

Degenerescência quântica e anãs brancas

M. Moriconi¹ e R. Negreiros²

¹Universidade Federal Fluminense

²Catholic Institute of Technology

Resumo

Anãs brancas são remanescentes estelares altamente compactas, resultantes do processo evolutivo de estrelas com massas de até dez vezes a massa do nosso Sol. Seu núcleo é formado predominantemente por matéria eletronicamente degenerada. Em uma estrela ordinária, há um balanço entre a atração gravitacional intrínseca e a pressão interna gerada pelo calor e pela radiação nuclear de seu núcleo. Em uma anã branca, o colapso é evitado devido à pressão eletrônica de degenerescência, um efeito quântico que tem origem nas propriedades estatísticas dos férmions, por meio do princípio da exclusão de Pauli. Neste artigo, apresentamos um modelo teórico simples da estrutura de anãs brancas e algumas de suas aplicações em astrofísica.

Abstract

White dwarfs are highly compact stellar remnants resulting from the evolutionary process of stars with masses up to ten times that of our Sun. Their core is composed predominantly of electronically degenerate matter. In an ordinary star, there is a balance between the intrinsic gravitational attraction and the internal pressure generated by the heat and nuclear radiation from its core. In a white dwarf, collapse is prevented by the electron degeneracy pressure, a quantum effect that arises from the statistical properties of fermions through the Pauli exclusion principle. In this article, we present a simple theoretical model for the structure of white dwarfs and discuss some of its applications in astrophysics.

Palavras-chave: anãs brancas; princípio da exclusão de Pauli; férmions; degenerescência eletrônica.

Keywords: white dwarfs; Pauli exclusion principle; fermions; electronic degenerescence.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v6n2.49837](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v6n2.49837)

1 Introdução

A descoberta da natureza quântica da matéria no início do século XX levou a uma das mais elegantes conexões entre o mundo subatômico e o mundo macroscópico: o princípio da exclusão de Pauli [1]. Ao impedir que férmions idênticos ocupem o mesmo estado quântico, temos a origem de uma pressão intrínseca à matéria fermiônica — a pressão de degenerescência [2, 3] — que não depende de calor nem de reações nucleares. Essa pressão quântica é a força fundamental que sustenta os objetos conhecidos como anãs brancas, remanescentes estelares compactos formados após o esgotamento do combustível nuclear em estrelas de baixa e média massa.

Partindo do conceito de um gás degenerado de férmions, podemos deduzir uma equação de estado a $T = 0$ [2, 4] que relaciona densidade e pressão (Seção 3). Quando acoplada às equa-

ções de continuidade de massa e equilíbrio hidrostático [5] (Seção 4), ela descreve com precisão as propriedades estruturais dessas estrelas — em particular, suas densidades relativamente elevadas e raios comparáveis ao da Terra, com massas próximas a massa do sol. O estudo de anãs brancas culmina na determinação da massa limite de Chandrasekhar [6] (Seção 5), valor máximo além do qual a pressão de degenerescência consegue conter o colapso gravitacional.

Além de estabelecer as bases teóricas, discutimos, ainda que brevemente, diversas aplicações astrofísicas das anãs brancas, como cronômetros galácticos (Seção 6.2), laboratórios para física de matéria densa (Seção 6.3), velas padrão em supernovas tipo Ia (Seção 6.5) e a possibilidade de fontes promissoras de ondas gravitacionais em sistemas binários (Seção 6.6). Também discutimos a interessante possibilidade de que a chamada “ar-

queologia planetária" e possíveis pistas para a matéria escura, que podem ser encontradas em anãs brancas.

2 O princípio da exclusão de Pauli

O conceito de degenerescência, como veremos, é essencial para entendermos como anãs brancas podem existir. Para entendermos o conceito de degenerescência, entretanto, precisamos antes entender o princípio da exclusão de Pauli.

Toda partícula quântica tem certas características intrínsecas que as definem. Duas propriedades a que estamos acostumados são massa e carga elétrica. Massa é uma medida da inércia de uma partícula, que mede como ela responde a uma força aplicada nela. A carga elétrica determina sua interação com campos elétricos e magnéticos. Além de massa e carga, elas também possuem uma propriedade chamada spin, que determina como ela interage com campos magnéticos. O spin de uma partícula é, necessariamente, um múltiplo inteiro ou semi-inteiro de $\hbar = h/2\pi$, onde h é a *constante de Planck*.

No reino quântico partículas são classificadas como *férmions* ou *bósons*, dependendo do valor do spin. Partículas com spin semi-inteiro são chamadas férmions e partículas de spin inteiro são chamadas bósons [4]. Exemplos de férmions são os prótons, elétrons e nêutrons (todos com spin 1/2), enquanto um dos bósons mais famosos é possivelmente o fóton (com spin 1). Note que para férmions de spin 1/2 existem dois possíveis estados de spin, frequentemente denotados por *up* (\uparrow) e *down* (\downarrow). Isso introduz um fator 2 que aparecerá mais tarde em nossa análise.

A maneira como férmions e bósons se comportam quanticamente é fundamentalmente diferente. Representando a função de onda de um par de partículas idênticas simbolicamente por $\Psi(1, 2)$, temos que, para férmions, como dois elétrons, se trocarmos as posições 1 e 2, a nova função de onda satisfaz à

$$\Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2). \quad (1)$$

Já para o caso de dois bósons idênticos temos $\Psi(1, 2) = \Psi(2, 1)$.

O princípio da exclusão de Pauli emerge naturalmente da natureza assimétrica da função de

onda de férmions [1]. É fácil entender: considerando que ao trocar a posição (por exemplo) de dois férmions a função de onda terá seu sinal trocado ao colocarmos dois férmions no mesmo estado, a única maneira de satisfazer a condição de assimetria é se a função de onda se anular. Isso significa que a função de onda de qualquer sistema quântico fermiônico, onde dois (ou mais) férmions se encontram no mesmo estado é sempre zero. Ou seja a probabilidade desse estado existir é nula. Este é, em outras palavras o princípio da exclusão de Pauli: partículas idênticas com spin semi-inteiro não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente [1].

Possivelmente uma das consequências mais notáveis do princípio de exclusão de Pauli é a existência dos átomos, e consequentemente da química como um todo. A impossibilidade de dois elétrons (férmions de spin 1/2) ocuparem o mesmo estado quântico, obriga, necessariamente que estes ocupem níveis atômicos (orbitais) sucessivamente mais altos: os famosos níveis *1s*, *2s*, *2p*, *3s*, *3p*, *3d*, ... ensinados na química. De maneira geral é a existência desses níveis que permite que a química funcione e, por conseguinte, o mundo como o conhecemos. Devemos agradecer ao princípio da exclusão de Pauli pela existência do universo como conhecemos. As consequências do princípio da exclusão de Pauli são ainda mais amplas, como veremos a seguir, particularmente para a astrofísica, o conceito de pressão de degenerescência tem um papel muito importante e será discutido na próxima seção.

3 Gás de férmions degenerado

Para podermos entender anãs brancas e suas propriedades, precisamos antes compreender o conceito de um gás *degenerado* de férmions [2, 3]. A idéia é simples: vamos estender o conceito clássico de gás ideal, ou seja um gás composto por partículas não interagentes, para o caso em que essas partículas são compostas por férmions idênticos, como por exemplo, elétrons. É fácil antever que o princípio da exclusão de Pauli, discutido na última seção terá um papel importante, uma vez que mesmo que este gás esteja em seu estado de menor energia seus férmions constituintes não poderão estar no mesmo estado (diferentemente

de um gás clássico em que suas partículas podem compartilhar estados idênticos).

Começamos, então, considerando uma situação ideal, onde temos um gás de férmions composto por apenas um elétron. Evidentemente um elétron apenas não constitui um gás, mas partiremos de um elétron para depois generalizar nossos resultados para um sistema composto de vários elétrons, esse sim representando um “verdadeiro” gás.

Consideremos então que este nosso “gás” de um elétron, tem temperatura zero ($T = 0$) de forma que não precisamos nos preocupar com energia térmica. Vale notar que aqui também se evidencia uma diferença entre um gás quântico e um gás clássico: neste último não faz sentido falar em um gás com temperatura nula, uma vez que todos seus componentes estariam imóveis. Quanticamente, entretanto, isso não é um problema, pois sabemos, que mesmo em seu estado de menor energia, uma partícula terá uma energia não nula (a chamada energia de ponto zero). Voltando ao nosso solitário elétron. Suponhamos que ele esteja confinado ao interior de uma caixa de dimensões l_x, l_y, l_z com paredes impenetráveis. Resolvendo a equação de Schrödinger para esse elétron [4], que é livre dentro da caixa e está sujeito apenas ao potencial infinito das paredes, podemos encontrar os níveis de energia

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right). \quad (2)$$

Onde n_x, n_y e n_z são inteiros positivos, e fornecem os possíveis níveis de energia que podem ser ocupados pelo elétron dentro da caixa. Assim sendo, o menor nível de energia possível (energia de ponto zero) é dado por $n_x = n_y = n_z = 1$.

Tendo determinado os níveis de energia para um férmion (elétron nesse caso) em uma caixa impermeável, a generalização para um gás de elétrons é muito simples para o caso em que ignoramos a interação elétron-elétron, que é de fato o caso que estamos interessados uma vez que buscamos a o equivalente ao gás ideal clássico para o caso de férmions. Nesse caso os níveis de energia disponíveis são aqueles dados pela equação (2), onde cada nível de energia (dado por uma combinação de n_x, n_y, n_z) pode ser ocupado apenas por dois elétrons (um com spin \uparrow e outro com spin \downarrow). É interessante notar a semelhança com o caso de

átomos, onde também temos níveis de energia que podem ser ocupados por dois elétrons, como por exemplo o caso $1s$ que pode ser ocupado por um elétron com \uparrow ($1s^1$) e outro \downarrow ($1s^2$). A energia dos níveis atômicos tem forma mais complicada, entretanto, já que o confinamento dos elétrons é dado pela força coulombiana exercida pelo núcleo atômico, invés das paredes impermeáveis que consideramos aqui.

Voltemos nossa atenção aos níveis de energia permitidos, dado pela equação (2). Reescrevemos esta equação como

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}, \quad (3)$$

onde k representa a magnitude do vetor $\mathbf{k} \equiv (k_x = n_x\pi/l_x, k_y = n_y\pi/l_y, k_z = n_z\pi/l_z)$ comumente conhecido na mecânica quântica como *vetor de onda*.

Imaginemos agora um espaço tridimensional, gerado por três eixos, cada qual representando as componentes do vetor de onda: k_x, k_y e k_z . Cada ponto nesse espaço gerado pelas diferentes combinações dos valores possíveis do vetor de onda: $k_x = \pi/l_x, 2\pi/l_x, 3\pi/l_x, \dots$ e similarmente para k_y e k_z , representa um possível estado estacionário ocupado pelo elétron (na realidade dois ao considerarmos o spin, mas por ora vamos ignorá-lo). Dessa forma podemos então imaginar que este espaço é discretizado em pequenas caixas, cada qual com lados $\pi/l_x, \pi/l_y$ e π/l_z . Cada uma dessas caixas representa o volume (no espaço dos momentos) ocupado por cada estado, de forma que podemos escrever

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V}. \quad (4)$$

Agora vamos tornar nosso gás mais realista, em vez de considerar um (ou alguns) elétrons, cada qual ocupando um dos possíveis níveis de energia, vamos agora considerar N elétrons, onde N é um enorme valor (da ordem do número de Avogadro) como deve ser para um gás. Ao incluirmos N elétrons em nosso gás não devemos esquecer que estes são férmions, e portanto cada um desses elétrons só pode preencher uma das pequenas caixinhas no espaço dos momentos (aquelas cujo volume é dado por $\frac{\pi^3}{V}$). Caso fossem bósons, que não estão sujeitos ao princípio da exclusão de Pauli, nada impediria que todos os bósons ocupassem o mesmo estado e, portanto, a

mesma caixinha. Este não é o caso, entretanto, para elétrons, onde cada um deve ocupar apenas um nível e, portanto, apenas uma caixinha. Dessa maneira ao incluir N elétrons vamos ocupando caixinhas subsequentes até que todos os N elétrons estejam em caixinhas individuais. Assim, após popular todos os estados possíveis com os N elétrons disponíveis, vemos que esses elétrons vão ocupar um oitavo de uma esfera de raio k_f no espaço dos momentos, onde k_f pode ser encontrado se lembrarmos que cada (par) de elétrons ocupa um pequeno volume π^3/V (note que agora voltamos a considerar o spin dos elétrons e portanto colocamos não um, mas dois elétrons em cada caixinha). Assim temos

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_f^3 \right) = \frac{N}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right), \quad (5)$$

de forma que

$$k_f = (3n\pi^2)^{1/3}, \quad (6)$$

onde

$$n \equiv \frac{N}{V} \quad (7)$$

é a densidade de elétrons por unidade de volume. A quantidade k_f é chamada de momento de Fermi e representa o momento dos elétrons no estado de mais alta energia para um sistema com temperatura zero. O momento de Fermi representa igualmente o raio que separa o volume do espaço dos momentos ocupados daqueles vazios. A energia associada ao momento de Fermi pode ser facilmente encontrada se substituirmos o momento de Fermi na formula que descreve as energias dos níveis (2), de forma que a energia de Fermi é dada por

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3n\pi^2)^{2/3}. \quad (8)$$

Chegamos a um ponto no qual podemos ter uma melhor compreensão do que é um gás de férmions degenerado: é um gás que pode ser descrito como um conjunto de férmions que, mesmo em seu estado fundamental, são obrigados a ocupar níveis de energia cada vez maiores para satisfazer o princípio da exclusão de Pauli. Isso se contrasta de forma gritante com o comportamento de gases clássicos, que em seu estado fundamental teriam (em princípio), energia e temperatura nulas, já que classicamente não há qualquer empecilho

para partículas clássicas ocuparem o mesmo estado de energia (na prática isso não ocorre, conforme Boltzmann demonstrou, mas isso é assunto para outro artigo).

Dessa forma, quanticamente, é perfeitamente razoável discutir um gás de férmions com zero temperatura, ou seja “degenerado”, uma vez que seus componentes estão ocupando os estados de menor energia disponíveis. Com isso vale a pena buscar a equação de estado para tal gás. Já encontramos, nas equações (6) e (8), o momento e a energia de Fermi, ou seja o momento e a energia do férmion que ocupa o nível mais alto do gás. Para calcular a energia *total* do gás, consideramos 1/8 de uma casca esférica, que representa os estados no espaço dos momentos como na figura 1.

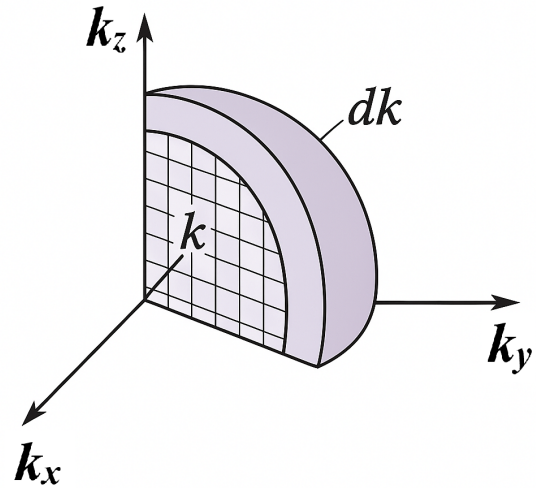


Figura 1: Casca esférica representando o espaço dos momentos do gás de fermi. Cada pequeno cubo representa o estado ocupado por cada elétron, cuja componente dos momentos são dadas pelas coordenadas k_x, k_y, k_z .

O volume total de uma casca esférica entre k e $k + dk$ é dado por

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk, \quad (9)$$

de forma que o número total de estados disponíveis nesta casca é dado por

$$\frac{2 \left[(1/2) \pi k^2 dk \right]}{(\pi^3/V)} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk. \quad (10)$$

Note o fator de 2, que corresponde aos estados de spins diferentes. Considerando que cada um

desses estados tem energia dada por (3) podemos escrever que a energia total dos elétrons ocupando estados nesta casca é dada por

$$dE = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \frac{V}{\pi^2} k^2 dk, \quad (11)$$

de forma que obtemos a energia total do gás pela integral

$$E_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2 V}{2\pi^2 m_e} \int_0^{k_f} k^4 dk = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 N)^{5/3}}{10\pi^2 m_e} V^{-2/3}. \quad (12)$$

Note que essa quantidade é a análoga quântica para um gás de férmions da energia interna de um gás clássico ideal (U). A diferença aqui é que essa energia tem origem, essencialmente, no princípio da exclusão de Pauli, que obriga os elétrons a ocuparem níveis de energia cada vez mais altos, enquanto que para o caso clássico sua origem é a energia térmica dos constituintes do gás.

Seguindo a analogia clássica, vamos determinar a pressão exercida pelo gás de férmions no caso em que consideramos uma expansão do volume em uma quantidade infinitesimal dV . Para isso analisemos o quanto a energia do gás muda em tal expansão:

$$dE_{\text{tot}} = -\frac{2}{3} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 N)^{5/3}}{10\pi^2 m_e} V^{-5/3} dV = -\frac{2}{3} E_{\text{tot}} \frac{dV}{V}, \quad (13)$$

de forma que o trabalho realizado pelo gás, $dW = pdV$, logo a pressão obtida é

$$p = \frac{2}{3} \frac{E_{\text{tot}}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_f^5}{10\pi^2 m_e} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n^{5/3}. \quad (14)$$

Essa é a equação de estado para um gás de férmions não interagente a temperatura zero. Esta pressão, gerada simplesmente pelo fato que os férmions são obrigados a ocuparem níveis de energia cada vez mais altos, devido ao princípio da exclusão, é essencialmente o que evita o colapso de uma Anã Branca devido ao seu próprio peso, como veremos nas seções seguintes. Isso se opõe à situação de estrelas como o nosso Sol, por exemplo, onde o regime dominante é o clássico. Neste caso a pressão que opõe a tendência de colapso gravitacional é a pressão térmica do gás/fluido que compõe a estrela. Sendo que este fluido é alimentado térmicamente pelas fusões nucleares que ocorrem no interior estelar.

Tendo obtido uma melhor, ainda que superficial, compreensão sobre o que é um gás degenerado, e a origem de suas propriedades, podemos prosseguir para entender melhor a física de anãs brancas.

4 Estrutura de anãs brancas

Anãs brancas nascem a partir de estrelas ordinárias, quando estas chegam ao final de sua vida devido ao fim do processo de fusão em seu interior [7]. Em seus momentos finais os processos de fusão dessas estrelas são tão poderosos que acabam ejetando as camadas mais externas da estrela [8], em alguns casos "vaporizando" a estrela por completo, ou, dependendo da massa da estrela progenitora, deixando para trás um denso caroço que vem a ser a anã branca [9].

Tendo nascido após o fim da vida de uma estrela da sequência principal, anãs brancas não possuem as condições necessárias para realizar processos de fusão, de forma que são incapazes de atingir temperaturas suficientes para aquecer seus componentes capazes de exercer pressão térmica suficiente para evitar o colapso gravitacional [2, 3]. De fato, o que evita o colapso gravitacional das anãs brancas é a pressão exercida pelo gás degenerado que se forma no interior dessas estrelas.

Vamos agora entender como este gás de férmions degenerados é capaz de suportar a gravidade dessas estrelas. Para tanto começamos identificando que para uma estrela esfericamente simétrica, a distribuição de massa em seu interior é descrito pela equação [8, 10]

$$m(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr, \quad (15)$$

onde ρ é a densidade de massa-energia. Esta equação pode ser escrita em forma diferencial como

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (16)$$

A condição fundamental para o equilíbrio estelar é a chamada condição de equilíbrio hidrostático, que garante que a pressão do fluido que constitui a estrela contrapõe a força gravitacional que tende a comprimir o fluido [5, 8]. Para encontrar essa condição consideramos um elemento de fluido

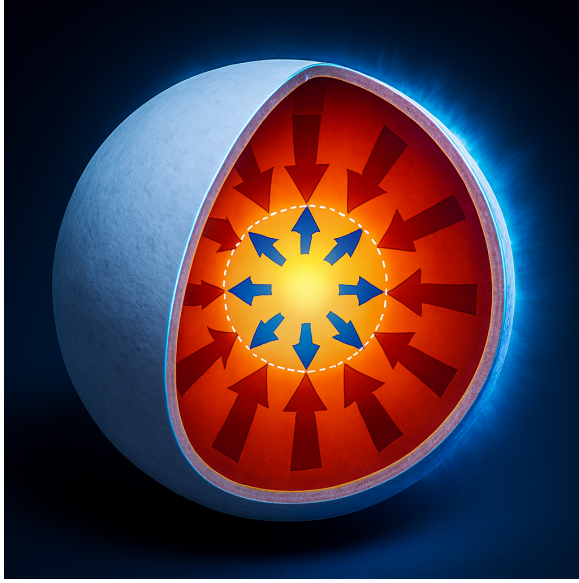


Figura 2: Equilíbrio hidrostático em uma estrela. A linha pontilhada representa uma casca esférica infinitesimal enquanto as setas vermelhas representam a força gravitacional que tenta comprimir essa casca, que é contraposta pela pressão do gás em azul.

em uma casca esférica de espessura dr com uma área dA . Ilustramos as forças atuando nesta casca esférica na figura 2, onde representamos a pressão do gás pelas setas azuis e força gravitacional pelas setas vermelhas, enquanto a casca esférica é representada pela linha pontilhada branca.

Consideremos agora a força exercida F_{fluido} neste elemento esférico de massa $dm = \rho(r)dAdr$, pelo fluido contido na casca esférica, notando que a massa contida na região interior à casca esférica é $m(r)$,

$$F_{\text{fluido}} = [p(r + dr) - p(r)]dA = dpdA. \quad (17)$$

Por outro lado a força gravitacional sentida pela casca esférica dm pela massa em contida em seu interior é dada por

$$F_{\text{grav}} = \frac{Gm(r)}{r^2}dm = \frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)dAdr. \quad (18)$$

Como a anã branca está em equilíbrio hidrostático temos então que essas duas forças, que atuam em direções opostas, precisam se anular, ou seja, $F_{\text{fluido}} + F_{\text{grav}} = 0$, de forma que temos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (19)$$

Encontramos então a condição de equilíbrio hidrostático, que junto com a equação de continui-

dade de massa (16) descreve a estrutura de anãs brancas.

O leitor atento pode perceber, entretanto, que as equações (16) e (19), não podem descrever, de forma completa, a estrutura estelar [8, 11]. Uma rápida análise revela que temos 3 variáveis: a pressão p , a massa m e a densidade ρ , mas temos apenas duas equações: (16) a continuidade de massa, e (19) a condição de equilíbrio hidrostático. De fato, nos falta um outro ingrediente: a equação de estado. Na realidade, em momento algum, ao deduzirmos as equações (16) e (19), fizemos qualquer hipótese sobre a natureza da estrela. Estas equações são válidas para qualquer estrela (Newtoniana), uma vez que elas apenas descrevem a natureza macroscópica da estrela (no caso, o equilíbrio entre a pressão do fluido e a atração gravitacional, além da continuidade de massa). Como qualquer problema da física, precisamos de um elo entre o mundo macroscópico e o mundo microscópico, neste caso dado pela equação de estado. A equação de estado resulta da natureza microscópica da matéria considerada, é ela que nos informa como o fluido responde e se manifesta no mundo macroscópico, que pressão ele exerce, qual densidade possui, e como suas propriedades termodinâmicas se alteram conforme as condições físicas (compo temperatura e gravidade) são modificadas. A escolha da equação de estado apropriada para o sistema físico estudado é como modelamos de forma precisa os objetos astrofísicos. Para estudarmos anãs brancas, precisamos empregar a equação de estado estudada na última seção: aquela de um gás de férmions degenerado. Caso empregássemos uma equação de estado diferente, por exemplo aquela de um gás clássico de Maxwell-Boltzmann, encontraríamos resultados inconsistentes com aqueles observados para anãs brancas, como por exemplo raios estelares muito maiores do que os observados.

Vale notar aqui que estamos considerando anãs brancas como objetos puramente newtonianos [5, 8, 10]. Isso pode parecer contraditório, uma vez que anãs brancas são consideradas "objetos compactos". Essa aproximação, entretanto, se mostra bastante razoável, uma vez que a grande maioria das anãs brancas tem densidade baixa o suficiente de forma que aspectos relativísticos podem ser desprezados [12]. Algumas configurações extremas de anãs brancas, aquelas com massa relati-

vamente alta e raios relativamente pequenos, podem apresentar propriedades relativísticas mais pronunciadas, mas mesmo nesses casos se limitam a correções percentuais pequenas [13,14]. Esta situação é drasticamente diferente para estrelas de nêutrons onde as altas densidades destes objetos faz com que uma descrição puramente relativística seja necessária [5,15].

A natureza, essencialmente quântica [16], da matéria que compõe anãs brancas é drasticamente diferente daquela que compõe estrelas da sequência principal (descritas por um gás clássico). A consequência desta diferença se manifesta nas propriedades físicas de anãs brancas [16,17], que por sua vez, também são acentuadamente diferentes de estrelas comuns. Dentre as diversas propriedades talvez a diferença mais notável seja nos raios dessas estrelas, que são consideravelmente menores (comparáveis ao raio da Terra) [12,18]. Na tabela 1 mostramos as massas e raios observados para algumas anãs brancas notáveis

Como ilustrado na tabela 1, é possível ver as incríveis propriedades de anãs brancas, objetos possuindo a massa comparáveis à massa do Sol, mas com raios comparáveis (ou menores!) que o da Terra. Não é surpresa portanto o motivo dessas estrelas terem sido categorizadas como anãs! Para dar ao leitor um senso de escala que permita notar o quão incríveis essas estrelas são, mostramos na figura 3 uma representação da anã branca Sirius B, que tem uma massa comparável à do Sol, e raio menor que o da Terra.

5 A massa de Chandrasekhar

Uma das propriedades surpreendentes das anãs brancas é que, ao contrário de outras estrelas, sabemos a origem da pressão termodinâmica que a sustenta com bastante precisão: é a pressão de degenerescência dos elétrons. Isso nos fornece um nível quase sem precedentes de compreensão da natureza dessas estrelas. Evidentemente existem outras propriedades que podem alterar a natureza da anã branca, em particular os íons que também fazem parte da sua estrutura (mas tem contribuição quase nula para a pressão). De modo geral, a anã branca é composta por um gás de elétrons degenerados e uma rede cristalina de íons [19], estes últimos determinados pela evolução da es-



Figura 3: Anã branca Sirius B em escala comparada à Terra (Earth).

trela progenitora; mais especificamente pela composição do núcleo da progenitora no momento em que a anã branca foi criada. Assim, podemos ter anãs brancas compostas, de íons de hélio, oxigênio, carbono, magnésio, etc. [20]

Independentemente dos íons que compõe a anã branca, comum a todas é o fato de que a pressão termodinâmica que sustenta a estrela contra o colapso gravitacional é a pressão de degenerescência dos elétrons [10]. Ainda que essa pressão seja formidável, ela é finita e, portanto, deve existir um limite a partir do qual não será mais capaz de evitar o colapso gravitacional. Essa foi a pergunta que o astrofísico Chandrasekhar fez e ao tentar respondê-la chegou a um valor máximo de massa a partir do qual a pressão dos elétrons degenerados seria incapaz de evitar o colapso gravitacional, esse limite hoje é chamado de massa de Chandrasekhar, em homenagem ao seu descobridor.

Vejamos um argumento intuitivo para entender esse resultado, seguindo um caminho um pouco mais didático [21], de forma a entender um pouco melhor esse limite. Para tanto, consideremos uma anã branca com N férmions, que estão contidos em uma esfera de raio R . Podemos, então, considerar a densidade de férmions como $n \sim N/R^3$. Dessa forma se considerarmos apenas um fêr-

Tabela 1: Massa e Raio de algumas anãs brancas notáveis.

Anã Branca	Massa (Massa solares)	Raio (Raio da Terra)
Sirius B	1.02	0.89
Procyon B	0.6	1.35
40 Eri B	0.5	1.43
Stein 2051B	0.67	1.25

mion, é fácil ver que o volume que ele ocupa é

$$V \sim \frac{1}{n}. \quad (20)$$

Considerando o princípio da incerteza de Heisenberg ($\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$) junto do volume ocupado por um férmion, nos permite estimar seu momento como

$$p \sim \hbar n^{1/3} \quad (21)$$

pois o volume ocupado pelo elétron é $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, e estamos supondo que as três incertezas são comparáveis.

A energia dos férmions ocupando os níveis de Fermi pode ser escrita em sua forma relativística como

$$E_f \equiv (k_f^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}. \quad (22)$$

Vamos fazer agora a chamada aproximação relativística, segundo a qual a energia “cinética” dos elétrons (aquela associada ao seu movimento) é muito maior que sua massa de repouso, algo perfeitamente razoável se considerarmos que os elétrons são partículas de massa muito baixa. Dessa forma podemos escrever que a energia de Fermi para os elétrons é dada por

$$E_f \sim k_f c. \quad (23)$$

Considerando agora nossa estimativa para o momento dos férmions (21) podemos então escrever que a estimativa para a energia de fermi dos elétrons na anã branca é

$$E_f \sim \hbar n^{1/3} c \sim \frac{\hbar c N^{1/3}}{R}. \quad (24)$$

Nesse momento vale a pena considerar também a energia gravitacional sentida por cada férmion de massa m_B , dada por

$$E_G \sim -\frac{GMm_B}{R}. \quad (25)$$

Aqui vale notar que $M = Nm_B$, ou seja a equação acima descreve a energia gravitacional que

um férmion sente devido a todos os outros. Notamos aqui que apesar que a pressão de degenerescência dos elétrons é a vastamente responsável pela sustentação da estrela, os outros férmions presentes (os íons, compostos por prótons e nêutrons) contribuem para a densidade de matéria da estrela e portanto irão contribuir para a massa, portanto não podem ser ignorados, principalmente no que diz respeito à energia gravitacional.

Temos então que a energia total é descrita como

$$E = E_f + E_G = \frac{\hbar c N^{1/3}}{R} - \frac{GNm_B^2}{R}. \quad (26)$$

O equilíbrio estelar é encontrado fazendo $E = 0$ (menor valor possível) na equação acima, de forma que encontramos os valores máximos permitidos para que N e M satisfaçam a condição de equilíbrio ($E = 0$):

$$N_{\max} \sim \left(\frac{\hbar c}{Gm_B^2} \right)^{3/2} \sim 10^{57} \quad (27)$$

$$M_{\max} \sim N_{\max} m_B \sim 1.5 M_{\odot} \quad (28)$$

Encontramos assim, usando apenas primeiros princípios, uma aproximação para a Massa de Chandrasekhar, a maior massa que uma anã branca pode possuir. Qualquer anã branca com massa superior a este limite, irá colapsar gravitacionalmente, dando origem possivelmente a um objeto mais compacto como uma estrela de nêutrons ou, em casos mais extremos, a um buraco negro.

Evidentemente aqui seguimos um caminho mais didático, da mesma forma feita em [21]. O estudo de Chandrasekhar e outros que o seguiram são muito mais ricos e complexos e obtêm valores muito mais precisos para a massa máxima de uma anã branca. Ainda assim, mesmo com nosso tratamento simples, encontramos um valor muito próximo daquele que esperamos encontrar na natureza. Esse é um grande feito da astrofísica moderna, de forma que nosso conhecimento do limite

máximo da massa e da própria natureza das anãs brancas são amplamente utilizados na astronomia e astrofísica, seja para o estabelecimento das chamadas velas padrão (supernovas tipo IA, provenientes do colapso de anãs brancas), ou mesmo para obtermos melhor conhecimento da física nuclear e do comportamento de férmions em regimes de altas densidades.

6 Anãs brancas e sua importância para a astrofísica

Anãs brancas são os remanescentes compactos e degenerados de estrelas de baixa e média massa, constituindo o estado evolutivo final de mais de 90% dos objetos estelares na Via Láctea [22]. Com massas típicas de aproximadamente $M \approx 0.6M_{\odot}$ comprimidas em raios da ordem de $R \sim R_{\oplus}$, elas são sustentadas pela pressão de degenerescência dos elétrons [18, 23] e seguem uma equação de estado bem entendida [10, 24], diferentemente de suas “primas” mais compactas, as estrelas de nêutrons. Considerando sua relativa simplicidade e a abundância de dados de alta precisão provenientes de missões como a Gaia fazem delas pilares fundamentais para estudos que vão desde a física estelar até a cosmologia [25].

6.1 Sondando a evolução estelar

A distribuição de massa, a composição atmosférica (dominada por hidrogênio ou hélio) além da evolução espectral de anãs brancas estão diretamente associados aos históricos de perda de massa [22] e os tempos de vida na sequência principal de suas progenitoras. Relações empíricas entre massa inicial e final — calibradas com anãs brancas em aglomerados estelares e sistemas binários, permite que se refinam os processos de mistura nas fronteiras convectivas e perda de massa dependente da metalicidade [26]. A astrosismologia de anãs brancas pulsantes com atmosfera de hidrogênio (DAV) e de hélio (DBV) permite a obtenção de dados importantes sobre a estratificação interna e a composição do núcleo estelar, oferecendo testes independentes de cristalização e separação de fases em matéria densa [27, 28], que são virtualmente impossíveis de se reproduzir em laboratórios terrestres.

6.2 Cronologia galáctica

Após sua formação, as anãs brancas resfriam de maneira previsível, seguindo, aproximadamente a relação

$$L \propto t^{-5/7}, \quad (29)$$

onde L representa a luminosidade e t o tempo de resfriamento [29]. Dessa maneira, o limite inferior da luminosidade em função do tempo atua, portanto, como um relógio natural para datar populações estelares. Técnicas modernas de paralaxe e fotometria de missões como a *Gaia*, por exemplo, revelaram complexidades na sequência de resfriamento — como atrasos causados pela liberação de calor latente durante a cristalização. Tais fenômenos permitem estimativas de idade para os discos finos e espessos da Galáxia, subestruturas do halo e aglomerados abertos e globulares próximos, com precisão de até ± 0.5 bilhões de anos [30].

6.3 Laboratório para física fundamental

As densidades centrais das anãs brancas ($\rho \sim 10^6 \sim 10^9 \text{ g cm}^{-3}$) e suas gravidades superficiais ($g \sim 10^8 \sim 10^9 \text{ cm s}^{-2}$) oferecem ambientes ricos para testarmos leis físicas além do alcance terrestre [31]. Medidas precisas de massa e raio investigam correções que possam existir para a equação de estado de matéria degenerada por elétrons, como por exemplo as correções de Coulomb [32, 33]. Investigações das variações seculares nos períodos de pulsação e na taxa de resfriamento também oferecem a oportunidade de revelar canais adicionais de perda de energia, como neutrinos oriundos do decaimento de plásmos ou partículas hipotéticas (por exemplo, áxions) [34, 35]. Observações do desvio para o vermelho gravitacional, dado por

$$z = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} - 1, \quad (30)$$

nos espectros de anãs brancas oferecem também podem oferecer testes complementares da relatividade geral no regime de campo fraco e alta densidade.

6.4 Arqueologia de sistemas planetários

Elementos pesados detectados nas atmosferas de muitas anãs brancas podem indicar a contínua acreção de objetos orbitais que foram destruídos

por forças de maré [36]. Sinais nas emissões infravermelhas além de observações dos discos de detritos corroboram esse cenário, permitindo análises da composição global de materiais exoplanetários [37–39]. Os resultados obtidos até agora revelam evidências de objetos orbitais diferenciados [40]. Estes estudos fornecem informações valiosas sobre formação planetária e a evolução dinâmica em épocas distantes do colapso da estrela hospedeira.

6.5 Distâncias cosmológicas e supernovas do tipo Ia

Em sistemas binários próximos, anãs brancas de carbono–oxigênio podem iniciar explosões termonucleares ao se aproximarem da massa de Chandrasekhar [41], cujo valor mais preciso é

$$M_{\text{Ch}} \approx 1.44 M_{\odot}. \quad (31)$$

A notável uniformidade das curvas de luz das supernovas do tipo Ia [42] fundamenta seu papel como velas padrão, permitindo portanto uma medição precisa de distâncias em escala cosmológica [42, 43]. Tais medições levaram à descoberta da aceleração cósmica que, até hoje continua sendo um estudo essencial para a caracterização da energia escura [44, 45].

6.6 Fontes de ondas gravitacionais e evolução de sistemas binários

Sistemas binários compostos por duas anãs brancas, com períodos orbitais que variam de minutos a horas, constituem uma das fontes garantidas mais abundantes para futuro observatórios espaciais de ondas gravitacionais, como o LISA [46, 47]. As taxas de espiralamento e fusão desses sistemas alimentam modelos de síntese populacional de binárias [46], enquanto a detecção de sinais com variação de frequência (os famosos “chirping”) permitirá medições precisas da decaência orbital, das razões de massa dos objetos que compõe o sistema e testes de acoplamento por maré em sistemas compactos [48].

6.7 Sondando matéria escura e física além do modelo padrão

Devido à sua gravidade relativamente alta, anãs brancas podem, potencialmente, capturar

partículas de matéria escura por meio de espalhamento em seus interiores densos [49]. A aniquilação ou o decaimento da matéria escura acumulada pode modificar suas curvas de resfriamento, oferecendo restrições indiretas à diferente modelos de matéria escura como partículas massivas fracamente interativas (WIMPs) e áxions [49, 50]. Além disso, buscas por variações em constantes fundamentais (por exemplo, a constante de estrutura fina α) utilizando espectroscopia de alta resolução das atmosferas de anãs brancas investigam aspectos da física em escalas cosmológicas [51, 52].

7 Conclusões

A análise desde o princípio da exclusão de Pauli até o equilíbrio hidrostático mostra que as anãs brancas são sustentadas por uma pressão puramente quântica, sem paralelo nos gases clássicos. A equação de estado para um gás degenerado de férmions não interagentes, quando aplicada às equações de estrutura estelar, explica seus pequenos raios e densidades extremas. O limite de Chandrasekhar, obtido ao balancear energia de Fermi e energia gravitacional, define a maior massa estável que uma anã branca pode ter antes de colapsar gravitacionalmente, dando origem, potencialmente, a estrelas de nêutrons ou buracos negros.

Dentro do contexto da astrofísica de modo geral, anãs brancas se mostram como excelentes “laboratórios” estelares: podem funcionar como relógios precisos para datar populações estelares, fundamentais no estudo da evolução galáctica; fornecem condições ideais para testar correções à física de matéria degenerada e podem impor limites observáveis para a existência de partículas exóticas; além disso são a base para supernovas tipo Ia, principais velas padrão na cosmologia moderna. Sistemas binários de anãs brancas, finalmente, se apresentam como fontes abundantes e potencialmente detectáveis (em futuros experimentos, como o LISA) de ondas gravitacionais, prometendo revelar detalhes inéditos sobre a dinâmica de objetos compactos.

O contínuo avanço nas observações — com missões de alta precisão como Gaia e futuras sondas gravitacionais — combinado a modelos teóricos

que incorporam efeitos relativísticos e microscópicos mais sofisticados, abrirá caminho para refinar ainda mais nosso entendimento desses corpos. Em última análise, estudar anãs brancas é reconhecer que, as diversas maneiras em que se manifestam contribuem para contar a história de como o universo evolui, desde as menores partículas até a expansão cósmica.

Sobre os autores

Marco Moriconi (mmoriconi@id.uff.br) é graduado e mestre em Física pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e doutor em Física pela Princeton University, com passagens como pós-doutorando pelo The Abdus Salam International Centre For Theoretical Physics (ICTP) - Itália, Cornell University - EUA e Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Atualmente é professor associado da Universidade Federal Fluminense (UFF), trabalhando na área de física teórica com ênfase em teoria geral de partículas e campos, teoria de campo estatística em duas dimensões, especialmente simetria conforme e modelos integráveis. Atua como colunista da revista Ciência Hoje (Qual o Problema?), e é também membro do comitê de provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Rodrigo Negreiros (rnegreiros@id.uff.br) fez graduação em Física e mestrado em Física pela Universidade Federal Fluminense. Seu Ph.D. foi pela San Diego State University/Claremont Graduate University, EUA. Atuou como um posdoc no Frankfurt Institute for Advance Studies, na Goethe University, em Frankfurt am Main, Alemanha. Suas áreas de pesquisa envolvem principalmente física nuclear e estrelas compactas (estrelas de neutrons, estrelas de quarks, pulsares ...), astrofísica relativística, métodos numéricos e física de matéria ultra-densa. Atualmente é professor associado da Universidade Federal Fluminense (UFF).

Referências

- [1] W. Pauli, *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit*

der Komplexstruktur der Spektren, *Zeitschrift für Physik* **31**, 765 (1925).

- [2] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Brooks/Cole, 1976).
- [3] D. Koester e G. Chanmugam, *Physics of white dwarf stars*, *Reports on Progress in Physics* **53**, 837 (1990).
- [4] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Pearson, 2005), 2 ed.
- [5] S. L. Shapiro e S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (Wiley, 1983).
- [6] S. Chandrasekhar, *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*, *Astrophysical Journal* **74**, 81 (1931).
- [7] J. Iben, I., *The evolution of white dwarfs in close binaries*, *Astrophysical Journal* **277**, 333 (1984).
- [8] R. Kippenhahn e A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution* (Springer, 1990).
- [9] B. Paczynski, *Evolutionary Processes in Close Binary Systems*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **9**, 183 (1971).
- [10] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, 1939).
- [11] J. P. Cox e R. T. Giuli, *Principles of Stellar Structure*, vol. 1-2 (Gordon and Breach Science Publishers, 1968).
- [12] P.-E. Tremblay, P. Bergeron e A. Gianninas, *An Improved Spectroscopic Analysis of DA White Dwarfs from the Sloan Digital Sky Survey Data Release 4*, *Astrophysical Journal* **730**, 128 (2011).
- [13] M. Rotondo et al., *Unified approach to the structure of white dwarfs*, *Physical Review C* **83**, 045805 (2011).
- [14] L. A. Carvalho, J. A. Rueda e R. Ruffini, *General Relativistic effects in the structure of massive white dwarfs*, *General Relativity and Gravitation* **50**, 38 (2018).

- [15] P. Haensel, A. Y. Potekhin e D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure* (Springer, 2007).
- [16] B. W. Carroll e D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics* (Addison-Wesley, 2006), 2 ed.
- [17] D. E. Winget e S. O. Kepler, *Pulsating White Dwarf Stars and Precision Asteroseismology*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **46**(1), 157 (2008).
- [18] J. L. Provencal et al., *Testing the White Dwarf Mass-Radius Relation with Hipparcos*, *The Astrophysical Journal* **494**(2), 759 (1998).
- [19] L. G. Althaus et al., *Evolutionary and pulsational properties of white dwarf stars*, *The Astronomy and Astrophysics Review* **18**(4), 471 (2010).
- [20] G. Fontaine e P. Brassard, *The Pulsations of White Dwarf Stars*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific **113**, 409 (2001).
- [21] L. D. Landau, *On the theory of stars*, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **1**, 285 (1932).
- [22] V. Weidemann, *The initial-final mass relation of white dwarfs*, *Astronomy and Astrophysics* **363**, 647 (2000).
- [23] S. O. Kepler et al., *New white dwarf stars in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 10*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **446**(4), 4078 (2015).
- [24] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (Springer, 2000).
- [25] P.-E. Tremblay et al., *Fundamental parameter accuracy of DA and DB white dwarfs in Gaia Data Release 2*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **482**(4), 5222 (2018).
- [26] S. Catalán et al., *The initial-final mass relationship of white dwarfs revisited: effect on the luminosity function and mass distribution*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **387**, 1693 (2008).
- [27] G. Fontaine, P. Brassard e P. Bergeron, *The Potential of White Dwarf Asteroseismology*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific **113**, 409 (2001).
- [28] A. H. Córscico, L. G. Althaus e M. M. Miller Bertolami, *Pulsating white dwarfs: new insights*, *Astronomy and Astrophysics Review* **27**, 7 (2019).
- [29] L. Mestel, *On the theory of white dwarf stars. I. The energy sources of white dwarfs*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **112**, 583 (1952).
- [30] B. M. S. Hansen et al., *The White Dwarf Cooling Sequence of the Globular Cluster Messier 4*, *The Astrophysical Journal Letters* **574**(2), L155 (2002). [ArXiv:astro-ph/0205087](#).
- [31] D. Lamb e H. Van Horn, *Evolution of crystallizing pure C-12 white dwarfs*, *Astrophysical Journal* **200**, 306 (1975).
- [32] G. Chabrier e A. Y. Potekhin, *Equation of state of fully ionized electron-ion plasmas*, *Physical Review E* **58**, 4941 (1998).
- [33] L. Segretain et al., *Cooling theory of crystallized white dwarfs*, *Astrophysical Journal* **434**, 641 (1994).
- [34] N. Itoh et al., *Neutrino Energy Loss in Stellar Interiors. VII. Pair, Photo-, Plasma, Bremsstrahlung, and Recombination Neutrino Processes*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **102**, 411 (1996).
- [35] G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics: The Astrophysics of Neutrinos, Axions, and Other Weakly Interacting Particles* (University of Chicago Press, 1996).
- [36] B. Zuckerman et al., *Metal Lines in DA White Dwarfs*, *The Astrophysical Journal* **596**(1), 477 (2003).

- [37] M. Jura, *A Tidally Disrupted Asteroid around the White Dwarf G29-38*, *The Astrophysical Journal Letters* **584**(2), L91 (2003).
- [38] B. T. Gänsicke et al., *A Gaseous Metal Disk Around a White Dwarf*, *Science* **314**(5807), 1908 (2006).
- [39] J. Farihi, M. Jura e B. Zuckerman, *Infrared signatures of disrupted minor planets at white dwarfs*, *The Astrophysical Journal* **694**(2), 805 (2009).
- [40] S. Xu e M. Jura, *The Drop during Less than 300 Days of a Dusty White Dwarf's Infrared Luminosity*, *The Astrophysical Journal* **792**(2), L39 (2014).
- [41] K. Nomoto, F.-K. Thielemann e K. Yokoi, *Accreting White Dwarf Models for Type I Supernovae. III. Carbon Deflagration at High Density*, *Astrophysical Journal* **286**, 644 (1984).
- [42] M. M. Phillips, *The absolute magnitudes of Type IA supernovae*, *The Astrophysical Journal* **413**, L105 (1993).
- [43] M. Hamuy et al., *The Absolute Luminosities of the Calan/Tololo Type IA Supernovae*, *The Astronomical Journal* **112**, 2391 (1996).
- [44] A. G. Riess et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [45] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, *Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).
- [46] G. Nelemans et al., *Population synthesis for double white dwarfs: I. Close detached systems*, *Astronomy & Astrophysics* **365**(3), 491 (2001).
- [47] V. Korol et al., *Prospects for detection of detached double white dwarf binaries with Gaia, LSST and LISA*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **470**(2), 1894 (2017).
- [48] T. R. Marsh, *Double white dwarfs and LISA*, *Classical and Quantum Gravity* **28**, 094019 (2011).
- [49] G. Bertone, D. Hooper e J. Silk, *Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints*, *Physics Reports* **405**, 279 (2005).
- [50] J. Isern et al., *Axions and the white dwarf luminosity function*, *Journal of Physics: Conference Series* **172**(1), 012005 (2009).
- [51] W. Ubachs et al., *Colloquium: Search for a drifting proton-electron mass ratio from H_2* , *Reviews of Modern Physics* **88**(2), 021003 (2016).
- [52] J. C. Berengut et al., *Limits on the Dependence of the Fine-Structure Constant on Gravitational Potential from White-Dwarf Spectra*, *Physical Review Letters* **111**, 010801 (2013).