

# A sinfonia matemática do mundo quântico

Giuseppe Dito

Instituto de Matemática da Borgonha, França

## Resumo

Este texto explora a profunda e bela interação entre a física quântica e a matemática. Viajamos da crise da física clássica na virada do século XX até as elegantes e abstratas estruturas matemáticas que definem a mecânica quântica moderna. Veremos como problemas físicos forçaram a invenção de novas matemáticas e como as estruturas matemáticas, por sua vez, forneceram a linguagem para descrever o mundo quântico. Figuras-chave como Planck, Einstein, Heisenberg, Born, von Neumann, Weyl e Dirac nos guiarão, revelando uma história em que a intuição física e o formalismo matemático estão inextrinavelmente ligados.

## Abstract

This text explores the profound and beautiful interplay between quantum physics and mathematics. We journey from the crisis of classical physics at the turn of the 20th century to the elegant, abstract mathematical frameworks that define modern quantum mechanics. We will see how physical problems forced the invention of new mathematics and how mathematical structures, in turn, provided the language to describe the quantum realm. Key figures like Planck, Einstein, Heisenberg, Born, von Neumann, Weyl, and Dirac will guide us, revealing a story where physical intuition and mathematical formalism are inextricably linked.

**Palavras-chave:** mecânica quântica; formalismo matemático; física-matemática.

**Keywords:** quantum mechanics, mathematical formalism, mathematical-physics.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v6n2.50080](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v6n2.50080)

## 1 Planck e a radiação do corpo negro

No final do século XIX, a física enfrentou uma grande crise: a eletrodinâmica e a termodinâmica clássicas não conseguiam explicar a distribuição da radiação emitida por uma cavidade aquecida, conhecida como radiação de corpo negro.

Medidas experimentais mostraram um espectro característico, com intensidade aumentando com a frequência, atingindo um pico em determinado valor e, em seguida, diminuindo. A teoria clássica, no entanto, previa uma intensidade infinita em altas frequências — a chamada catástrofe ultravioleta.

Max Planck (Figura 1), no outono de 1900, introduziu uma ideia radicalmente nova: a quantização das energias do oscilador. Essa hipótese levou à lei correta da radiação de corpo negro e marcou o início da teoria quântica.

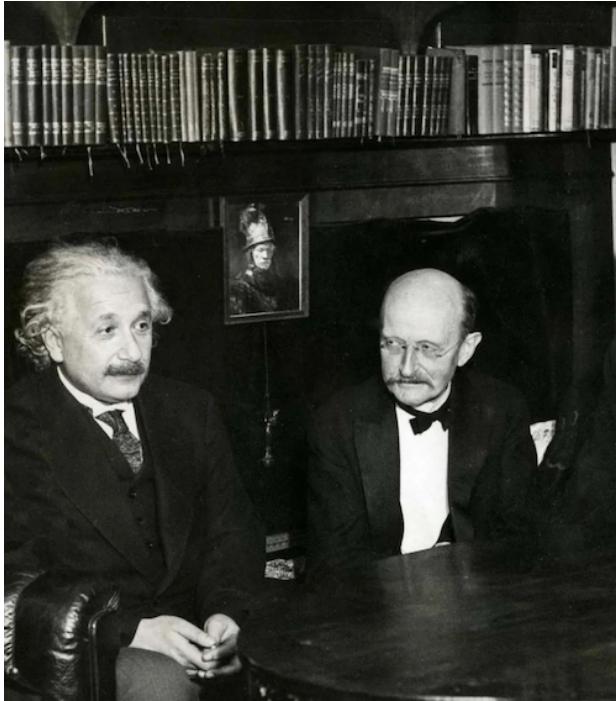
### 1.1 Corpo negro

Todo sólido emite radiação, geralmente invisível a olho nu à temperatura ambiente (radiação infravermelha). Para estudar a radiação de um objeto à temperatura  $T$ , os físicos imaginam um objeto ideal que absorve toda a energia electromagnética incidente, sem refletir ou transmitir nenhuma energia. Isso é chamado de corpo negro.

Um corpo negro emite radiação que depende apenas de sua temperatura  $T$ , geralmente expressa em Kelvin ( $0\text{ K} = -273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Como absorve toda a luz incidente, ele parece completamente preto — como um objeto coberto de fuligem. A energia absorvida apenas aquece o corpo negro até a temperatura  $T$  e não se mistura com a radiação que emite.

### 1.2 Alguns fatos

Um corpo negro emite radiação de qualquer frequência  $\nu$  ou comprimento de onda  $\lambda$ . Essas



**Figura 1:** Albert Einstein (1879–1955) e Max Planck (1858–1947)

grandezas são relacionadas pela seguinte relação:

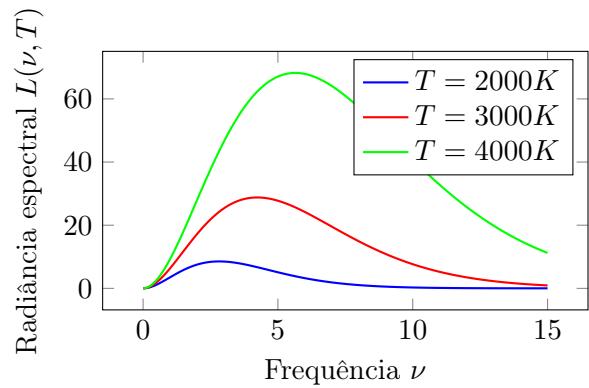
$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad (1)$$

onde  $c = 2,99792458 \times 10^8$  m/s é a velocidade da luz no vácuo.

Existem várias grandezas usadas para descrever a radiação de um corpo negro, todas elas estão intimamente relacionadas. Uma das mais importantes é a radiância espectral  $L(\nu, T)$ . A uma dada frequência  $\nu$  e temperatura  $T$ ,  $L(\nu, T)$  é a potência emitida por unidade de área, por unidade de ângulo sólido e por unidade de frequência.

As seguintes características da radiação de corpo negro eram conhecidas no final do século XIX:

1. Em baixas frequências,  $L(\nu, T)$  aumenta aproximadamente como  $C\nu^2T$  onde  $C$  é uma constante.
2. Em altas frequências,  $L(\nu, T)$  diminui exponencialmente.
3. O pico do espectro se desloca para frequências mais altas à medida que a temperatura  $T$  aumenta.



**Figura 2:** Radiância espectral  $L(\nu, T)$  para diversas temperaturas.

A Figura 2 ilustra essas características (usando unidades arbitrárias).

O item 1 acima é chamado de lei de Rayleigh-Jeans e foi derivado teoricamente da física clássica por Lord Rayleigh em junho de 1900. Em altas frequências, previu energia infinita (a “catastrofe ultravioleta”), o que contradizia experimentos, porém previu o comportamento correto para baixas frequências.

O item 2 é conhecido como aproximação de Wien (1896). Mais precisamente, Wien estabeleceu que

$$L(\nu, T) = C\nu^3 e^{-C\nu/T},$$

onde  $C$  é uma constante. Ele se ajusta corretamente aos dados experimentais para altas frequências, mas não cumpre a lei de Rayleigh-Jeans em baixas frequências: comporta-se como  $\nu^3$  em vez de  $\nu^2$ .

O item 3 é conhecido como lei do deslocamento de Wien. Se, para uma dada temperatura,  $\nu_{\text{máx}}$  designa a frequência na qual a radiância espectral atinge seu máximo (cf. Figura 2). Usando um argumento termodinâmico, Wien obteve que

$$\nu_{\text{máx}} = bT, \quad (2)$$

onde  $b$  é uma constante aproximadamente igual a  $5,8789 \times 10^{10} \text{ K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . De forma equivalente, a lei de deslocamento de Wien é geralmente escrita na forma de comprimento de onda,

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{b}{T}, \quad b \approx 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (3)$$

Para uma discussão detalhada dos aspectos históricos e físicos da radiação do corpo negro, o leitor pode consultar [1, 2].

### 1.3 A solução de Planck

Vimos que experimentos com radiação de corpo negro revelaram uma discrepância marcante com a física clássica. Embora a lei de Rayleigh-Jeans descrevesse com precisão a radiação em baixas frequências, ela previa uma divergência não física de energia em altas frequências, a chamada catástrofe ultravioleta. Essa falha motivou Max Planck a buscar uma fórmula teórica que reproduzisse o espectro observado em todas as frequências. A hipótese-chave de Planck era revolucionária: ele propôs que a radiação eletromagnética pode ser emitida ou absorvida apenas em pacotes discretos. Portanto, não poderíamos ter energias arbitrariamente pequenas, mas apenas trocar energia em unidades discretas, ou quanta, proporcionais à sua frequência.

$$E = nh\nu, \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

e  $h$  uma nova constante fundamental (agora conhecida como constante de Planck). Seu valor atual é fixado em

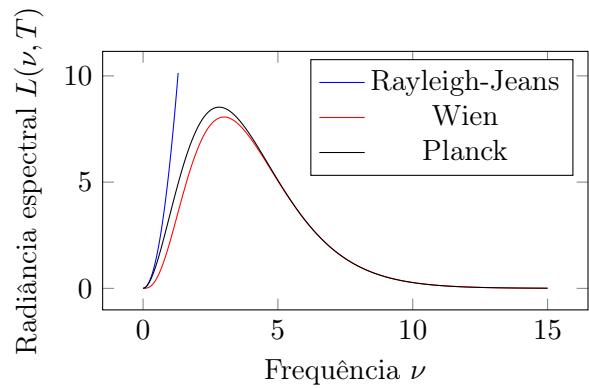
$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (5)$$

e é usado desde 2019 para definir o quilograma.

Usando essa suposição e argumentos termodinâmicos padrão, Planck derivou a fórmula para a radiância espectral:

$$L(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (6)$$

onde  $k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  é a constante de Boltzmann. Esta fórmula conecta elegantemente o comportamento de baixa frequência previsto pela lei de Rayleigh-Jeans e a aproximação de Wien de alta frequência (ver Figura 3), reproduzindo com precisão os dados experimentais em todo o espectro. Quando Planck introduziu a ideia de quantização de energia, ela foi inicialmente considerada um dispositivo matemático puramente formal, sem qualquer interpretação física clara. Apesar disso, a hipótese matemática revelou-se revolucionária: forneceu o primeiro vislumbre do comportamento quântico e, por fim, lançou as bases da teoria quântica, remodelando profundamente nossa compreensão do mundo microscópico e da natureza da troca de energia.



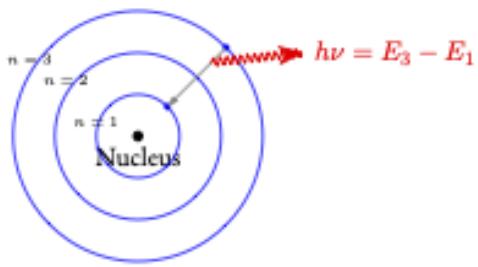
**Figura 3:** Comparação entre as distribuições de Planck, Rayleigh-Jeans e Wien da radiância espectral a uma mesma temperatura.

Em 1905, Einstein aplicou a ideia de Planck de quantização de energia à própria luz, propondo que a luz consiste em partículas, ou fôtons, cada uma carregando energia  $E = h\nu$ . Ele usou esse conceito para explicar o efeito fotoelétrico, no qual a luz que incide sobre uma superfície metálica pode ejectar elétrons. A teoria clássica não conseguia explicar as observações, como a dependência da energia do elétron da frequência da luz em vez de sua intensidade. Ao tratar a luz como fôtons, Einstein demonstrou que apenas fôtons com energia suficiente ( $h\nu$  maior que algum valor) podem liberar elétrons, fornecendo uma explicação simples e bem-sucedida para o efeito.

Einstein deu uma interpretação física e conceitual à hipótese quântica matemática formal de Planck.

## 2 Heisenberg e a mecânica matricial

A hipótese do fóton de Einstein forneceu uma explicação clara do efeito fotoelétrico e conferiu um significado físico sólido ao quantum de energia de Planck. No entanto, apesar desse sucesso, uma questão mais profunda permanecia: como os princípios da quantização poderiam ser aplicados sistematicamente à própria matéria, particularmente à estrutura dos átomos? A física clássica não conseguia explicar por que os átomos são estáveis ou por que emitem radiação apenas em frequências discretas. Esse desafio foi abordado em 1913 por Niels Bohr, que introduziu um novo modelo do átomo de hidrogênio. Ele postulou que os elétrons poderiam ocupar apenas certas “órbi-



**Figura 4:** Uma transição de elétron que emite um fóton de energia  $E_3 - E_1$ .

tas estacionárias” com momento angular quantizado, e que a radiação era emitida ou absorvida apenas quando o elétron saltava entre essas órbitas. A frequência  $\nu$  da luz emitida ou absorvida é então determinada por

$$h\nu = E_i - E_f, \quad (7)$$

onde  $E_i$  e  $E_f$  são as energias das órbitas inicial e final (ver Figura 4). Para o átomo de hidrogênio, os níveis de energia permitidos assumem a forma

$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

onde eV (elétron-volt) é uma unidade de energia, definida como a energia ganha por um único elétron quando acelerado através de uma diferença de potencial de um volt, e corresponde a aproximadamente  $1,602 \times 10^{-19}$  J. Com esses níveis de energia quantizados, o modelo de Bohr considera com sucesso as linhas espectrais observadas do hidrogênio. De fato, o comprimento de onda  $\lambda$  do fóton emitido durante a transição de uma órbita mais alta  $n$  para uma órbita mais baixa  $m$  é dado pela famosa fórmula de Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > m, \quad (9)$$

onde  $R \approx 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  é a constante de Rydberg.

Embora o modelo de Bohr tenha sido um grande avanço, ele ainda era um híbrido de ideias clássicas e quânticas, e não conseguia explicar átomos mais complexos ou por que a quantização funcionava. Essa tensão conceitual abriu caminho para o avanço de Heisenberg (Figura 5) em 1925, quando ele abandonou completamente a noção de órbitas de elétrons e reformulou a teoria quântica em termos de grandezas observáveis, como frequências e intensidades de transição.



**Figura 5:** Werner Heisenberg (1901–1976)

## 2.1 Não-comutatividade

O breve resumo do famoso artigo de Heisenberg de 1925 (uma tradução em inglês pode ser encontrada em [3, p. 216], e uma tradução para o português é apresentada nesta edição dos CdA) diz:

O presente artigo busca estabelecer uma base para a mecânica quântica teórica fundada exclusivamente em relações entre grandezas que, em princípio, são observáveis

A abordagem de Heisenberg representa um afastamento radical da mecânica clássica. Em vez de tentar descrever o movimento preciso dos elétrons em órbitas não observáveis, ele adotou um ponto de vista positivista, concentrando-se apenas em grandezas que podem, pelo menos em princípio, ser medidas experimentalmente — principalmente as frequências e intensidades da radiação emitida ou absorvida pelos átomos.

Para implementar essa ideia, Heisenberg propôs representar grandezas físicas como posição  $x$  e momento  $p$  como matrizes de números  $x_{mn}$  correspondentes a transições entre estados de energia  $n \rightarrow m$ . Cada elemento da matriz codifica a amplitude da transição correspondente, diretamente relacionada às linhas espectrais ob-

servadas.

Uma percepção crucial da formulação de Heisenberg é que essas grandezas não comutam em geral: a ordem em que são multiplicadas importa. Essa não comutatividade é a característica matemática essencial que distingue a mecânica quântica da mecânica clássica e naturalmente leva à quantização de observáveis atômicos como a energia. De fato, a multiplicação  $x \cdot y$  de duas matrizes de números  $x = (x_{mn})$  e  $y = (y_{mn})$  é dada por

$$(x \cdot y)_{mn} = \sum_{k=1}^{k=\infty} x_{mk} y_{kn}, \quad (10)$$

e, em geral, tem-se que  $x \cdot y$  não é igual a  $y \cdot x$ .

Dessa forma, Heisenberg estabeleceu uma estrutura teórica consistente que reproduz os níveis discretos de energia dos átomos, sendo construída inteiramente a partir de quantidades observáveis.

## 2.2 Born e Jordan: operadores no espaço de vetores

Dois meses após a descoberta de Heisenberg, Max Born e Pascual Jordan perceberam que as matrizes de números introduzidas por Heisenberg, juntamente com a regra da multiplicação não comutativa (10), poderiam ser entendidas como matrizes de dimensão infinita. É importante ressaltar que essa estrutura matemática não surgiu de considerações abstratas, mas naturalmente da ideia física de Heisenberg: que apenas grandezas observáveis - frequências de transição e amplitudes - deveriam ser usadas para descrever fenômenos atômicos.

Na época, a maioria dos físicos não estava familiarizada com o cálculo matricial, mas a experiência de Born como assistente de Hilbert permitiu-lhe reconhecer a importância dessa estrutura formal. Born e Jordan sugeriram interpretar as matrizes de Heisenberg como operadores lineares atuando em um espaço vetorial de estados quânticos, fornecendo uma maneira sistemática e matematicamente rigorosa de lidar com as grandezas não comutativas.

Assim, o formalismo de operadores da mecânica quântica surgiu diretamente de uma tentativa, motivada fisicamente, de descrever transições atômicas em termos de observáveis. Ele preservou todos os sucessos empíricos da abordagem

de Heisenberg, ao mesmo tempo em que lhe conferiu uma estrutura algébrica clara, lançando as bases para desenvolvimentos subsequentes, como as relações de comutação canônicas e o formalismo completo da teoria quântica.

Após receber o artigo de Heisenberg em setembro de 1925, Paul Dirac chegou, independentemente, à mesma conclusão de Born e Jordan: as grandezas físicas introduzidas por Heisenberg poderiam ser representadas como operadores atuando sobre estados quânticos. Dirac também enfatizou a profunda conexão entre esses operadores e a estrutura canônica da mecânica clássica, fornecendo uma formulação complementar e elegante do formalismo de operadores. O artigo de Dirac antecipa, em parte, a formalização da mecânica quântica apresentada no trabalho de 1926 de Born, Jordan e Heisenberg [3, p. 321].

## 3 Os fundamentos do espaço de Hilbert: John von Neumann

Em meados da década de 1920, surgiram diversas abordagens diferentes, porém relacionadas, à mecânica quântica. Werner Heisenberg (1925) introduziu uma nova maneira de descrever átomos, concentrando-se apenas em grandezas observáveis, como as frequências e intensidades da radiação emitida durante as transições. Seu método levou a um tipo incomum de aritmética, em que a ordem da multiplicação importava — o nascimento da mecânica matricial. Max Born e Pascual Jordan logo reconheceram que as matrizes de Heisenberg eram, na verdade, matrizes e reformularam a teoria em termos de operadores, dando-lhe uma estrutura algébrica mais clara. Quase ao mesmo tempo, Paul Dirac, inspirado pelo artigo de Heisenberg, chegou, independentemente, ao mesmo ponto de vista sobre operadores. Dirac também notou uma profunda analogia com a mecânica clássica e demonstrou que os comutadores quânticos desempenham o papel dos colchetes de Poisson clássicos, uma ideia que se tornaria central no desenvolvimento posterior da teoria.

Em 1926, Erwin Schrödinger seguiu um caminho muito diferente. Inspirado pela proposta de ondas da matéria de de Broglie, ele introduziu a mecânica ondulatória, descrevendo o elétron não como uma partícula pontual orbitando o núcleo,

mas como uma função de onda espalhada no espaço. A equação de Schrödinger, uma equação diferencial que governa a evolução temporal dessa onda, tornou possível calcular os níveis de energia atômica e as linhas espectrais com precisão impressionante. Sua formulação era mais intuitiva para muitos físicos, pois se assemelhava aos métodos familiares da teoria ondulatória clássica. Em um ano, o próprio Schrödinger demonstrou que a mecânica ondulatória e a mecânica matricial eram de fato matematicamente equivalentes, embora expressas em linguagens muito diferentes.

Nesse ponto, a mecânica quântica era extremamente bem-sucedida na explicação de dados experimentais. Por exemplo, o átomo de hidrogênio foi resolvido independentemente por Pauli e Dirac, mas seus fundamentos eram fragmentados: as matrizes de Heisenberg, o cálculo de operadores de Dirac e as funções de onda de Schrödinger forneciam ferramentas poderosas, mas seu significado matemático preciso não era totalmente claro.

Foi aqui que John von Neumann (Figura 6) deu sua contribuição decisiva. No outono de 1926, o jovem von Neumann chegou a Göttingen, vindo de Budapeste, para servir como assistente de Hilbert, onde foi imediatamente exposto aos avanços recentes de Heisenberg e seus contemporâneos. Von Neumann realizou vários estudos importantes sobre a emergente mecânica quântica; em particular, demonstrou que as representações das relações de comutação canônicas são essencialmente únicas.

Em seu livro de 1932, *Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica* [4], ele unificou todas essas abordagens dentro da rigorosa estrutura dos espaços de Hilbert.<sup>1</sup> Um exemplo típico de espaço de Hilbert é o espaço vetorial, que consiste em sequências complexas somáveis ao quadrado  $\ell^2$ . Seus elementos consistem em sequências de números complexos  $z = (z_n)_n$  tais que  $\sum_n |z_n|^2 < \infty$ . O espaço  $\ell^2$  vem com um produto escalar definido por

$$\langle z, z' \rangle = \sum_n z_n^* z'_n, \quad (11)$$

onde o complexo-conjugado de um número com-

<sup>1</sup>Von Neumann nomeou esses espaços em homenagem a David Hilbert, em vista das contribuições de Hilbert sobre equações integrais onde o espaço  $\ell^2$  apareceu.



Figura 6: John von Neumann (1903–1957)

plexo  $a$  é denotado por  $a^*$ . O espaço de Hilbert  $\ell^2$  é isomorfo ao espaço de funções integráveis ao quadrado no espaço euclidiano  $R^n$  que aparece na abordagem de Schrödinger.

Na formulação de von Neumann, estados são, até um fator de fase, vetores normalizados em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , observáveis são operadores autoadjuntos, em  $\mathcal{H}$ ; ou seja, operadores que satisfazem  $A = A^*$ . Quando o operador é contínuo (limitado), o adjunto  $A^*$  é definido por

$$\langle z, Az' \rangle = \langle A^* z, z' \rangle, \quad \forall z, z' \in \mathcal{H}. \quad (12)$$

O ato de medição é descrito usando operadores de projeção. Ele provou o Teorema Espectral, que garante que tais operadores podem ser decompostos em autovalores e autovetores, dando assim um significado matemático preciso às grandezas mensuráveis.

O trabalho de Von Neumann mostrou que as abordagens aparentemente diferentes de Heisenberg e Schrödinger eram apenas duas faces da mesma teoria, e ele forneceu a clareza matemática que transformou a mecânica quântica de uma coleção de intuições brilhantes em uma estrutura científica consistente. Dessa forma, von Neumann deu ao assunto a linguagem rigorosa que ainda é usada hoje.

Além de seu livro de 1932, von Neumann continuou a desenvolver a estrutura matemática da teoria quântica. Em colaboração com Francis Murray, ele introduziu a teoria das álgebras de operadores, agora conhecidas como álgebras de von Neumann. Estas são álgebras de operadores limitados em um espaço de Hilbert que são fechadas por adjuntos e por limites na topologia fraca dos operadores. Essa generalização forneceu ferramentas poderosas para estudar sistemas infinitos e lançou as bases para grande parte da análise funcional moderna. A abordagem da álgebra de operadores de Von Neumann tornou-se posteriormente central para a mecânica estatística quântica e a teoria quântica de campos, onde a estrutura das álgebras de observáveis codifica informações físicas sobre localidade, simetria e limites termodinâmicos.

#### 4 Simetrias e representações

Um passo decisivo na conexão da matemática com a física quântica foi dado pelo influente livro de Hermann Weyl (Figura 7), de 1928, *Teoria dos Grupos e Mecânica Quântica*. Neste trabalho, Weyl introduziu o uso sistemático da teoria da representação de grupos na mecânica quântica, fornecendo uma estrutura rigorosa para a compreensão das simetrias dos sistemas quânticos. Um dos exemplos mais importantes diz respeito à descrição do spin. Ao contrário do momento angular orbital, que surge do movimento de um elétron ao redor do núcleo, o spin é uma forma intrínseca do momento angular. O conceito de simetria desempenha um papel fundamental na teoria quântica: levar em consideração as simetrias não apenas ajuda a resolver problemas físicos, mas também fornece uma visão conceitual profunda sobre a natureza das interações fundamentais.

Matematicamente, as simetrias das rotações no espaço tridimensional são descritas pelo grupo  $SO(3)$ . No entanto, a mecânica quântica revela que partículas como o elétron se transformam não sob o próprio  $SO(3)$ , mas sob sua dupla cobertura, o grupo  $SU(2)$ , que consiste em  $2 \times 2$  matrizes unitárias. A representação não trivial mais simples de  $SU(2)$  é bidimensional e descreve estados de uma partícula com spin- $\frac{1}{2}$ . Concretamente, isso significa que um elétron pode existir



**Figura 7:** Hermann Weyl (1885–1955)

em dois estados de spin possíveis, frequentemente chamados de “spin up” ( $\uparrow$ ) e “spin down” ( $\downarrow$ ). Esses dois estados são representados por vetores de duas componentes, ou “spinôres”, sobre os quais as matrizes  $SU(2)$  atuam. Por exemplo, uma rotação em torno do eixo z é descrita, na *representação de spin*, pela matriz diagonal

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Este formalismo captura a propriedade contraintuitiva de que uma partícula de spin deve passar por uma rotação de 720 graus, em vez de 360 graus, para voltar ao seu estado original. Em termos matemáticos, a função de onda total que descreve um sistema de férmiões idênticos deve ser *antissimétrica* sob a troca de quaisquer duas partículas. Para satisfazer o requisito de antisimetria para férmiões, a parte do spin da função de onda deve, portanto, ser *anti-simétrica*. O único estado de spin antissimétrico é o *estado singlete*:

$$\chi_{\text{singlete}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow_1 \downarrow_2 - \downarrow_1 \uparrow_2 ). \quad (14)$$

Isso descreve dois elétrons pareados com spins opostos. Em contraste, se ambos os elétrons ten-

tassem ocupar o mesmo orbital com o mesmo spin (ambos  $\uparrow$ , por exemplo), o estado de spin seria simétrico e a função de onda total desapareceria, tornando tal configuração proibida. Esta é a essência do princípio de exclusão de Pauli: apenas dois elétrons, com spins opostos, podem ocupar o mesmo estado orbital.

Este princípio explica a estrutura da tabela periódica: os elétrons preenchem orbitais sucessivos nos átomos, dois por orbital, levando às propriedades químicas dos elementos. De forma mais ampla, ele fundamenta a estabilidade da própria matéria: sem o princípio de exclusão, todos os elétrons entrariam em colapso no estado de menor energia, e os átomos não teriam estrutura.

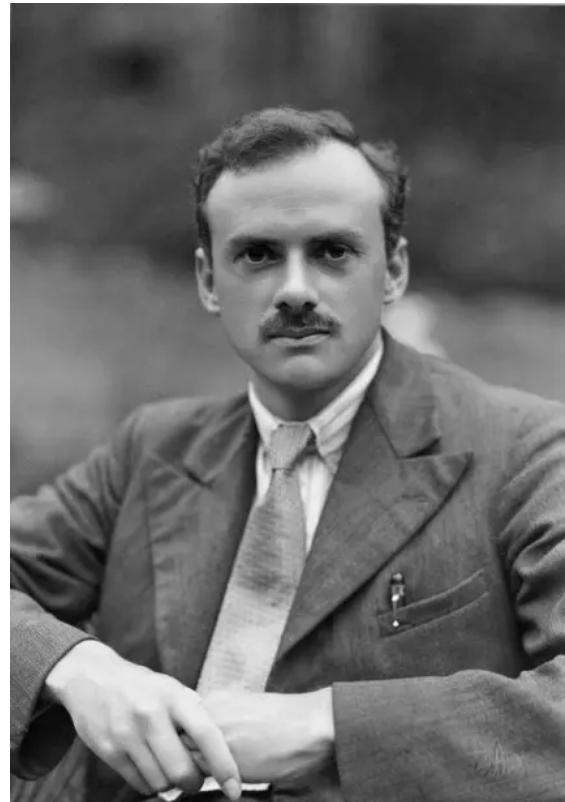
O trabalho de Weyl forneceu a ponte conceitual e matemática entre a teoria abstrata de grupos e esses fenômenos físicos concretos. Seu tratamento do spin como uma representação de  $SU(2)$  e a conexão com o princípio de exclusão de Pauli mostraram como as considerações de simetria ditam o comportamento fundamental da matéria. Posteriormente, o artigo de Eugene Wigner de 1939 estendeu esse ponto de vista às simetrias do próprio espaço-tempo, classificando as partículas pelas representações unitárias do grupo de Poincaré. Na física moderna, essas ideias se desenvolveram na poderosa estrutura do Modelo Padrão das Partículas Elementares, onde a teoria da representação de grupos de Lie e álgebras de Lie fundamenta a classificação de partículas e a estrutura de suas interações.

## 5 Dirac e sua equação

A equação de Dirac (Figura 8) foi motivada pela necessidade de conciliar a mecânica quântica com a relatividade especial de Einstein. A equação não relativística de Schrödinger descreve bem os elétrons em baixas velocidades, mas não é invariante de Lorentz. Uma generalização relativística natural é a equação de Klein-Gordon que, para uma partícula livre de massa  $m$ , se escreve

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (15)$$

Embora esta equação seja invariante de Lorentz, ela apresenta um grande problema: a densidade



**Figura 8:** Paul Dirac (1902–1984)

de probabilidade associada não é definida positivamente, impossibilitando uma interpretação consistente de uma única partícula.

A ideia de Dirac foi construir uma equação diferencial parcial de primeira ordem, tanto no tempo quanto no espaço, cujo quadrado reproduz a equação de Klein-Gordon. Em sua forma original, a equação de Dirac é

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) \psi, \quad (16)$$

onde  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  é o operador de momento, e  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e  $\beta$  são matrizes  $4 \times 4$  atuando em um spinor de quatro componentes  $\psi$ .

As matrizes satisfazem as seguintes relações de anticomutação,

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I, \quad (17)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (18)$$

$$\beta^2 = I, \quad (19)$$

onde  $i, j = x, y, z$  e  $I$  é a matriz identidade  $4 \times 4$ . Essas relações garantem que o quadrado do operador de Dirac reproduza o operador de Klein-

Gordon:

$$\begin{aligned} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2 \right)^2 \psi = \\ \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

A equação de Dirac tem várias consequências notáveis. Ela incorpora naturalmente o spin como uma propriedade intrínseca do elétron, prevê estados de energia negativa e levou à previsão do pósitron, descoberta experimentalmente mais tarde. Além disso, fornece a base da eletrodinâmica quântica (EDQ), fornecendo uma descrição relativística consistente de elétrons e pósitrons interagindo com campos eletromagnéticos.

A descoberta do pósitron fornece outro exemplo impressionante de como a compreensão matemática pode preceder a experimentação em física. A introdução de soluções de energia negativa por Dirac inicialmente parecia ser uma consequência puramente formal da busca por uma equação quântica relativística. No entanto, essa previsão matemática abstrata antecipou a existência de uma partícula completamente nova, o pósitron, que foi observado experimentalmente quatro anos depois por Carl Anderson em 1932. Este episódio destaca um tema recorrente na física moderna: o raciocínio matemático cuidadoso pode levar a previsões profundas sobre o mundo físico, às vezes muito antes que a tecnologia ou os experimentos estejam prontos para confirmá-las.

## 6 Conclusões

O nascimento da mecânica quântica exemplifica o profundo diálogo entre matemática e física. Da quantização da energia de Planck à mecânica matricial de Heisenberg, à equação relativística de Dirac e ao uso da teoria de grupos por Weyl, observamos um padrão recorrente: intuições físicas frequentemente motivam novas matemáticas, e estruturas matemáticas guiam a descoberta de novas físicas. Essa interação tem sido central para o desenvolvimento da teoria quântica e continua sendo uma de suas características definidoras.

Neste texto, focamos nos fundamentos históricos e conceituais da mecânica quântica, mas muitos desenvolvimentos notáveis estão além desse escopo. Por exemplo, a formulação da integral de

caminho de Feynman conectou a mecânica quântica à análise de dimensão infinita, enquanto o estudo de operadores pseudo diferenciais forneceu ferramentas rigorosas para a mecânica quântica no espaço de fase. A teoria da representação de grupos de Lie, desenvolvida sistematicamente por Harish-Chandra na década de 1950, tornou-se essencial para a compreensão das simetrias de partículas e campos. A geometria do Modelo Padrão das Partículas Elementares, formulada em termos de feixes de fibras, revelou a profunda conexão entre a teoria de calibre e a geometria diferencial. Mais recentemente, o estudo de Edward Witten sobre a equação de Chern-Simons levou a direções inteiramente novas na topologia de baixa dimensão, e a quantização por deformação de Maxim Kontsevich esclareceu as estruturas algébricas abstratas subjacentes à teoria quântica.

Todos esses exemplos ilustram que a história da mecânica quântica está longe de terminar. A interação contínua entre a matemática abstrata e a compreensão física não apenas enriquece nossa compreensão do universo, mas também impulsiona a criação de áreas inteiramente novas da matemática. Esse diálogo, iniciado há quase um século, continua a inspirar físicos e matemáticos hoje.

## Agradecimentos

O autor agradece profundamente ao Prof. Júlio C. Fabris pela tradução da versão original em inglês para o português.

## Sobre o autor

Giuseppe Dito ([giuseppe.dito@ube.fr](mailto:giuseppe.dito@ube.fr)) é professor de matemática no Instituto de Matemática da Borgonha, em Dijon, França. Ele é especialista em física-matemática e se interessa particularmente pelos aspectos matemáticos da mecânica quântica e da teoria quântica de campos. Há 20 anos, é editor-chefe da revista *Letters in Mathematical Physics*, publicada pela Springer-Nature.

**Referências**

- [1] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [2] F. K. Richtmyer, E. H. Kennard e J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics* (McGraw-Hill, New York, 1969), 6th ed.
- [3] B. L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (Dover, New York, 1967).
- [4] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).