedica-se a abordar desde o eletromagnetismo clássico e suas intersecções com a mecânica quântica até a equação de onda, proposta por Erwin Schrödinger, e o Princípio de Incerteza, proposto por Werner Heisenberg. Para mais informações sobre Thirring e a mecânica quântica, cf. Videira e Velloso (2025) [8].

3 As contribuições de Beck à teoria da relatividade geral

Na época em que Beck publicou o trabalho aqui traduzido, o fenômeno da radiação gravitacional já era, em grande parte, aceito pela comunidade de físicos, embora ainda carecesse de qualquer evidência experimental. Tal aceitação se devia, em parte, à tentadora analogia com a bem estabelecida teoria eletromagnética. De fato, os resultados obtidos por Einstein em seus trabalhos de 1916 e 1918 [15, 16], por meio da versão linearizada das equações de campo da relatividade geral, incentivaram essa analogia. No entanto, existiam preocupações legítimas quanto ao papel dos termos não lineares das equações completas de Einstein na propagação de tais ondas. Tornava-se, então, de grande interesse a obtenção de soluções exatas das equações da relatividade geral que representassem a propagação de ondas gravitacionais. Curiosamente, a busca por tais soluções levaria o próprio Einstein, em colaboração com Nathan Rosen, a rejeitar — equivocadamente — a existência de ondas gravitacionais em um artigo submetido à *Physical Review* na década de 1930.² O que Einstein e Rosen não sabiam é que uma solução desse tipo já havia sido obtida por Guido Beck, em 1925.

Em seu trabalho, Beck parte da solução axissimétrica estática obtida por Hermann Weyl (1917) [18] e aplica uma transformação complexa de coordenadas, obtendo assim uma nova solução que depende explicitamente do tempo e de uma coordenada espacial. Segundo Eisenstaedt [3], essa teria sido a primeira vez que essa técnica foi empregada no contexto da teoria da relatividade geral. A solução obtida por Beck é notável por ser a primeira solução exata, dependente do tempo e de caráter não cosmológico³ das equações da relatividade geral. Ironicamente, Einstein e Rosen redescobriram a mesma solução de maneira independente em 1937 [19], um ano após terem

²Os autores — em particular, Einstein — desistiram da publicação do artigo na *Physical Review* após a insatisfação de Einstein com o envio do artigo para revisão por um parecerista anônimo. Esse episódio é detalhado em Kennefick (2005) [17].

³As soluções não estáticas conhecidas até então eram as de Einstein, de Sitter e Friedmann (embora esta tenha sido ignorada na época). Todas elas partem da hipótese de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, o que simplifica consideravelmente as equações de campo.

argumentado contra a existência das ondas gravitacionais e doze anos após a publicação do artigo de Beck.

A partir da solução obtida para a métrica, Beck constrói o pseudo-tensor de energia e mostra que o transporte de momento-energia por meio de ondas gravitacionais está presente em sua solução. Assim como havia feito Einstein nos trabalhos da década de 1910, Beck identifica também ondas espúrias, que não transportam energia e que podem ser removidas por transformações de coordenadas. A principal diferença qualitativa é que Beck obtém esses resultados a partir de uma solução das equações completas da relatividade geral, e não de sua versão linearizada. Além disso, as ondas obtidas por Beck são de natureza cilíndrica, em contraste com as ondas planas encontradas por Einstein em primeira aproximação.

Na parte final do artigo, Beck utiliza uma aproximação de primeira ordem para campos fracos para calcular as forças de arraste gravitacional exercidas sobre uma massa puntiforme na vizinhança de uma distribuição axial de massas em rotação. O resultado obtido constitui uma generalização dos trabalhos de 1918 de Thirring [20] e de Lense e Thirring [21], nos quais a simetria axial explorada decorre da rotação de uma distribuição esfericamente simétrica de massa. À luz desse resultado, Beck dedica a última seção do artigo a uma discussão sobre o princípio de Mach⁴ e conclui que as equações obtidas não implicam a validade ou a violação desse princípio.

Dos três trabalhos produzidos por Beck na área da relatividade geral, o artigo aqui traduzido é — ou seria, não fosse seu esquecimento — o de maior relevância do ponto de vista científico. No entanto, pode-se afirmar que a contribuição ao *Handbuch der Physik* foi de maior importância para a trajetória profissional de Beck, uma vez que tornou seu nome universalmente conhecido entre a comunidade de físicos da época [2]. Entre essas duas produções, houve ainda a publicação do já mencionado artigo *La propagation des ondes électromagnétiques dans la théorie de la relativité*

⁴O princípio de Mach, creditado ao físico e filósofo austríaco Ernst Mach, pode ser resumido na proposição de que a inércia de um dado corpo decorre de sua esparsa interação gravitacional com toda a matéria restante do universo. Esse princípio foi de grande influência para Einstein na elaboração da teoria da Relatividade Geral.

générale, no qual é apresentada uma sucinta demonstração de um resultado já obtido por M. von Laue: ondas eletromagnéticas se propagam sobre o cone de luz — isto é, com velocidade igual à velocidade da luz no vácuo — desde que a intensidade do campo eletromagnético seja tomada como insuficiente para modificar sensivelmente o campo gravitacional. Esse trabalho, contudo, não apresenta um resultado original. O seu conteúdo mostra, uma vez mais, um domínio preciso e correto das complicadas equações da relatividade geral, o mesmo ocorrendo nas suas partes conceituais sutis.

4 Conclusão

A nossa “recuperação” do artigo de 1925 de Beck não deve ser entendida como se procurássemos “fazer justiça” a um físico “injustamente” esquecido ou “insuficientemente” reconhecido. “Reparações” históricas não fazem sentido em história da ciência. O passado não pode ser corrigido, mas o presente, este sim, pode ser influenciado pela nossa compreensão daquilo que ocorreu em outros tempos. A ausência de Beck nos anais da história da teoria da relatividade geral torna-se explicável através da dinâmica da prática científica, a qual assemelha-se mais ao cotidiano “ordinário” da maioria dos seres humanos do que comumente se imagina.

A longa trajetória acadêmica do físico austríaco, só terminada com a sua morte em outubro de 1988, sugere que ele nunca se interessou por prêmios ou honrarias. Ao publicar os seus primeiros resultados científicos, Beck mostrava para si, e para os seus pares, que ele era bem formado, trabalhava duro e obtinha resultados interessantes, dignos de circularem nas revistas mais importantes. Naquele ano de 1925, era isso fundamentalmente o que importava, afinal Beck era “apenas” um recém-doutor em busca de um emprego em uma Europa Central dividida e empobrecida.

Beck, ao que consta, nunca reclamou para si a prioridade na descoberta das ondas gravitacionais. Não era esse o tipo de valor que o motivava na prática da ciência. Sua personalidade científica é mais bem delineada caso se tenha em mente a figura do(a) cientista movido(a) pela curiosidade, pela vontade de conhecer um pouco me-

lhor a natureza. Nisto, Beck emulava o comportamento daquele que o “seduziu” para a física e, de certo modo, foi a sua mais importante referência científica, o próprio Einstein.

Agradecimentos

Rafael Velloso agradece a bolsa de doutorado concedida pela CAPES (nº 88887.621975/2021-00). Antonio A. P. Videira é grato à bolsa de produtividade do CNPq (nº 303.597/2022-5) e ao apoio financeiro da UERJ (Prociência).

Sobre os tradutores

Alexandre Cruz (scalexandre@proton.me) é bacharel em física e astronomia pela Universidade Federal do Rio de Janeiro e mestre em física pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Rafael Velloso ([veloso.rafa@gmail.com](mailto:velloso.rafa@gmail.com)) é licenciado em física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro e doutor em filosofia pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Antonio Augusto Passos Videira (guto@cbrpf.br) é professor do departamento de filosofia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro e pesquisador colaborador do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Referências

- [1] G. Beck, *Zur Theorie Binärer Gravitationsfelder*, *Zeitschrift für Physik* **33**(1), 713 (1925).
- [2] P. Havas, *The Life and Work of Guido Beck: The European Years: 1903-1943*, in *Guido Beck Symposium, Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol. 67, Suplemento 1, editado por H. M. Nussenzveig e A. A. P. Videira (1995), 11–35.
- [3] J. Eisenstaedt, *Guido Beck in General Relativity*, in *Guido Beck Symposium, Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol. 67, Suplemento 1, editado por H. M. Nussenzveig e A. A. P. Videira (1995), 49–65.

- [4] A. L. Leite Videira, *Um dos maiores – Se não mesmo o maior dos feitos na história do pensamento humano*, Monografia, CBPF 2(1), 1 (2016). Disponível em <https://revistas.cbpf.br/index.php/M0/issue/view/63>, acesso em ago. 2025.
- [5] A. A. P. Videira e R. Velloso, *Formalismo Matemático e Representação Física* (São Paulo, Associação Filosófica Scientiae Studia, 2022).
- [6] A. A. P. Videira, *Henrique Morize e o eclipse solar total de maio de 1919*, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **41**(1) (2019).
- [7] H. Thirring, *Die Grundgedanken der neueren Quantentheorie. In: Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften.* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1928).
- [8] A. A. P. Videira e R. Velloso, *Nem Heisenberg, nem Schrödinger: o enigma quântico ainda não encontrou a sua solução - o exemplo de Hans Thirring*, *Revista Ciência & Cultura* **77**(2), 21 (2025), acesso em 04/07/2025.
- [9] F. Del Santo e E. Schwarzhans, “Philosophy-ics” at the University of Vienna: The (Pre-) History of Foundations of Quantum Physics in the Viennese Cultural Context, *Physics in Perspective* **24**(2-3), 125–153 (2022).
- [10] W. Thirring, *The Joy of Discovery: Great Encounters Along the Way.* (Nova Jersey, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011).
- [11] P. Frank, *Between Physics and Philosophy* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1941).
- [12] E. Schrödinger, *Science And The Human Temperament.* (Londres, George Allen & Unwin ltd, 1935).
- [13] M. Stöltzner, *Causality, realism and the two strands of Boltzmann’s legacy (1896 - 1936)*, Tese de Doutorado, Universidade de Bielefeld (2003). Disponível em <https://d-nb.info/975327844/34>, acesso em ago. 2025.
- [14] A. Kojevnikov, *The Copenhagen Network: The Birth of Quantum Mechanics from a Postdoctoral Perspective* (Cham, Springer, 2020).
- [15] A. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 688–696 (1916).
- [16] A. Einstein, *Über Gravitationswellen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 154–167 (1918).
- [17] D. Kennefick, *Einstein Versus the Physical Review*, *Physics Today* **58**(9), 43 (2005).
- [18] H. Weyl, *Zur Gravitationstheorie*, *Annalen der Physik* **359**(18), 117 (1917).
- [19] A. Einstein e N. Rosen, *On gravitational waves*, *Journal of the Franklin Institute* **223**(1), 43 (1937).
- [20] H. Thirring, *Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie.*, *Physikalische Zeitschrift* **19**, 33 (1918).
- [21] J. Lense e H. Thirring, *Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*, *Physikalische Zeitschrift* **19**, 156 (1918).

Sobre a Teoria dos Campos Gravitacionais Binários

Por Guido Beck em Viena. (Recebido em 11 de julho de 1925.)

A seguir, serão discutidos alguns casos específicos com base na teoria dos campos gravitacionais axissimétricos desenvolvida por Weyl¹ e Levi-Civita.²

§1 O CAMPO AXISSIMÉTRICO INDEPENDENTE DO TEMPO

A exigência de que o campo seja independente do tempo significa, em primeiro lugar, que podemos introduzir um sistema de coordenadas de tal forma que todas as componentes do tensor fundamental sejam independentes da coordenada temporal. Com isso, o sistema de coordenadas está determinado, exceto por transformações das coordenadas espaciais e por possíveis movimentos estacionários. A condição de simetria exige ainda que exista uma coordenada de rotação distinta x_3 , da qual os g_{ik} também não devem depender, dada uma escolha adequada das coordenadas. Além disso, pode-se mostrar que, em virtude da condição de simetria, deve valer: $g_{13} = g_{23} = 0$. Consideremos, por exemplo, a superfície $t = \text{const.}$, $x_1 = \text{const.}$, onde t é a variável temporal e x_1 uma das duas coordenadas espaciais ainda arbitrárias. Nesta superfície, também deve prevalecer a simetria rotacional; seu elemento de linha deve surgir do elemento de linha euclidiano em coordenadas polares por uma “distorção” do raio e, portanto, deve ter a forma: $adx_2^2 + bdx_3^2$, de onde se conclui que $g_{23} = 0$. Analogamente, obtém-se $g_{13} = 0$. Nosso elemento de linha tem, portanto, a forma:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dx_1dt + 2g_{02}dx_2dt + 2g_{03}dx_3dt + g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2.$$

Como os g_{ik} dependem apenas de x_1 e x_2 , ainda é possível, por meio de uma transformação no plano coordenado (x_1x_2) , alcançar que g_{12} também desapareça e que $g_{11} = g_{22} = \gamma$. Em um campo axissimétrico independente do tempo, pode-se sempre indicar um sistema de coordenadas no qual o elemento de linha assume a forma (1):

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dx_1dt + 2g_{02}dx_2dt + 2g_{03}dx_3dt + \gamma(dx_1^2 + dx_2^2) + g_{33}dx_3^2, \quad (1)$$

onde todos os g_{ik} ³ são funções apenas de x_1 e x_2 .

Um campo desse tipo será realizado quando a disposição das massas geradoras do campo também for independente do tempo e axissimétrica. Nesse caso, o tensor de matéria deverá satisfazer certas condições, que serão examinadas mais detalhadamente a seguir. Para esse fim, partimos das equações de campo de Einstein para a gravitação:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = T_{ik}. \quad (2)$$

Pode-se perceber, em primeiro lugar, que as componentes do tensor de matéria T_{ik} em nosso sistema de coordenadas podem depender apenas de x_1 e x_2 , uma vez que os lados esquerdos de (2) também dependem apenas dessas variáveis. Além disso, vemos que teremos que distinguir dois casos:

A) *O caso estático.* Este é caracterizado pelo fato de que o fluxo de massa ou energia desaparece. Isso se expressa na relação:

$$T_{01} = T_{02} = T_{03} = T_0^1 = T_0^2 = T_0^3 = 0. \quad (3)$$

¹H. Weyl, Zur Gravitationstheorie. Ann. d. Phys. 54, 117, 1917. Comentários sobre em Ann. d. Phys. 59, 185, 1919.

²Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. VIII. Rendace. dei Lincei 28 [1], 3, 1919.

³[N. d. T.] incluindo γ .

Agora, vale: $T_{01} = g_{ik}T_0^k = g_{10}T_0^0 = 0$.⁴ Como T_0^0 não deve desaparecer, deve valer $g_{10} = 0$ e, analogamente, $g_{20} = g_{30} = 0$. Disso seguem, levando em conta (3), as relações adicionais:

$$T_1^0 = T_2^0 = T_3^0 = T^{01} = T^{02} = T^{03} = 0.$$

$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ é, portanto, uma condição necessária para o caso estático. Ao inserir essa condição em (2), reconhece-se que ela também é suficiente para a validade de (3).

No caso estático, nosso elemento de linha (1) assume a forma:⁵

$$ds^2 = fdt^2 - h(dx_1^2 + dx_2^2) - ldx_3^2, \quad (4)$$

como usado por Weyl.⁶

B) O caso estacionário. No caso estacionário, a relação (3) não é satisfeita. Portanto, conforme mencionado acima, g_{01} , g_{02} , g_{03} também não devem desaparecer simultaneamente em todos os lugares; o elemento de linha possui a forma mais geral (1)⁷.

Essa distinção vale inicialmente apenas no interior da matéria, pois assumimos que T_0^0 não desaparece. No entanto, como os g_{ik} devem atravessar continuamente o limite da matéria, essa distinção geralmente mantém sua validade também no vácuo.

Agora, com base em (4), as equações de campo para o caso estático serão explicitamente estabelecidas. Os cálculos fornecem:

$$\left. \begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2h} \left\{ \Delta^2 f - \left[f, \ln \sqrt{\frac{f}{l}} \right] \right\}, \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} \Delta^2 \ln h - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{fl}}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial x_1} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial x_1} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial x_2} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x_2}, \\ R_{22} &= -\frac{1}{2} \Delta^2 \ln h - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{fl}}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial x_2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial x_1} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial x_2} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x_2}, \\ R_{33} &= -\frac{1}{2h} \left\{ \Delta^2 l + \left[l, \ln \sqrt{\frac{f}{l}} \right] \right\}, \\ R_{12} &= -\frac{\partial^2 \ln \sqrt{fl}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x_1} \frac{\partial \ln h}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x_2} \frac{\partial \ln h}{\partial x_1} \\ &\quad - \frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial x_1} \frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial x_2} - \frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial x_1} \frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial x_2}, \\ R_{01} &= R_{02} = R_{03} = R_{13} = R_{23} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Os dois símbolos a seguir são usados para abreviações:

$$\Delta^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \quad [\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_2}.$$

⁴[N. d. T.] Aqui entendemos que há um pequeno erro de digitação na primeira igualdade: g_{ik} deveria ser g_{1k} .

⁵[N. d. T.] f , h e l são funções de x_1 e x_2 .

⁶H. Weyl, l.c. [N. d. T.] Aqui e nas notas de rodapé seguintes, l.c. é *loco citato*, que indica referência à obra já citada do autor.

⁷Nós aqui calculamos aqueles casos que ainda não foram examinados em detalhes, nos quais $T_0^1 = T_0^2 = T_0^3 = 0$, T_{01} , T_{02} , $T_{03} \neq 0$ e T_{01} , T_{02} , $T_{03} = 0$, T_0^1 , T_0^2 , $T_0^3 \neq 0$ como casos estacionários, ainda que o primeiro deva ser descrito como estático.

Agora é necessário investigar sob quais condições as equações (2), levando em conta (5), são integráveis. No caso do espaço sem matéria, a formulação das condições de integrabilidade torna-se desnecessária, pois para $T_{ik}=0$ sempre é possível apresentar uma solução (a saber, a solução trivial $g_{ik} = \text{const}$). Por outro lado, no caso do espaço preenchido por matéria, as condições de integrabilidade geralmente impõem⁸ certas restrições aos T_{ik} . Como este estudo focará principalmente no espaço sem matéria, não examinaremos aqui em detalhe as mencionadas condições de integrabilidade. Limitamo-nos a constatar que, no caso estático, as relações $T_{01} = T_{02} = T_{03} = T_{13} = T_{23} = 0$ devem sempre ser válidas, como demonstra uma comparação entre (2) e (5).

Para integrar as equações de campo no espaço vazio, introduzimos uma especialização adicional das coordenadas, originária de Weyl.⁹ De fato, pode-se facilmente verificar a seguinte relação:

$$\Delta^2 \sqrt{fl} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{f}} \left\{ \Delta^2 f - \left[f, \ln \sqrt{\frac{l}{f}} \right] \right\} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{l}} \left\{ \Delta^2 l + \left[l, \ln \sqrt{\frac{l}{f}} \right] \right\} \quad (6)$$

Quando a expressão (6) se anula, $\sqrt{fl}$ torna-se uma função potencial. No vácuo (espaço sem matéria), esta condição é sempre satisfeita, pois — como demonstra uma análise da equação (5) — os termos entre chaves coincidem com R_{00} e R_{33} , a menos de fatores não nulos. A expressão (6) também se anula para certas distribuições de massa específicas, conforme detalhado nos estudos de Weyl. A partir da relação $\Delta^2 \sqrt{fl} = 0$, podemos introduzir novas coordenadas $r = \sqrt{fl}$ e z em substituição a x_1 e x_2 , levando o elemento de linha à seguinte forma:¹⁰

$$ds^2 = f dt^2 - h (dr^2 + dz^2) - \frac{r^2}{f} d\vartheta^2 \quad (\vartheta = x_3) \quad (7)$$

e as equações (5) mudam para:

$$\left. \begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2h} \left\{ \Delta^2 f - \left[f, \ln \frac{f}{r} \right] \right\}, \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} \Delta^2 \ln h + \frac{1}{r} \frac{\partial \ln f}{\partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial \ln h}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial r} \right)^2, \\ R_{22} &= -\frac{1}{2} \Delta^2 \ln h - \frac{1}{2r} \frac{\partial \ln h}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z} \right)^2, \\ R_{33} &= \frac{r^2}{f^2} \frac{1}{2h} \left\{ \Delta^2 f - \left[f, \ln \frac{f}{r} \right] \right\}, \\ R_{12} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial \ln h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln f}{\partial r} \frac{\partial \ln f}{\partial z} + \frac{1}{2r} \frac{\partial \ln f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Os símbolos agora significam:

$$\Delta^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}; \quad [\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

Deve-se notar, no entanto, que tal especialidade do sistema de coordenadas só é possível no vácuo e, em casos especiais, em espaços cheios de matéria; em geral, será necessário partir do elemento de linha (4).

⁸Essas restrições têm significado físico; elas representam as condições que as tensões devem satisfazer para que a distribuição de massa em questão seja estável.

⁹H. Weyl, l.c.

¹⁰É fácil verificar que existem certas transformações que preservam invariante a forma (4) do elemento de linha. Isto ocorre precisamente quando as novas variáveis y_1, y_2 são funções potenciais conjugadas de x_1, x_2 (mapeamento conforme!). Quando (6) se anula, podemos definir $r = \sqrt{fl}$ sem alterar a forma do elemento de linha, desde que adotemos z como a função potencial conjugada de r .

No espaço sem matéria, todas as expressões em (8) devem necessariamente anular-se. Ao introduzirmos as novas variáveis $\psi = \ln \sqrt{fl}$ e $\gamma = \ln \sqrt{hf}$, obtemos a partir de (8) as seguintes relações, que se mostram facilmente integráveis:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial r} &= r \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} &= 2r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right).$$

Estas equações foram originalmente estabelecidas por Levi-Civita.¹¹ Suas integrais representam a solução geral para campos axissimétricos estáticos no vácuo. Aqui, ψ corresponde a uma função potencial axissimétrica, enquanto γ pode ser obtido através de quadraturas simples. Para demonstrar esse procedimento, focaremos no caso particular de campos com simetria cilíndrica. Neste contexto, impomos a condição de que todas as derivadas em relação a z nas equações (9) se anulem. Este tratamento matemático leva aos seguintes resultados:

$$ds^2 = Ar^{2\alpha} dt^2 - Br^{2\alpha(\alpha-1)}(dr^2 + dz^2) - \frac{r^{2(1-\alpha)}}{A} d\vartheta^2.$$

As constantes A e B são obviamente sem importância, de modo que podemos supor que sejam iguais a um. O elemento de linha então assume a forma:

$$ds^2 = r^{2\alpha} dt^2 - r^{2\alpha(\alpha-1)}(dr^2 + dz^2) - r^{2(1-\alpha)} d\vartheta^2. \quad (10)$$

A expressão (10) só é regular no eixo $r = 0$ quando $\alpha = 0$, reduzindo-se neste caso ao elemento de linha euclidiano. Disto concluímos que no interior de um cilindro oco infinitamente longo, a geometria euclidiana é rigorosamente válida. As soluções com $\alpha \neq 0$ correspondem a casos onde o eixo possui distribuição de massa, sendo o parâmetro arbitrário α — analogamente à solução de Schwarzschild — interpretável como função da densidade de massa.

Vale mencionar ainda que, em primeira aproximação (isto é, quando o elemento de linha (7) difere minimamente do euclidiano $f - 1, h - 1 \ll 1$), as equações (9) descrevem um campo de força próximo ao eixo de simetria de distribuições de massa axissimétricas cilíndricas, o qual corresponde essencialmente a um campo centrífugo. Importante notar que, no caso estático aqui considerado, não surgem forças de Coriolis. Contudo, não nos deteremos neste aspecto no momento, pois ele será tratado com maior profundidade adiante (§3), em nossa discussão sobre o caso estacionário.

No caso estacionário, a formulação das equações de campo (2) não é tão simples quanto no caso estático anterior, pois aqui temos três funções adicionais a determinar g_{01}, g_{02}, g_{03} . Uma análise simples mostra que, em geral, nenhuma das dez grandezas R_{ik} se anula identicamente, de modo que, pelas equações de campo (2), todas as componentes T_{ik} podem ser diferentes de zero. Portanto, para investigar o estado da matéria no caso axissimétrico estacionário de forma geral, será necessário, como já destacado anteriormente, impor as condições de integrabilidade das equações de campo.

No próximo parágrafo, apresentaremos algumas aplicações das equações obtidas até agora a campos variáveis no tempo, antes de nos voltarmos para o estudo do caso estacionário.

¹¹Levi-Civita, l. c.

§2 CAMPOS QUE VARIAM NO TEMPO.

Partimos do elemento de linha na forma (4). Como vimos, sob a suposição de que f , h e l são funções apenas de x_1 e x_2 , as relações (5) valem, independentemente de considerarmos x_3 como uma “coordenada de rotação” ou não. Agora realizamos a transformação:

$$\bar{t} = ix_2, \quad x = x_1, \quad y = it, \quad z = x_3,$$

então, escrevendo $\bar{t}$ novamente como t , o elemento de linha assume a forma:¹²

$$ds_2 = h(dt^2 - dx^2) - fdy^2 - ldz^2, \quad (11)$$

onde agora os coeficientes em (11) dependem apenas de t e x . Para obter os R_{ik} para este caso, devemos transformar as grandezas dadas em (5) de acordo com as fórmulas de transformação conhecidas para tensores e substituir as variáveis antigas pelas novas. Dessa forma, certamente não obtemos o campo geral que depende do tempo e de uma coordenada espacial (nesse caso, seria necessário supor que todos os g_{ik} são diferentes de zero), mas não há restrição em assumir $g_{00} = -g_{11}$; se isso não fosse o caso, sempre poderíamos alcançar essa forma por meio de uma simples transformação real de coordenadas. Limitamo-nos aqui essencialmente ao espaço sem matéria, $R_{ik}=0$, e escrevemos as equações diferenciais que seguem de (5) da maneira indicada acima, utilizando ao mesmo tempo o fato de que a expressão (6) desaparece no espaço vazio. Obtemos assim:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sqrt{fl}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sqrt{fl}}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \ln \sqrt{\frac{f}{l}}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \ln \sqrt{\frac{f}{l}}}{\partial t}, \\ & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \ln h}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{fl}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial x} \right)^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial t} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial t} = 0, \\ & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \ln h}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 \ln \sqrt{fl}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial t} \right)^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln h}{\partial t} \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial t} = 0, \\ & -\frac{\partial^2 \ln \sqrt{fl}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial x} \frac{\partial \ln h}{\partial t} + \frac{\partial \ln \sqrt{fl}}{\partial t} \frac{\partial \ln h}{\partial x} \right) - \frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial x} \frac{\partial \ln \sqrt{f}}{\partial t} - \frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial x} \frac{\partial \ln \sqrt{l}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Antes de discutirmos essas equações, examinaremos o fluxo de energia em nosso campo. Para isso, devemos formar o pseudo-tensor de energia de Einstein. Partimos melhor das equações dadas por Weyl:¹³

$$\mathfrak{t}_i^k = \mathfrak{H} \delta_i^k - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\alpha\beta,k}} g_{\alpha\beta,i}.$$

¹²[N. d. T.] Aqui há um erro de digitação no artigo original: na equação seguinte, lê-se ds^2 no lugar de ds_2 .

¹³Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., S. 272.

onde é¹⁴

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}g^{ik} \left(\left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} rs \\ s \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ir \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} ks \\ r \end{matrix} \right\} \right).$$

O cálculo fornece para as componentes que nos interessam:

$$\left. \begin{aligned} t_{01} = t_{10} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial \ln h}{\partial x} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial t} + \frac{\partial \ln l}{\partial t} \right) + \frac{\partial \ln h}{\partial t} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{\partial \ln l}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \ln f}{\partial x} \frac{\partial \ln l}{\partial t} + \frac{\partial \ln f}{\partial t} \frac{\partial \ln l}{\partial x} \right\}, \\ t_{02} = t_{20} &= 0, \\ t_{03} = t_{30} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Pode-se reconhecer a partir de (13) que, em geral, há um fluxo de energia na direção x — tanto quanto se pode concluir a partir do pseudo-tensor de energia. Temos aqui formas especiais de ondas gravitacionais “planas”, como foram inicialmente demonstradas por Einstein em campos fracos.¹⁵ As ondas dadas por (12) e (13), no entanto, existem em campos arbitrariamente fortes. A seguir, discutimos duas soluções particulares de (12).

Primeiro, reconhece-se a partir da primeira equação em (12) que a grandeza $\sqrt{fl}$ se propaga em uma onda “plana” ao longo do eixo- x . Uma solução particular é:

$$f = l = \text{const}, \quad h = h(x - t).$$

Ao inserir em (13), reconhece-se que esta solução corresponde a uma onda sem energia. Essa onda, exatamente como as ondas sem energia correspondentes encontradas por Einstein, é apenas aparente e pode ser eliminada por uma transformação de coordenadas, como se pode verificar formando o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel $R_{ik\alpha}^\beta$, cujas componentes desaparecem identicamente para nossa solução. (Esta é, como se sabe, a condição para que um sistema de coordenadas “euclidiano-cartesiano” possa ser introduzido.) É importante destacar que nosso resultado aqui é rigorosamente válido, enquanto em Einstein tanto a eliminação da onda por transformação quanto a ausência de energia valem apenas em primeira aproximação. Uma segunda solução de (12) é obtida ao se definir:

$$f = l, \quad h = \text{const}.$$

As equações (12) fornecem então $f = C(x - t + D)^2$. Esta é uma onda real, que cresce além de todos os limites no infinito. Seu transporte de energia é dado por:

$$t_{01} = -\frac{1}{x - t + D}; \quad t_0^1 = t_{0k}g^{k1}\sqrt{-g} = C(x - t + D).$$

Para obter a solução geral de (12), procedemos de maneira análoga a § 1. Com base na primeira equação de (12), é novamente possível introduzir novas coordenadas:

$$\bar{t} = \bar{t}(t, x), \quad r = \sqrt{fl}, \quad \bar{z} = y, \quad \vartheta = z,$$

onde t representa a solução conjugada da equação de onda para r . Nessas novas coordenadas, o elemento de linha assume a forma:

$$ds^2 = \mu(dt^2 - dr^2) - \lambda dz^2 - \frac{r^2}{\lambda} d\vartheta^2, \quad (14)$$

¹⁴[N. d. T.] Aqui, $\left\{ \begin{matrix} ab \\ c \end{matrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie, para os quais notação mais comum atualmente é Γ_{ab}^c .

¹⁵A. Einstein, Über Gravitationswellen. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1918, S. 154.

onde os coeficientes são funções das variáveis antigas. Introduzindo novamente as incógnitas $\psi = \ln \sqrt{\lambda}$, $\gamma = \ln \sqrt{\lambda\mu}$, obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial r} &= r \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= 2r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

A solução geral dessas equações diferenciais fornece também a solução geral de (12), obtida simplesmente pela transformação inversa para as coordenadas anteriores. No entanto, (15) e (14) permitem outra interpretação. Se considerarmos ϑ em (14) como uma coordenada de rotação que varia de 0 a 2π , então (14) representa o elemento de linha em um espaço com simetria cilíndrica. Assim, (15) fornece simultaneamente a solução para “ondas cilíndricas”. Uma solução da primeira equação em (15) é:¹⁶

$$\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(t + r \cos \varphi) d\varphi.$$

γ é determinado a partir disso por uma quadratura. Reconhece-se imediatamente a partir da equação diferencial que, para grandes r , ela se reduz à equação de onda comum; a uma distância suficientemente grande do eixo, parte da onda cilíndrica pode ser interpretada como uma onda plana, e lá λ e μ se propagam da maneira conhecida da eletrodinâmica, como mostram as equações (15).

A partir das considerações acima, vê-se como o campo gravitacional se propaga. A analogia com a eletrodinâmica não é tão completa aqui quanto nas soluções aproximadas de Einstein. Não são os g_{ik} em si, mas certas combinações de seus logaritmos que se propagam de maneira simples. Essa complicação, que o problema enfrenta em comparação com a eletrodinâmica, deve-se principalmente ao fato de que a velocidade da luz em si depende da onda. Essa dependência da velocidade de propagação em relação à onda é negligenciada na aproximação de Einstein; daí a melhor analogia com a eletrodinâmica.

Agora, resta investigar quais arranjos de massas excitam as ondas que consideramos. Para esse fim, estendemos nossas abordagens para o interior da matéria. Após realizar a transformação complexa mencionada acima, reconhece-se a partir de (5) que, para nossa escolha do elemento de linha (11), sempre vale $R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$, de onde segue, em conexão com (2), que apenas a componente T_{01} do fluxo de energia pode ser diferente de zero. Assim, as ondas que examinamos acima são excitadas por grandes placas “planas” que oscilam na direção x ou por massas dispostas simetricamente em cilindros que pulsam na direção radial.

§3 O CAMPO ESTACIONÁRIO EM PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

O campo estacionário será considerado apenas na aproximação introduzida por Einstein, ou seja, o elemento de linha (1) deve diferir do elemento de linha euclidiano em coordenadas cilíndricas apenas por termos que são pequenos de primeira ordem. Escrevemos o elemento de linha (1) com uma mera mudança de notação na forma:

$$ds^2 = (1 + \gamma_{00}^*) dt^2 + 2\gamma_{01}^* dr dt + 2\gamma_{02}^* dz dt + 2\gamma_{03}^* d\vartheta dt - (1 + \gamma_{11}^*) (dr^2 + dz^2) - r^2 (1 + \gamma_{33}^*) d\vartheta^2.$$

Nossas suposições afirmam então que as grandezas $\gamma_{00}^*, \gamma_{01}^*, \gamma_{02}^*, \gamma_{03}^*, \gamma_{11}^*$ e γ_{33}^* são pequenas de primeira ordem. Agora, introduzimos novas coordenadas por meio da transformação:

$$t = t, \quad x = r \cdot \cos \vartheta, \quad y = r \cdot \sin \vartheta, \quad z = z$$

¹⁶Vgl. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, S. 142.

Os coeficientes do elemento de linha são expressos nas novas coordenadas em termos das antigas pelas fórmulas de transformação conhecidas:

$$g_{ik} = \frac{\partial x_\gamma^*}{\partial x_i} \frac{\partial x_\nu^*}{\partial x_k} g_{\gamma\nu}^*.$$

Obtemos para as grandezas que nos interessam:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{00} &= \gamma_{00}^*, & \gamma_{01} &= \gamma_{01}^* \frac{x}{r} - \gamma_{03}^* \frac{y}{r^2}, \\ \gamma_{33} &= \gamma_{22}^*, & \gamma_{02} &= \gamma_{01}^* \frac{y}{r} + \gamma_{03}^* \frac{x}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

onde deve-se notar que os γ_{ik}^* são funções apenas de r e z . Inserimos as expressões (16) nas equações de campo (2). Nesse processo, limitamo-nos a termos de primeira ordem; para o espaço sem matéria, obtemos:¹⁷

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_k^r}{\partial x_i \partial x_r} + \frac{\partial^2 \gamma_i^r}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial^2 \gamma_r^n}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \frac{1}{2} \gamma_{ik} = 0. \quad (17)$$

Primeiro, vemos a partir de (16) que γ_{00} e γ_{33} dependem apenas de r e z e que as outras duas grandezas podem ser escritas como:

$$\gamma_{01} = xf(r, z) - yg(rz), \quad \gamma_{02} = yf(r, z) + xg(r, z).$$

Essas quatro funções desconhecidas, que determinam o movimento de um ponto de massa em movimento lento, são determinadas em primeira aproximação pelas equações diferenciais (17). Para discutir a solução, escolhemos dois casos, que foram considerados primeiro por Thirring¹⁸ em particular. Como primeiro caso, consideramos o campo próximo ao eixo de massas distribuídas simetricamente em rotação estacionária. Devido à generalidade de nossas abordagens, isso pode envolver qualquer número de arranjos de massas encaixados uns nos outros, girando com diferentes velocidades angulares. Além disso, as condições de contorno não desempenham inicialmente um papel, pois partimos das equações diferenciais. Procedemos, uma vez que esperamos soluções regulares no espaço sem matéria, assumindo que as quatro funções procuradas são séries de potências em r e as inserimos em (17). Com base em (17), obtêm-se então as seguintes expansões:

$$\gamma_{00} = \alpha(z) - \frac{\alpha''(z)}{x_2} r^2 + \frac{\alpha^{(IV)}(z)}{x_4} r^4 - \dots + \dots \quad (18)$$

$$\text{rot} \gamma = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_{03}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial z} = y \left\{ \sigma(z) - \frac{\sigma''(z)}{k_2} r^2 + \frac{\sigma^{(IV)}(z)}{k_4} r^4 + \dots \right\} \\ & \quad - x \left\{ \tau(z) - \frac{\tau''(z)}{k_2} r^2 + \dots - \right\} \\ & \frac{\partial \gamma_{01}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{03}}{\partial x} = -x \left\{ \sigma(z) - \frac{\sigma''(z)}{k_2} r^2 + \dots - \dots \right\} \\ & \quad - y \left\{ \tau(z) - \frac{\tau''(z)}{k_2} r^2 + \dots - \right\} \\ & \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{01}}{\partial y} = 2 \left\{ \psi(z) - \frac{\psi''(z)}{x_2} r^2 + \frac{\psi^{(IV)}(z)}{x_4} r^4 - \dots + \dots \right\}^{19} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

¹⁷[N. d. T.] Entendemos que o índice n , na equação abaixo, tal como no trabalho original, devesse, na verdade, ser r .

¹⁸Phys. ZS. 19, 33 e 156, 1918; 22, 29, 1921. Embora o segundo trabalho descreva corretamente o campo no exterior de uma esfera em rotação na aproximação considerada, o primeiro — como já observado por Lanczos — produz soluções que contradizem as equações de campo. Conforme Lanczos demonstrou, isso ocorre porque as tensões não foram corretamente especificadas. Acreditamos que, com base em nossas equações, podemos resolver este problema em princípio sem recorrer a quaisquer hipóteses adicionais sobre o tensor de matéria.

Os lados esquerdos em (19) representam, segundo Thirring,²⁰ diretamente as componentes da força de Coriolis. $\alpha, \sigma, \psi(\tau = \psi')$ são funções arbitrárias de z e, em cada caso concreto, dependerão da distribuição das massas geradoras do campo ao longo do eixo de rotação, que deixamos arbitrária. Se nos limitarmos à vizinhança imediata do eixo, de modo que apenas os primeiros termos das séries precisem ser considerados e, além disso, o produto das coordenadas com as velocidades possa ser desprezado, obtêm-se, segundo Thirring, as seguintes equações de movimento para um ponto de massa em movimento lento¹:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\psi(z)\dot{y} + \frac{\alpha''(z)}{x_2}x, \\ \ddot{y} &= -2\psi(z)\dot{x} - \frac{\alpha''(z)}{x_2}y, \\ \ddot{z} &= +\frac{1}{2}\alpha'(z). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Mais afastado do eixo, as equações de movimento (também para pequenas velocidades) são:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \left\{ \psi(z) + \frac{\psi''(z)}{k_2}r^2 + \dots \right\} \dot{y} + \{x[\sigma(z) - \dots] + y[\tau(z) - \dots]\} \dot{z} - x \left\{ \frac{\alpha''(z)}{k_2} - \dots \right\} \\ \ddot{y} &= -2 \{ \psi(z) - \dots + \} \dot{x} + \{y[\sigma(z) - \dots + \dots] - x[\tau(z) - \dots]\} \dot{z} - y \left\{ \frac{\alpha''(z)}{k_2} - \dots \right\} \\ \ddot{z} &= -\{x[\sigma(z) - \dots] + y[\tau(z) - \dots]\} \dot{x} - \{y[\sigma(z) - \dots] - x[\tau(z) - \dots]\} \dot{y} + \frac{1}{2} \{ \alpha'(z) - \dots \} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

A partir dessas equações, reconhece-se que, em geral, surgem forças de Coriolis e centrífugas, que, em nosso caso, também podem depender de z . Além disso, surge uma força na direção do eixo de rotação, como já encontrada por Thirring. Essa força depende da distribuição de massa na direção z e foi interpretada por Thirring como atração gravitacional habitual. Além disso, reconhece-se, igualando a zero (*Nullsetzen*) $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}$ que, como já indicado no final de § 1, as forças centrífugas permanecem inalteradas na transição para o caso estático. As forças centrífugas obtidas acima não são, portanto, uma consequência da rotação, mas uma consequência da atração de massa, que já aparece na teoria de Newton. Aqui fica claro por que, em Thirring, as forças centrífugas, em contraste com as forças de Coriolis, não podem ser eliminadas por transformação, pois geralmente não é possível eliminar a ação gravitacional de um corpo em uma região finita. Poder-se-ia esperar que, na rotação de massas pesadas, também surgissem forças centrífugas que desapareceriam quando a rotação cessasse. (Em Thirring, a proporcionalidade das forças centrífugas com ω^2 dá a impressão de que se trata realmente de efeitos “genuínos” de rotação, mas verifica-se facilmente que a proporcionalidade com ω^2 está relacionada ao aumento da massa pesada do equador com ω . As forças centrífugas de Thirring também surgiriam de acordo com a teoria da relatividade especial.) “Forças centrífugas genuínas”, que também deveriam surgir em um cilindro oco em rotação, não podemos obter na aproximação aplicada; por isso, as forças centrífugas que surgem no espaço sem campo ao transformar para um sistema de coordenadas em rotação também não estão contidas em (20). De acordo com (20), toda força centrífuga radial está inseparavelmente ligada a uma axial.

Para determinar o campo fora de uma massa em rotação, pode-se proceder de maneira análoga, mas neste caso é necessário incluir as condições de contorno no infinito e então expandir em potências

¹⁹O vetor (R_{01}, R_{02}, R_{03}) é, segundo a equação (17), igual a $-\frac{1}{2}(\Delta\gamma - \text{grad div } \gamma)$, onde $\gamma = (\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03})$, disto se segue $\Delta \text{rot } \gamma = 0$, de onde fluem as equações (19).

²⁰H. Thirring, Phys. ZS. 19, 36-37, 1918.

negativas de r . Obtêm-se então as forças newtonianas comuns e, além disso, forças de Coriolis e centrífugas como em Thirring e Lense.²¹ Não nos aprofundaremos neste caso, pois ele não traz nada de novo em princípio.

Algumas palavras ainda devem ser ditas sobre o estado do campo no espaço preenchido por matéria. Em vez de (17), teríamos que estabelecer as equações para o espaço com matéria neste caso; além disso, ao definir o tensor de matéria, seria necessário levar em conta as condições de integrabilidade dessas equações. Isso geralmente será muito complicado; além disso, as equações assim obtidas provavelmente não terão muito sentido, pois o campo no interior da matéria não será necessariamente fraco desde o início. No entanto, se o tensor de matéria for incluído nas considerações apenas para obter a conexão entre as massas e as forças que surgem, como é o caso em Thirring, o seguinte caminho parece viável, que foi inadvertidamente tomado por Weyl em seu trabalho citado acima: primeiro, apenas as equações para as componentes “temporais” do tensor de matéria são estabelecidas; a partir delas, os g_{ik} são calculados; as tensões que mantêm a configuração de massa assumida em equilíbrio estável podem então ser determinadas posteriormente a partir das seis equações gravitacionais restantes.

No próximo parágrafo, com base nas considerações anteriores, terão lugar algumas observações fundamentais sobre o princípio de Mach.

§4 ALGUMAS OBSERVAÇÕES PRINCIPAIS

A partir das considerações do último parágrafo, reconhece-se que só faz sentido falar de forças de Coriolis e centrífugas em nossa aproximação. Para campos gravitacionais fortes e movimentos rápidos, as equações de movimento são essencialmente mais complicadas e geralmente não apresentam analogias com as equações clássicas de movimento em um sistema em rotação. Nesse sentido, pode-se dizer que apenas as forças de Coriolis são peculiares ao problema de rotação, enquanto as forças centrífugas também surgem no caso estático.

O problema da rotação estacionária foi também o que primeiro levou às considerações sobre o princípio de Mach. Parece, portanto, apropriado abordar este ponto mais detalhadamente aqui. Como este problema, no entanto, não está vinculado ao problema de rotação, voltaremos às equações de campo (2) para este fim e usaremos o problema da rotação estacionária apenas para ilustrar o caso geral.

Na formulação de Einstein,²² o princípio de Mach diz: O campo métrico é condicionado e completamente determinado pelo tensor de energia da matéria.

Na mecânica clássica, este princípio não é satisfeito, como se pode ver mais facilmente considerando duas massas dispostas axialmente simétricas, girando uma em relação à outra, pois seria concebível que, visto de um corpo, surgissem forças de Coriolis, enquanto em um sistema de referência em repouso em relação à segunda massa, não surgissem.

Também na teoria da relatividade, o campo métrico não é inicialmente determinado de forma única pelas equações de campo para um dado tensor de matéria, e isso tanto ao usar as equações de campo na forma (2) quanto na forma modificada cosmológica.²³ Para uma determinação completa do campo, são, portanto, necessárias, além das equações de campo, certas condições adicionais. (A questão de saber se é possível especificar equações diferenciais que determinem o campo sem condições adicionais não será investigada aqui. Em qualquer caso, as “equações cosmológicas” não representam tais equações diferenciais.) Essas condições adicionais estão intimamente ligadas ao princípio de Mach. Se, por exemplo, essas condições adicionais introduzem um novo elemento (por exemplo, do tipo do espaço absoluto) em nossas considerações, então o princípio de Mach não será satisfeito.²⁴ Por outro lado, é

²¹Phys. ZS. 19, 156, 1918

²²Ann. d. Phys. 5, 241, 1918.

²³Vgl. z. B. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., S. 287.

²⁴Poder-se-ia considerar a hipótese de um éter descrito pelo tensor de matéria $T_{ik} = \mu g_{ik}$. Esta proposta é compatível

evidentemente possível, por meio de nossas condições adicionais, excluir todas as soluções das equações de campo que violam o princípio de Mach. Enquanto as condições adicionais não forem conhecidas, também não podemos dizer, com base nas equações que desenvolvemos, como é um mundo no qual existem apenas duas massas girando uma em relação à outra. No entanto, é possível, em um mundo preenchido por matéria, determinar aproximadamente o campo na vizinhança de um corpo de pequena massa. Se uma determinada distribuição de massa e o campo métrico correspondente forem dados e introduzirmos uma nova massa neste campo, que deve ser pequena em comparação com as massas originalmente presentes, obteremos o campo na vizinhança desta nova massa evidentemente adicionando às equações de campo a condição adicional invariante de que o campo da nova massa deve se fundir continuamente no campo originalmente presente (originado das massas originalmente presentes) a uma distância suficientemente grande.²⁵

Se o princípio de Mach é satisfeito não pode ser decidido com base nas experiências atuais; em qualquer caso, as equações de campo em si não fornecem uma indicação em uma direção ou outra.

Deve-se mencionar ainda que nossas considerações acima podem ser transferidas de forma análoga para as equações do campo eletromagnético; também lá é concebível que as condições de contorno que assumimos no mundo real sejam apenas uma consequência da integração no campo de cargas distantes.

Do Instituto de Física Teórica da Universidade de Viena.

com o experimento de Michelson e parece particularmente atraente por conferir aos componentes g_{ik} um significado físico real. As equações de campo na forma geral

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \lambda g_{ik} = \mu g_{ik}$$

levam, em grande escala, ao universo hiperbólico de de Sitter. Tal éter determinaria então o substrato homogêneo do cosmos. Cumpre ainda observar que, neste modelo, as ondas gravitacionais podem ser interpretadas como perturbações periódicas tanto na densidade quanto nas tensões.

²⁵Aqui, faz-se uso da suposição de que a influência de pequenas massas, medida em relação a grandes massas, seja pequena. Esta suposição, no entanto, não é de forma alguma arbitrária; antes, está subjacente a toda teoria de campo, pois sem ela nenhum corpo de prova poderia ser introduzido em um campo, tornando assim uma medição no campo impossível em princípio.