

Leis de Kepler: inferindo a massa de Sagittarius A*

Mateus B. Ferreira e Adriano M. Oliveira

Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Guarapari

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar uma abordagem investigativa para o estudo dos buracos negros à luz da Mecânica Newtoniana, com uma formulação matemática desenvolvida por um estudante do ensino médio. A proposta envolve o uso de conceitos fundamentais como as Leis de Newton, Leis de Kepler e Lei da Gravitação Universal. O estudo parte de uma contextualização histórica e teórica, passando por uma breve discussão sobre a constatação científica da existência dos buracos negros, com destaque ao caso de Sagittarius A*, objeto supermassivo localizado no centro da Via Láctea. Por meio da análise orbital de estrelas próximas a esse objeto, com base em dados da literatura, usando a Terceira Lei de Kepler, estimou-se sua massa. Os dados foram tratados usando uma planilha, com isso, fomos capazes de realizar uma análise estatística. A comparação entre os resultados obtidos, a saber $(4,46 \pm 0,01) \times 10^6 M_{\odot}$, e aqueles encontrados na literatura, mostrou uma incerteza de $\approx 4\%$. Assim, evidencia-se o potencial da mecânica clássica como ferramenta introdutória no ensino de conceitos avançados em astronomia.

Abstract

This article aims to present an investigative approach to the study of black holes in light of Newtonian Mechanics, with a mathematical formulation developed by a high school student. The proposal involves the use of fundamental concepts such as Newton's Laws, Kepler's Laws, and the Law of Universal Gravitation. The study begins with a historical and theoretical contextualization, followed by a brief discussion of the scientific confirmation of the existence of black holes, highlighting the case of Sagittarius A*, a supermassive object located at the center of the Milky Way. Through orbital analysis of stars near this object, based on literature data, and using Kepler's Third Law, its mass was estimated. The data were processed using a spreadsheet, allowing for statistical analysis. The comparison between the obtained results, namely $(4,46 \pm 0,01) \times 10^6 M_{\odot}$, and those found in the literature showed an uncertainty of $\approx 4\%$. Thus, the potential of classical mechanics as an introductory tool in teaching advanced concepts in astronomy becomes evident.

Palavras-chave: buraco negro; leis de Newton; leis de Kepler; Sagittarius A*.

Keywords: black hole; Newton's laws; Kepler's laws; Sagittarius A*.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v7n1.51335](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v7n1.51335)

1 Introdução

Durante muito tempo a existência dos buracos negros foi considerada uma hipótese apenas matemática, pois não havia evidências observacionais que confirmassem sua realidade física. As previsões matemáticas obtidas pelo físico alemão Karl Schwarzschild (1916) [1] mostram que :

$$r = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1)$$

sendo G a constante universal da gravitação, M a massa do corpo que gera o campo gravitacional e c a velocidade da luz [2,3]. Esse valor define o chamado raio de Schwarzschild, que representa a

menor distância a partir da qual nem mesmo a luz pode escapar, chamada de horizonte de eventos.

A ideia da existência dos buracos negros começou a mudar em 1939 com os estudos de Oppenheimer e Snyder [4]. Na ocasião eles demonstraram, a partir das equações de campo da Relatividade Geral, que estrelas, com determinada massa, colapsariam de forma irreversível, dando origem a um buraco negro.

Em 1971, Remo Ruffini e John Wheeler publicaram o artigo *Introducing the black hole* na revista *Physics Today*, o primeiro trabalho técnico que traz explicitamente o termo “buraco negro” em seu título [5]. Esse trabalho não apenas con-



Figura 1: Registro fotográfico da sombra do buraco negro M87*, realizado em 2019 pelo projeto *Event Horizon Telescope* (EHT).

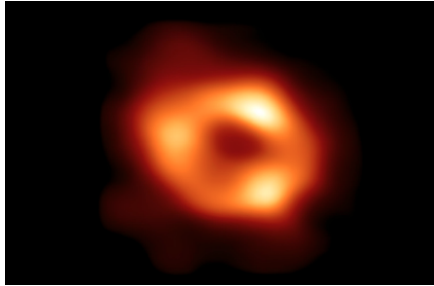


Figura 2: Registro fotográfico da sombra do buraco negro Sagittarius A*, obtido em 2022 pelo projeto EHT.

solidou o uso popular do nome, mas também destacou a mudança de paradigma que a comunidade científica vivenciava: os buracos negros deixavam de ser tratados como meras soluções matemáticas exóticas e passavam a ser encarados como objetos astrofísicos plausíveis, sujeitos à investigação observacional. A confirmação definitiva veio em 2019, com a imagem do buraco negro no centro da galáxia M87, obtida pela colaboração do *Event Horizon Telescope* (EHT),¹ mostrada na (Figura 1). Em 2022, a mesma equipe revelou a imagem do Sagittarius A*, situado no centro da Via Láctea e tema central deste trabalho, apresentada na (Figura 2).

Esse registro confirmou que a Teoria da Relatividade Geral (TRG) [6], é o modelo que melhor descreve a dinâmica gravitacional em regiões de campo intenso. A expressão das equações de campo, presentes na TRG, mostra como a matéria e a energia deformam o espaço-tempo. Assim, ao resolver as equações de campo para o vácuo em um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, obtém-se a métrica de Schwarzschild. Esta, por sua vez, apresenta duas singularidades: uma em $r = 0$ e a outra está apresentada em (1).

¹<https://www.haystack.mit.edu/astronomy/astronomy-projects/event-horizon-telescope/>.

Aqui, utilizando uma formulação baseada na mecânica newtoniana e usando os dados orbitais de estrelas próximas ao centro da galáxia, obteve-se um valor para massa deste de $(4,46 \pm 0,01) \times 10^6 M_{\odot}$, o que representa um desvio de $\approx 4\%$ dos valores encontrados na literatura [7]. A seguir vamos apresentar como esse resultado foi obtido. Para deixar o processo mais didático, apresentamos as Leis de Newton, na Seção 2, que explicam tanto a dinâmica do movimento dos corpos quanto as forças que atuam neles. Sua combinação com as leis de Kepler, apresentada na Seção 3, possibilita a obtenção de conceitos como as órbitas e períodos de corpos na nossa galáxia. Na Seção 4, apresentamos uma breve discussão sobre o buraco negro presente no centro da nossa galáxia, em seguida na Seção 5, aplicamos os dados observacionais obtidos na literatura de órbitas de estrelas próximas a Sagittarius A*, e, por fim, concluímos o trabalho com a discussão e os resultados.

2 Leis de Newton

A partir de uma fundamentação empírica e racional, Isaac Newton estabeleceu três leis que explicam o comportamento dos corpos, criando a base da Mecânica Clássica [8]. A formulação das leis que regem a dinâmica dos corpos foi desenvolvida por Newton em 1687, na obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

A primeira lei, a Lei da Inércia, estabelece que um corpo tende a permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que uma força resultante atue sobre ele. Essa formulação rompe com a concepção aristotélica, segundo a qual um corpo só se manteria em movimento se uma força estivesse continuamente atuando sobre ele. Newton inverte esse raciocínio: a mudança de estado de movimento só ocorre se houver força resultante não nula.

A segunda lei, ou Princípio Fundamental da Dinâmica, quantifica a relação entre força e variação do momento linear, sendo expressa por:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \quad (2)$$

onde $\vec{Q} = m\vec{v}$ é a quantidade de movimento (momento linear) de um corpo de massa m e velocidade \vec{v} . Para sistemas de massa constante, essa

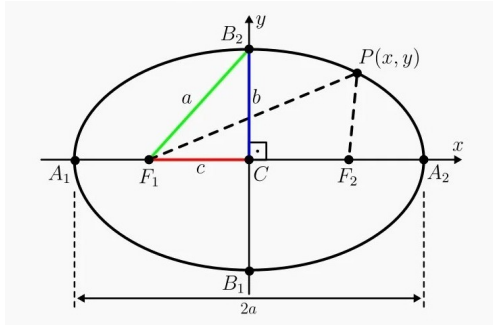


Figura 3: Representação de uma elipse com focos localizados no eixo x . O valor c indica a distância entre cada foco e o centro geométrico.

equação se reduz à :

$$\vec{F}_R = m\vec{a}, \quad (3)$$

sendo \vec{a} a aceleração. Isso significa que a força resultante sobre um corpo é diretamente proporcional à sua aceleração, e atua na mesma direção e sentido dela.

A terceira lei, a Lei da Ação e Reação, diz que: a toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade, mesma direção e sentido oposto. Essa lei reforça o caráter relacional das forças, que resultam da interação entre dois corpos.

3 Leis de Kepler

Com base nos dados coletados por Tycho Brahe, Johannes Kepler foi capaz de formular três leis empíricas que descrevem o movimento dos planetas em torno do Sol. Sua análise levou à rejeição do modelo circular das órbitas e à adoção de trajetórias elípticas [8].

A Primeira Lei de Kepler, publicada em 1609 na obra *Astronomia Nova* [9], estabelece que os planetas descrevem órbitas elípticas ao redor do Sol, com este ocupando um dos focos da elipse [10].

A elipse é uma figura plana definida como o conjunto de pontos cuja soma das distâncias a dois focos fixos (F_1 e F_2) é constante. A Figura 3 traz uma ilustração desta figura geométrica, desse modo,

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a, \quad (4)$$

sendo a o semi-eixo maior da elipse. A equação cartesiana da elipse, em sua forma reduzida, é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5)$$

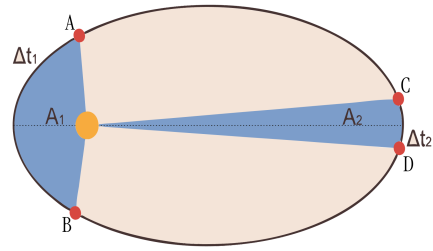


Figura 4: Em intervalos de tempo iguais, como $\Delta t_1 = \Delta t_2$, as áreas varridas pela linha que liga o planeta ao Sol são iguais, ou seja, $A_1 = A_2$.

onde b é o semi-eixo menor, x e y são os pontos pertencentes à elipse.

Outra característica da elipse está relacionada com sua excentricidade e , que mede o grau de alongamento da curva, sendo definida por:

$$e = \frac{c}{a}, \quad (6)$$

sendo c a distância do foco ao centro da elipse. Quando $c \rightarrow 0$, a elipse se aproxima de uma circunferência, e conforme $c \rightarrow 1$ a elipse se torna mais alongada e excêntrica.

A Segunda Lei de Kepler, conhecida como Lei das Áreas, afirma que: uma linha imaginária que liga o planeta ao Sol varre áreas (A) iguais em intervalos de tempos (Δt) iguais. Isso implica que a velocidade orbital de um planeta varia ao longo de sua trajetória, é maior no periélio e menor no afélio. Desse modo, sua velocidade areolar é constante, ou seja, a relação $\frac{A}{\Delta t}$ não varia. Uma representação desta lei está ilustrada na (Figura 4).

A Terceira Lei de Kepler foi enunciada em 1619 e estabelece uma relação matemática entre o período orbital T de um planeta e a distância média r entre o planeta e o Sol, dada por:

$$\frac{T^2}{r^3} = K, \quad (7)$$

Sendo K uma constante. Esta constante é determinada pela gravitação universal, lembrando-se que a lei de força da gravitação universal é

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

sendo G a constante gravitacional, M a massa que gera o campo gravitacional e m a massa do corpo de prova e r a distância entre esses corpos.

A partir da Lei da Gravitação Universal é possível generalizar as Leis de Kepler, unificando o

entendimento dos movimentos celestes em uma única estrutura teórica [8]. Supondo que a velocidade orbital é constante, ou seja, estamos supondo que o movimento é circular e uniforme, tem-se que

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

sendo v a velocidade da estrela; e por fim, a força resultante sobre o corpo de prova é centrípeta, ou seja,

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r}.$$

Manipulando as equações acima, observa-se que

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}, \quad (8)$$

e, por sua vez, através de uma comparação direta da equação acima com a equação (7) tem-se que

$$K = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (9)$$

Desse modo, conhecendo o período (T) e a distância média da órbita (r), é possível determinar a massa M do corpo em questão [10].

Assim, observa-se, que partimos das Leis de Kepler e chegamos a Lei da Gravitação Universal, da mesma forma é válido afirmar que o processo inverso é possível, ou seja, podemos partir da Lei da Gravitação Universal e chegar nas Leis de Kepler.

4 Sagittarius A*

O corpo de maior massa na nossa galáxia, com cerca de $(4.28 \pm 0.10_{\text{stat.}} \pm 0.21_{\text{sys.}}) \times 10^6 M_{\odot}$, encontra-se a uma distância de $(8,32 \pm 0.07_{\text{stat.}} \pm 0.14_{\text{sys.}})$ kpc [7].² Esse objeto massivo, localizado na direção da constelação de sagittarius, é denominado: Sagittarius A* (Sgr A*). As estrelas utilizadas nesta pesquisa são aquelas que estão relativamente próximas desta estrutura.

Uma dessas estrelas, S2, se destaca por ter uma trajetória bem determinada e por fornecer dados cruciais para a análise das propriedades gravitacionais do buraco negro. Ela descreve uma órbita

²O parsec (pc) é uma unidade de medida usada na astronomia para medir distâncias interestelares e intergalácticas. Ele é definido como a distância na qual um objeto tem um ângulo de paralaxe de 1 segundo de arco, resultando em aproximadamente em $3,086 \times 10^{16}$ m.

elíptica excêntrica ao redor de um ponto escuro e invisível, o próprio Sgr A*, com um período de translação de aproximadamente 16 anos e uma angulação com cerca de 0,1255 segundos de arco. A precisão das medições obtidas com sua órbita, em 2016, permitiu estabelecer as melhores restrições atualmente disponíveis tanto para a massa do buraco negro quanto para sua distância em relação ao Sistema Solar [7].

Assim, a estrela S2 continua fornecendo as melhores restrições sobre a massa e a distância até Sgr A*, os erros estatísticos das propriedades citadas acima foram reduzidos pela metade em comparação com o estudo anterior [11], realizados em 2009.

Ao aplicar os valores observacionais do raio e do período na terceira lei de Kepler, obteve-se uma estimativa para a massa de Sagittarius A* em torno de $(4,46 \pm 0,01) \times 10^6 M_{\odot}$. Essa massa está concentrada a uma região extremamente compacta do espaço, o que elimina a possibilidade de se tratar de um aglomerado estelar convencional. Dessa maneira, uma explicação fisicamente plausível, de acordo com os modelos atuais, é a presença de um buraco negro supermassivo.

5 Tratamento de dados

Os dados utilizados neste artigo foram retirados do trabalho [7]. No artigo em questão, são apresentados os dados da órbita de 37 estrelas, que apresentam trajetórias elípticas em torno de um corpo massivo no centro da Via Láctea, Sagittarius A*. Esses dados estão apresentados na Tabela 1, que tem dados de período e raio da órbita, o último medido em arcos-de-segundo.

Para facilitar o manuseio dessas informações foi criada uma planilha com esses dados, onde foi feito as conversões necessárias. Primeiramente, era preciso calcular o valor do raio da órbita, pois é necessário aplicar na equação (8), que foi obtido por:

$$r = d \times \alpha, \quad (10)$$

sendo α a media do semi-eixo maior medido em segundos-de-arco que se encontram na segunda coluna da Tabela 1 e a distância usada foi 8,32 kpc [7]. Com os fatores de raio e período, aplica-se a equação (8) para obter o valor mais provável

Tabela 1: Dados das estrelas que orbitam Sagittarius A*, vinculadas gravitacionalmente a ele e localizadas em suas imediações reais, no centro da Via Láctea. Sendo, α a media do semi-eixo maior medido em segundos-de-arco e T o período para cada estrela.

Estrela	α (")	T (anos)
S1	$0,595 \pm 0,024$	$166,0 \pm 5,8$
S2	$0,1255 \pm 0,0009$	$16,0 \pm 0,02$
S4	$0,3570 \pm 0,0037$	$77,0 \pm 1,0$
S6	$0,6574 \pm 0,0006$	$192,0 \pm 0,17$
S8	$0,4047 \pm 0,0014$	$92,9 \pm 0,41$
S9	$0,2724 \pm 0,0041$	$51,3 \pm 0,70$
S12	$0,2987 \pm 0,0018$	$58,9 \pm 0,22$
S13	$0,2641 \pm 0,0016$	$49,00 \pm 0,14$
S14	$0,2863 \pm 0,0036$	$55,3 \pm 0,48$
S17	$0,3559 \pm 0,0096$	$76,6 \pm 1,0$
S18	$0,2379 \pm 0,0015$	$41,9 \pm 0,18$
S19	$0,520 \pm 0,094$	135 ± 14
S21	$0,2190 \pm 0,0017$	$37,0 \pm 0,28$
S22	$1,31 \pm 0,28$	540 ± 63
S23	$0,253 \pm 0,012$	$45,8 \pm 1,6$
S24	$0,944 \pm 0,048$	331 ± 16
S29	$0,428 \pm 0,019$	$101,0 \pm 2,0$
S31	$0,449 \pm 0,010$	$108, \pm 1,2$
S33	$0,657 \pm 0,026$	$192,0 \pm 5,2$
S38	$0,1416 \pm 0,0002$	$19,2 \pm 0,02$
S39	$0,370 \pm 0,015$	$81,1 \pm 1,5$
S42	$0,95 \pm 0,18$	335 ± 58
S54	$1,20 \pm 0,87$	477 ± 199
S55	$0,1078 \pm 0,0010$	$12,80 \pm 0,11$
S60	$0,3877 \pm 0,0070$	$87,1 \pm 1,4$
S66	$1,502 \pm 0,095$	664 ± 37
S67	$1,126 \pm 0,026$	431 ± 10
S71	$0,973 \pm 0,040$	346 ± 11
S83	$1,49 \pm 0,19$	656 ± 69
S87	$2,74 \pm 0,16$	1640 ± 105
S89	$1,081 \pm 0,055$	406 ± 27
S91	$1,917 \pm 0,089$	958 ± 50
S96	$1,499 \pm 0,057$	662 ± 29
S97	$2,32 \pm 0,46$	1270 ± 309
S145	$1,12 \pm 0,18$	426 ± 71
S175	$0,414 \pm 0,039$	$96,2 \pm 5,0$
R34	$1,81 \pm 0,039$	877 ± 83

da massa de Sagittarius A*, que será calculada usando:

$$\bar{M} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n},$$

sendo, o número de observações $n = 37$ e M_i as massas calculadas, usando a equação (8), para cada observação. Para o cálculo da propagação do erro, $\bar{\sigma}$, foi utilizado o desvio padrão médio, a saber:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

e

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta(M_i)^2}{n-1}},$$

usado para indicar a tendência do conjunto de medidas se distribuírem em torno do seu valor médio. Já o desvio da média,

$$\Delta M_i = (M_i - \bar{M}),$$

estabelece a diferença entre o valor de uma medida individual e o seu valor provável [12]. A massa obtida foi $\bar{M} = (4,46 \pm 0,01) \times 10^6 M_{\odot}$, vale ressaltar, que este é o valor da média aritmética de 37 medidas.

Esses passos possibilitaram tanto estimar a massa de Sgr A* quanto sua variação estatística.

Afim de mostrar a relação de proporcionalidade entre o raio e o período, usamos uma representação gráfica, presente na Figura 5, em forma de uma regressão linear com eixos de raio ao cubo e período ao quadrado para obter o resultado da massa de Sgr A*.

Para calcular a massa a partir do gráfico, usa-se a equação (8). Porém, a proporcionalidade da Terceira Lei de Kepler, mostrada na equação citada acima, agora se encontra no coeficiente angular presente no gráfico, denominado como *slope*.

6 Conclusão

O presente trabalho demonstrou que a aplicação das Leis de Newton, da Gravitação Universal e da Terceira Lei de Kepler, em conjunto com dados observacionais de estrelas que orbitam o Sagittarius A*, pode fornecer uma estimativa consistente para a massa do buraco negro

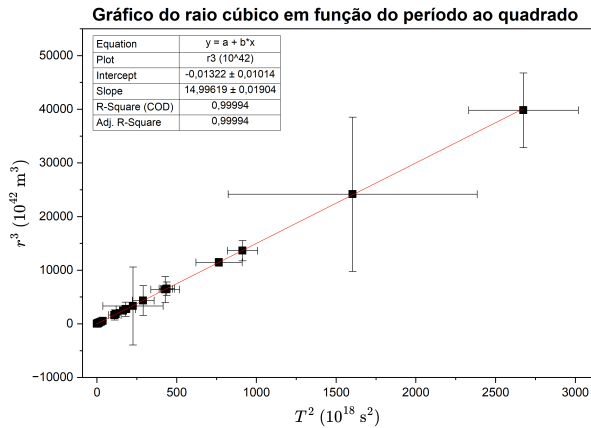


Figura 5: Este gráfico representa a relação de proporcionalidade da Terceira de Kepler. O eixo vertical apresenta os valores do raio ao cubo e o eixo horizontal os valores de período ao quadrado. A inclinação da reta está diretamente relacionada com a massa Sagittarius A*

supermassivo no centro da Via Láctea. A formulação desenvolvida por um estudante de ensino médio e aplicada na planilha automatizou os cálculos, incorporou as incertezas experimentais e possibilitou a conversão direta para massas solares, resultando em um valor médio de $(4,46 \pm 0,01) \times 10^6 M_{\odot}$.

Quando comparado ao valor de referência da literatura, $M = (4,28 \pm 0,10_{\text{stat.}} \pm 0,21_{\text{sys.}}) \times 10^6 M_{\odot}$, observa-se uma diferença de aproximadamente 4%. Essa discrepância pode ser atribuída principalmente à adoção da formulação newtoniana, que, embora eficaz em contextos didáticos e introdutórios, não contempla os efeitos relativísticos previstos pela Teoria da Relatividade Geral. Ainda assim, o resultado obtido confirma a proximidade entre ambas as abordagens e evidencia o potencial pedagógico da mecânica clássica como uma ferramenta acessível para introduzir estudantes a sistemas gravitacionais extremos.

Portanto, conclui-se que, mesmo diante de limitações teóricas, a metodologia empregada se mostrou válida e coerente, oferecendo um elo entre o formalismo clássico e as formulações relativísticas. Além de reforçar a importância do ensino de fundamentos físicos na compreensão de fenômenos astrofísicos complexos, este trabalho destaca a relevância da iniciação científica como um espaço de produção de conhecimento e de aproximação com práticas reais de pesquisa em astronomia.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao IFES pelo apoio e aos alunos que colaboraram para as discussões e andamento desse projeto.

Sobre os autores

Mateus Barbosa Ferreira (mateusbfgt@gmail.com) é aluno do quarto ano do Curso Técnico em Mecânica integrado ao ensino médio e atua como monitor do Observatório Astronômico do IFES Guarapari (OAIG).

Adriano Mesquita Oliveira (adriano.oliveira@ifes.edu.br) é doutor em física pela Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) e atua como professor de física do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Guarapari (Ifes-Guarapari), onde ministra aulas para os cursos técnicos, engenharia elétrica e licenciatura em ciências da natureza. Além disso, ele coordena o Observatório Astronômico do IFES Guarapari (OAIG) e está como Diretor Geral do campus Guarapari. Por fim, tem atuado como equipe executora da Mostra de Astronomia do ES e do Encontro de Astronomia do ES.

Referências

- [1] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / On the Gravitational Field of a Point Mass According to Einstein's Theory*, in *Karl Schwarzschild - Gesammelte Werke / Collected works*, editado por H. H. Voigt (Heidelberg, 1992), vol. 3, 449–456.
- [2] N. B. Maia, *Introdução à Relatividade* (Livraria da Física, 2009).
- [3] R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago press, 2010).
- [4] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, in *General Theory of Relativity* (Elsevier, 1973), 308–317.
- [5] R. Ruffini e J. A. Wheeler, *Introducing the black hole*, *Physics today* **24**(1), 30 (1971).

- [6] J. D. Toniato, *De Newton a Einstein: a geometrização da gravitação*, *Cadernos de Astronomia* **1**(1), 17 (2020).
- [7] S. Gillessen et al., *An Update on Monitoring Stellar Orbits in the Galactic Center*, *The Astrophysical Journal* **837**(1), 30 (2017).
- [8] H. M. Nussenzveig, *Curso de física básica: Mecânica*, vol. 1 (Editora Blucher, 2013).
- [9] J. Kepler, *Astronomia Nova Aitiologetos* (Heidelberg, 1609).
- [10] M. d. F. O. Saraiva, *Astronomia & Astrofísica* (Editora Livraria da Física, 2004).
- [11] S. Gillessen et al., *Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center*, *The Astrophysical Journal* **692**(2), 1075 (2009).
- [12] J. L. Devore, *Probability and statistics for engineering and the sciences* (Brooks/Cole, 2007).