Considerações cosmológicas sobre a teoria geral da relatividade

A. Einstein

Tradutores

Júlio C. Fabris[1] e Oliver F. Piattella[2]

[1]*Universidade Federal do Espírito Santo*
[2]*Università degli Studi dell'Insubria, Itália*

Resumo
Apresentamos a tradução do artigo publicado por Albert Einstein em 1917. Nele é introduzida, pela primeira vez, uma constante cosmológica, termo que hoje desempenha um papel muito importante para o modelo padrão da cosmologia. Alguns comentários introdutórios são apresentados, seguidos da versão em português do texto originalmente escrito em alemão.

Abstract
We present the translation of the article published by Albert Einstein in 1917. In it, he introduces, for the first time, a cosmological constant, a term that today plays a very important role in the standard model of cosmology. Some introductory comments are presented, followed by the Portuguese version of the text originally written in German.

Palavras-chave: constante cosmológica; Albert Einstein; energia escura; tradução.
Keywords: cosmological constant; Albert Einstein; dark energy; translation.

DOI: 10.47456/Cad.Astro.v7n1.52177

Introdução dos tradutores

A teoria da Relatividade Geral (RG), a moderna teoria da gravitação, foi divulgada em um artigo publicado em dezembro de 1915, assinado por Albert Einstein [1].

No início de 1916, a primeira solução exata utilizando a RG foi obtida pelo astrônomo Karl Schwarzschild e descreve o espaço-tempo (ou o campo gravitacional, se usarmos a linguagem newtoniana) formado na região externa, sem matéria [2], por uma massa que respeita a simetria esférica. Schwarzschild provavelmente tinha em mente o espaço-tempo determinado por uma estrela. Sua solução, no entanto, trazia o germe da noção de buraco-negro, uma das estruturas mais intrigantes previstas pela RG e, rigorosamente, sem análogo na teoria newtoniana.

A criação de um modelo cosmológico usando a RG, no entanto, só viria a ser abordada em 1917 com o modelo de universo estático proposto por Einstein no artigo [3], que é aqui traduzido, ao nosso conhecimento pela primeira vez, para a língua portuguesa. É um artigo muito citado, principalmente porque é a primeira abordagem científica, com uma linguagem matemática e utilizando a nova teoria da gravitação, de uma possível descrição do universo como um todo. No entanto, talvez não cometamos um erro ao dizer que é pouco lido, e isto nos motiva a realizar esta tradução direta do original em alemão. Além do aspecto central relacionado à criação de um modelo cosmológico, o artigo traz novos elementos que mantêm o interesse neste texto. Um deles é que, para se obter um universo estático, Einstein introduz a constante cosmológica Λ, que é, hoje, um constituinte fundamental do modelo padrão da cosmologia, o chamado ΛCDM. As observações indicam que cerca de 70% do conteúdo energético do nosso universo seria sob a forma de Λ. Outro aspecto, menos popular, mas relacionado de certa forma à constante cosmológica, é a ideia de uma formulação unimodular da RG, onde a métrica é vinculada a ter determinante igual a 1.

Deve-se ressaltar que a construção de um modelo para o universo como um todo foi ignorada antes da publicação do artigo de Einstein de 1917, não tendo recebido um tratamento mais completo sequer no âmbito da teoria newtoniana, a teoria gravitacional que prevalecia antes do surgimento da RG. O motivo para isto nos parece simples: os conhecimentos sobre a estrutura global do universo eram parcos, vagos e inexatos. Por exemplo, a descoberta de que o universo contém várias galáxias além da nossa galáxia, a Via Láctea, só viria a ser estabelecida na década de 1920, anos depois do artigo de Einstein. Muitas estruturas cósmicas, como as estrelas, aglomerados de estrelas, nebulosas, entre outras, eram conhecidas, mas ainda não se tinha ideia do tamanho do universo, de como essas estruturas se distribuíam no cosmos, do que eram exatamente essas nebulosas, muitas das quais se revelaram ser galáxias como a nossa.

No seu livro sobre a teoria da Relatividade Geral, publicado em 1922, o físico-matemático brasileiro Manoel Amoroso Costa reserva no final pouco espaço para a discussão sobre a cosmologia, dizendo que, no estágio do conhecimento que se tinha na época, discutir cosmologia era como tentar discutir a estrutura global dos oceanos a partir de uma gota coletada no mar [4]. A possibilidade de que o universo fosse dinâmico, podendo estar em expansão, como acreditamos ser o caso hoje, só seria evocada também em 1922 pelo matemático russo Alexander Friedmann (ver a edição dos Cadernos de Astronomia de 2022, em especial a tradução comentada do artigo de Friedmann [5]), recebendo comprovação observacional poucos anos depois. A noção mesmo de galáxias só se firmaria a partir do chamado Grande Debate, há cem anos atrás [6]. Nesse contexto, abordar a construção de um modelo para o universo era uma tarefa ousada e arriscada.

Mesmo assim, em 1917, Einstein cria o seu modelo cosmológico. É um universo estático, pois não há evidências, naquele momento, de uma dinâmica do universo. Para obter um universo com matéria, mas estático, Einstein se vê obrigado a introduzir, nas equações da RG, a famosa constante cosmológica. Hoje, apresentamos a necessidade de introduzir a constante cosmológica para se ter um universo preenchido com matéria, mas estático, pelo fato da constante cosmológica mimetizar um fluido com pressão negativa, contendo portanto efeitos repulsivos que compensariam a atração gravitacional da matéria. Mas, no artigo, Einstein justifica a introdução deste termo (ressaltamos, hoje parte integrante do modelo cosmológico padrão relacionado à energia escura) através de uma análise, um pouco obscura em certos momentos, do potencial gravitacional no infinito. Ao considerar um universo finito, com a matéria concentrada em uma certa região, o potencial gravitacional no infinito deve ser constante (nulo, se preferirmos) e isto, segundo Einstein, levaria à dissolução da estrutura local, com as estrelas se dispersando gradativamente. Para provar isto, Einstein usa um argumento estatístico: em uma distribuição estatística das velocidades, uma estrela pode adquirir velocidade suficiente para escapar da estrutura local, e este processo pode se repetir sequencialmente.

Curiosamente, muito embora o modelo estático elaborado por Einstein tenha sido formulado fazendo menção à RG, boa parte do seu raciocínio segue uma estrutura newtoniana. Para evitar a dissolução do sistema local, Einstein introduz a constante cosmológica, o que gera um potencial divergente no infinito espacial e conduz a efeitos repulsivos que contrabalançam a atração da matéria. Sabemos hoje, de fato, que a solução de Schwarzschild para simetria esférica pode ser generalizada introduzindo-se uma constante cosmológica, gerando um potencial repulsivo (na linguagem newtoniana) além do potencial atrativo da matéria. A estrutura geométrica criada por Einstein é a de uma esfera. Assim, o universo, além de estático, é finito, o que resolve também o problema da divergência do potencial no infinito espacial, noção inexistente no caso de uma esfera finita.

Pouco tempo depois da formulação do modelo de universo estático, inglês Arthur Eddington [7] mostraria que a construção realizada por Einstein era instável: qualquer perturbação na distribuição de matéria levaria a um colapso do universo. Einstein não apresenta neste artigo nenhuma discussão sobre a estabilidade, algo que parece crucial em toda configuração estática, e que já tinha sido fartamente discutido no contexto newtoniano para situações particulares de sistemas mecânicos. Einstein também, em momento algum, como ressaltado na análise do artigo feito na Ref. [8], aborda o status observacional do modelo que propõe, muito embora mais tarde ele tenha tentado fazer estimativas através dos parcos dados observacionais então disponíveis, obtendo um valor para o tamanho do universo visível da ordem de mil vezes menor que o atual. Há outras lacunas no texto. Einstein, por exemplo, não cita os trabalhos de Seeliger [9] que, aproximadamente 20 anos antes do artigo de 1917, já tinha introduzido a constante cosmológica no contexto newtoniano. Por outro lado, ao tratar das condições no infinito, Einstein menciona a possibilidade de introduzir um sistema de coordenadas onde o determinante da métrica é igual a 1, o que é compatível com a métrica de Minkowski no infinito. Hoje, esta condição é denominada de condição unimodular, inspirando uma série de modificações da RG geral, inclusive com interessantes consequências para uma teoria quântica da gravitação.

O modelo cosmológico de Einstein não resistiu à evolução subsequente da cosmologia, com a descoberta da expansão cósmica e o advento de medidas cada vez mais precisas sobre a estrutura do universo em larga escala. Mas, a construção einsteiniana evoca pela primeira vez (pelo menos no contexto relativista) a presença da constante cosmológica, que se revelaria posteriormente como uma extensão natural e mesmo necessária da RG. Cita-se com frequência a frase que é atribuída a Einstein de que a constante cosmológica teria sido "o maior erro de minha vida", tendo em vista a descoberta da expansão do universo, o que contradiz o modelo estático. Ao nosso conhecimento, não há um texto de Einstein onde isto tenha sido dito claramente; parece ter sido uma citação indireta de conversas que ele teria tido sobre a questão. Mas o que é certo é o papel ulterior desempenhado pela constante cosmológica, nos estudos sobre a estrutura do universo: sua presença nas equações gravitacionais levaria a uma idade do universo compatível com a dos aglomerados globulares, como enfatizado por Lemaître nos anos 30 [10]. Além disso, a identificação atual com a energia escura e sua conexão com a energia do vácuo quântico, revela a riqueza escondida nesse novo termo das equações gravitacionais. A menção à condição unimodular também esconde uma nova possibilidade de teorias gravitacionais geométricas e que, aparentemente, aborda satisfatoriamente os problemas relacionados com o valor teórico extremamente grande da energia do vácuo.

Na década de 90 do século passado, uma nova descoberta observacional revolucionou o nosso entendimento do universo: a expansão cosmológica está acelerada. Para explicar isso, como tinha sido no caso do universo estático de Einstein, torna-se também necessária uma forma de antigravidade. Dessa vez, porém, o modelo teórico já existia: a constante cosmológica de Einstein.

O artigo de 1917 de Einstein constitui uma intrigante leitura, inclusive naquilo que ele se revelou incorreto no contexto estático, mas frutífero em um contexto mais geral.

Sobre os tradutores

Júlio C. Fabris (julio.fabris@cosmo-ufes.org)é professor titular do Departamento de Física da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) e pesquisador do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Suas atividades científicas versam sobre física teórica, com especial ênfase em cosmologia e gravitação.

Oliver F. Piattella (of.piattella@uninsubria.it) é Professor Adjunto na Università degli Studi dell'Insubria, Como, Itália. Foi professor do Departamento de Física da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), e pesquisador do Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq), de 2012 a 2021. Atua nas áreas de cosmologia e gravitação, tendo publicado mais de 50 artigos científicos e um livro-texto de cosmologia intitulado Lectures notes in cosmology (Springer, 2018).

Referências

[1] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitz. König. Preuss. Akad. 844-847 (1915).

[2] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinischen Theorie*, Sitz. König. Preuss. Akad. Wiss. 189-196 (1916).

[3] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitz. König. Preuss. Akad. 142-152 (1917).

[4] M. Amoroso Costa, *Introdução à Teoria da Relatividade*, Livraria Científica Brasileira, Editora da UFRJ, Rio de Janeiro (1995).

[5] H. Velten e W. Zimdahl, *O universo dinâmico de Friedmann*, Cadernos de Astronomia 3 (1) 151 (2022).

[6] V. Flório e O. Freire Júnior, *Via Láctea: ilha isolada?*, Cadernos de Astronomia 2 (1) 79 (2021).

[7] A.S. Eddington, *On the instability of Einstein's spherical world*, MNRAS 90 668 (1930).

[8] O'Raifeartaigh, C., O'Keeffe, M., Nahm, W. and S. Mitton, *Einstein's 1917 static model of the universe: a centennial review*, EPJH 42 431(2017).

[9] H. von Seeliger, *Über das Newtonische Gravitationsgesetz*, Sitz. König. Bayer. Akad. Wiss. 126 373-400 (1896).

[10] G. Lemaître, *L'universe en expansion.* Ann. Soc. Sci. Brux A53 51-85 (1933).

Considerações cosmológicas sobre a teoria geral da relatividade[*]

Por A. Einstein

É bem conhecido que a equação diferencial de Poisson:

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho \tag{1}$$

em relação à equação do movimento do ponto material, ainda não substitui completamente a teoria newtoniana da ação à distância. É necessário acrescentar a condição de que, no infinito espacial, o potencial ϕ tende a um valor limite constante. Algo semelhante ocorre na teoria gravitacional da relatividade geral; também aqui devem ser acrescentadas condições de contorno no infinito espacial, caso se considere o universo como espacialmente infinito.

No tratamento do problema planetário, escolhi essas condições de contorno na forma da seguinte suposição: é possível escolher um sistema de referência tal que todos os potenciais gravitacionais $g_{\mu\nu}$ se tornem constantes no infinito espacial. No entanto, não é de modo algum evidente *a priori* que se possam adotar as mesmas condições de contorno ao considerar porções maiores do mundo material. No que se segue, apresento as reflexões que fiz até agora sobre essa questão de importância fundamental.

1. A teoria newtoniana

É bem conhecido que a condição de contorno newtoniana de um limite constante para ϕ no infinito espacial conduz à concepção de que a densidade da matéria tende a zero no infinito. Suponhamos que exista um ponto no espaço em torno do qual o campo gravitacional da matéria, considerado em grande escala, possua simetria esférica (centro). Então, da equação de Poisson, segue-se que a densidade média ρ deve decrescer para zero mais rapidamente que $1/r^2$ com o aumento da distância r do centro, para que ϕ tenda a um limite no infinito.[1] Nesse sentido, o universo é finito segundo Newton, embora possa possuir massa total infinita.[2]

Segue-se disso que a radiação emitida pelos corpos celestes abandonará parcialmente o universo newtoniano, propagando-se radialmente para o exterior e perdendo-se sem efeito no infinito. Não poderia o mesmo ocorrer com os próprios corpos celestes? É difícil negar essa possibilidade. De fato, a partir da suposição de um limite finito para ϕ no infinito espacial, segue-se que um corpo celeste dotado de energia cinética finita pode alcançar o infinito espacial, superando as forças de atração newtonianas. Segundo a mecânica estatística, esse caso deve ocorrer repetidamente, desde que a energia total do sistema estelar seja suficientemente grande para permitir que, transferida a um único corpo celeste, possibilite a viagem ao infinito, da qual nunca retornará.

[*] Título original: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Publicado originalmente em: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), 1917, Seite 142-152.*

[1] ρ é a densidade média da matéria, construída para um espaço que é grande em relação à distância das estrelas fixas mais próximas, mas pequeno em relação às dimensões do inteiro sistema estelar.

[2] **NdT.** Supondo apenas simetria esférica para o potencial gravitacional e para a densidade, ou seja, $\phi = \phi(r)$ e $\rho = \rho(r)$, a equação de Poisson se torna:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi K\rho\,.$$

Para que o campo gravitacional tenda a um limite finito c para $r \to \infty$, precisamos que $\phi = c + r^{-n}$, com $n > 0$. Consequentemente, temos que $\rho \propto r^{-n-2}$ e, integrando esta densidade para determinar a massa, obtemos $M \propto r^{-n+1}$, que pode divergir ao infinito se $n < 1$.

Poder-se-ia tentar escapar dessa dificuldade peculiar supondo que o potencial limite no infinito fosse muito elevado. Tal caminho seria viável se o comportamento do potencial gravitacional não fosse condicionado pelos próprios corpos celestes. Na realidade, somos levados necessariamente à concepção de que o surgimento de significativas diferenças de potencial do campo gravitacional está em contradição com os fatos observados. Essas diferenças devem ser tão pequenas que as velocidades estelares por elas produzidas não excedam as efetivamente observadas.

Se aplicarmos a lei de distribuição de Boltzmann para moléculas de gás às estrelas, comparando o sistema estelar a um gás em movimento térmico estacionário, conclui-se que o sistema estelar newtoniano nem pode sequer existir. Como à diferença finita de potencial entre o centro e o infinito corresponde a uma razão finita das densidades, o desaparecimento da densidade no infinito implica, portanto, o desaparecimento da densidade no centro.[3]

Essas dificuldades dificilmente podem ser superadas no âmbito da teoria newtoniana. Pode-se perguntar se elas podem ser eliminadas por uma modificação da teoria de Newton. Nesse sentido, indicamos inicialmente um caminho que, por si só, não pretende ser levado a sério; serve apenas para tornar mais claro o que se segue. Substituímos a equação de Poisson por:

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K\rho\,, \tag{2}$$

onde λ é uma constante universal. Se ρ_0 for a densidade (uniforme) de uma distribuição de massa, então:

$$\phi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0\,, \tag{3}$$

é uma solução da equação (2). Essa solução corresponde ao caso em que a matéria das estrelas fixas está distribuída uniformemente no espaço, sendo ρ_0 igual à densidade média efetiva da matéria do universo. A solução corresponde a uma extensão infinita de um espaço preenchido uniformemente por matéria. Se imaginarmos, sem alterar a densidade média, que a matéria esteja distribuída de forma localmente não uniforme, então sobre o valor constante de ϕ da equação (3) se sobreporá um potencial adicional ϕ que, na vizinhança de massas mais densas, será tanto mais semelhante a um campo newtoniano quanto menor for $\lambda\phi$ em comparação com $4\pi K\rho$.

Um universo assim feito não teria centro em relação ao campo gravitacional. Não seria necessário supor um decaimento da densidade no infinito espacial, mas tanto o potencial médio quanto a densidade média permaneceriam constantes até o infinito. O conflito com a mecânica estatística constatado na teoria newtoniana não existe aqui. A matéria encontra-se em equilíbrio a uma densidade determinada (extremamente pequena), sem que sejam necessárias forças internas da matéria (pressão) para manter esse equilíbrio.

2. As condições de contorno segundo a teoria da relatividade geral

No que se segue, conduzo o leitor pelo caminho um tanto indireto e acidentado percorrido por mim mesmo, porque somente assim posso esperar despertar interesse pelo resultado final. Chego, com efeito, à opinião de que as equações de campo da gravitação por mim até agora representadas ainda necessitam de uma pequena modificação, a fim de evitar, com base na teoria da relatividade geral, aquelas dificuldades de princípio que expusemos no parágrafo anterior para a teoria newtoniana. Essa modificação corresponde exatamente à passagem da equação de Poisson (1) para a equação (2) do parágrafo anterior. Resulta, então, por fim, que condições de contorno no infinito espacial tornam-se totalmente desnecessárias, uma vez que o contínuo do universo, no que diz respeito à sua extensão espacial, deve ser concebido como um todo fechado em si mesmo, de volume espacial (tridimensional) finito.

A opinião que mantive até pouco tempo atrás acerca das condições de contorno a serem impostas no infinito espacial baseava-se nas seguintes considerações. Em uma teoria da relatividade consequente, não pode haver inércia em relação ao "espaço", mas apenas uma inércia das massas umas em relação às outras. Se, portanto, eu afastar uma massa de todas as demais massas do

[3] **NdT.** Essa afirmação deve ser colocada no âmbito da mecânica estatística: como a densidade é proporcional ao fator de Boltzmann, $\rho \propto e^{-\beta\phi}$, a razão entre densidades será: $\rho/\rho_0 = e^{-\beta(\phi-\phi_0)}$. Portanto, se a diferença $\phi - \phi_0$ se mantém constante e ρ vai para zero, necessariamente ρ_0 terá que ser zero também.

mundo a uma distância espacial suficientemente grande, sua inércia deve decair até zero.[4] Procuramos formular matematicamente essa condição.

De acordo com a teoria da relatividade geral, o momento (negativo)[5] é dado pelas três primeiras componentes e a energia pela última componente do tensor covariante, multiplicada por $\sqrt{-g}$,[6]

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \tag{4}$$

onde, como sempre, tem-se que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu\,. \tag{5}$$

No caso particularmente claro em que o sistema de coordenadas pode ser escolhido de modo que o campo gravitacional seja espacialmente isotrópico em todo ponto, tem-se uma forma mais simples

$$ds^2 = -A\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + B\, dx_4^2\,. \tag{6}$$

Se, adicionalmente,[7]

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3B}\,, \tag{7}$$

obtém-se, para pequenas velocidades, em primeira aproximação da equação (4), para as componentes do momento,

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4} \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4} \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4} \tag{8}$$

e para a energia (no caso de repouso),

$$m\sqrt{B}\,. \tag{9}$$

Das expressões do momento segue-se que $m\sqrt{A/B}$ desempenha o papel da massa inercial. Como m é uma constante própria do ponto material, independente de sua posição, essa expressão só pode desaparecer no infinito espacial, sob a validade da condição sobre o determinante, se A decrescer até zero, enquanto B crescer até o infinito. Tal degeneração dos coeficientes $g_{\mu\nu}$ parece, portanto, ser exigida pelo postulado da relatividade de toda a inércia. Essa exigência implica também que a energia potencial $m\sqrt{B}$ do ponto no infinito torne-se infinitamente grande. Assim, um ponto material jamais pode abandonar o sistema; uma investigação mais detalhada mostra que o mesmo também valeria para os raios de luz. Um universo com tal comportamento dos potenciais gravitacionais no infinito não estaria, portanto, sujeito ao perigo de esvaziamento que anteriormente discutimos para a teoria newtoniana.

Observo que as hipóteses simplificadoras sobre os potenciais gravitacionais, nas quais se baseou essa consideração, foram introduzidas apenas por razões de clareza. Podem-se encontrar formulações gerais para o comportamento dos $g_{\mu\nu}$ no infinito que expressem o essencial da questão sem outras restrições.

Examinei então, com a gentil ajuda do matemático J. Grommer, campos gravitacionais estáticos, esfericamente simétricos, que degeneravam no infinito da maneira indicada. Os potenciais gravitacionais $g_{\mu\nu}$ foram assumidos e, a partir deles, calculou-se, com base nas equações de campo da gravitação, o tensor de energia $T_{\mu\nu}$ da matéria. Verificou-se, porém, que para o sistema das estrelas fixas, tais condições de contorno não podem ser consideradas de forma alguma, como também foi corretamente salientado recentemente pelo astrônomo de Sitter.

De fato, o tensor de energia contravariante $T^{\mu\nu}$ da matéria ponderável é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \rho\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds}\,, \tag{10}$$

onde ρ representa a densidade da matéria medida de forma natural. Em um sistema de coordenadas adequadamente escolhido, as velocidades estelares são muito pequenas em comparação com a velocidade da luz. Pode-se, portanto, substituir ds por $\sqrt{g_{44}}\,dx_4$. Disso se reconhece que todas as componentes de $T^{\mu\nu}$, em comparação com a última componente T^{44}, devem ser muito pequenas. Essa condição, porém, não podia, de modo algum, ser conciliada com as condições de contorno escolhidas. A posteriori, esse resultado não parece surpreendente. O fato de que as estrelas possuam baixa velocidade leva a concluir que, em nenhum lugar onde haja estrelas, o potencial gra-

[4]**NdT.** Essa é a famosa concepção Machiana da inércia: não uma propriedade intrínseca, absoluta de um corpo, mas uma propriedade relativa a todos os demais corpos presentes no universo.

[5]**NdT.** É negativo por causa da assinatura métrica escolhida por Einstein.

[6]**NdT.** Aqui, Einstein emprega a convenção de Einstein: índices repetidos são somados. Neste artigo, a componente temporal é a quarta, com índice 4.

[7]**NdT.** Essa é chamada de condição de unimodularidade e é uma condição estudada ainda hoje.

vitacional (no nosso caso $\sqrt{B}$) possa ser notavelmente maior que na nossa região; isso segue de considerações estatísticas, exatamente como no caso da teoria newtoniana. De qualquer forma, nossos cálculos têm me levado à convicção de que tais condições de degeneração para os $g_{\mu\nu}$ no infinito espacial não podem ser postuladas.[8]

Frente ao fracasso deste tentativo, apresentam-se em seguida duas possibilidades:

a) Requere-se que, como no problema dos planetas, que no infinito espacial os $g_{\mu\nu}$ se aproximam aos valores

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

num referencial oportunamente escolhido.

b) Não se associa, de fato, nenhuma validade geral às condições requeridas para o contorno no infinito espacial: deve-se fornecer os $g_{\mu\nu}$ na fronteira espacial da região observada para o caso individual, como se costumava fazer de forma especial para as condições iniciais temporais.

A possibilidade b não corresponde a uma solução do problema, mas à renúncia de encontrar a própria solução. Esse é um ponto de vista incontestável que, no momento, vem sendo adotado por de Sitter. Devo, porém, confessar que é difícil para mim desistir dessa forma em relação a essa questão de princípio. Vou mudar de ideia a respeito disso somente quando todos os esforços para extrair uma interpretação satisfatória se mostrarem inúteis.

A possibilidade a é, em vários aspectos, insatisfatória. Primeiramente, tais condições de contorno fixam um determinado sistema de referência, o que contradiz o espírito do princípio da relatividade. Em segundo lugar, renuncia-se, com essa suposição, a satisfazer o requerimento da relatividade da inércia. A inércia de uma massa puntiforme de massa m medida naturalmente é, de fato, dependente dos $g_{\mu\nu}$: esses, porém, diferenciam-se apenas um pouco dos valores postulados anteriormente para o infinito espacial. Dessa forma, a inércia seria certamente influenciada pela matéria presente a uma distância finita, mas não seria completamente determinada por esta. Se fosse dado somente um ponto massivo, esse possuiria inércia segundo essa interpretação e uma inércia quase igual àquela no caso em que esse ponto fosse circundado pelas demais massas do nosso universo real. Enfim, contra essa interpretação, são de novo válidas aquelas ideias estatísticas que foram apresentadas para a teoria newtoniana.

Desce do que foi dito até agora que não consegui definir as condições de borda no infinito espacial. Mesmo assim, existe ainda mais uma possibilidade, sem que seja necessária a renúncia dada no ponto b. Isto é, se fosse possível que o universo, na sua extensão espacial, fosse um contínuo fechado, não teríamos, então, necessidade alguma daquelas condições de borda. No que se segue, mostra-se que tanto a exigência da relatividade geral quanto o fato observacional das pequenas velocidades das estrelas estão em acordo com a hipótese de um universo fechado; por outro lado, torna-se necessária, para o desenvolvimento dessa ideia, uma modificação global das equações de campo da gravitação.

3. O mundo espacialmente fechado com matéria uniformemente distribuída

O caráter métrico (curvatura) do contínuo espaço-temporal quadridimensional é determinado, segundo a teoria da relatividade geral, em cada ponto pela matéria ali presente e pelo seu estado. A estrutura métrica desse contínuo deve, portanto, devido à distribuição não uniforme da matéria, ser necessariamente extremamente complexa. Se, porém, nos interessa apenas a estrutura em grande escala, podemos imaginar a matéria como uniformemente distribuída por regiões imensas do espaço, de modo que sua densidade de distribuição se torne uma função extremamente lentamente variável. Procedemos aqui de modo análogo ao dos geodesistas, que aproximam a superfície da Terra — extremamente complicada em pequena escala — por um elipsoide.

O fato mais importante que conhecemos, a partir da experiência, acerca da distribuição da matéria, é que as velocidades relativas das estrelas

[8] **NdT.** A degeneração da métrica ao infinito não é compatível com o tensor energia-momento descrito neste parágrafo. Isso não é mostrado explicitamente, mas Einstein sugere que esse resultado se encontra a partir das equações de campo da Relatividade Geral.

são muito pequenas em comparação com a velocidade da luz. Creio, portanto, que podemos inicialmente basear nossa consideração na seguinte hipótese aproximativa: existe um sistema de coordenadas em relação ao qual a matéria pode ser considerada permanentemente em repouso. Relativamente a esse sistema, o tensor de energia contravariante $T^{\mu\nu}$ da matéria, conforme a equação (10), assume uma forma simples

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} . \tag{12}$$

O escalar ρ da densidade (média) de distribuição pode, a priori, ser uma função das coordenadas espaciais. Se, porém, assumirmos que o universo é espacialmente fechado em si mesmo, torna-se natural a hipótese de que ρ seja independente da posição; essa hipótese será adotada no que segue.

No que diz respeito ao campo gravitacional, segue-se da equação do movimento do ponto material

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0 \,, \tag{13}$$

que um ponto material só pode permanecer em repouso em um campo gravitacional estático se g_{44} for independente da posição. Como, além disso, supomos a independência da coordenada temporal x_4 para todas as grandezas, podemos exigir para a solução procurada que, para todos os x_ν,

$$g_{44} = 1 \,. \tag{14}$$

Como é usual em problemas estáticos, deve-se ainda impor

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \,. \tag{15}$$

Resta agora fixar aquelas componentes do potencial gravitacional que determinam o comportamento puramente geométrico-espacial do nosso contínuo ($g_{11}, g_{12}, \ldots g_{33}$). Da nossa hipótese de uniformidade na distribuição das massas geradoras do campo, segue-se que a curvatura do espaço métrico procurado também deve ser constante. Para essa distribuição de massas, o contínuo fechado dos x_1, x_2, x_3 procurado, definido pelos valores constantes de x_4, será, portanto, um espaço esférico.

Podemos chegar a tal espaço, por exemplo, do seguinte modo. Partimos de um espaço euclidiano quadridimensional com coordenadas $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ e elemento de linha $d\sigma$, tal que

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 \,. \tag{16}$$

Nesse espaço, consideramos a hipersuperfície

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \,, \tag{17}$$

onde R é uma constante. Os pontos dessa hipersuperfície formam um contínuo tridimensional, um espaço esférico de raio de curvatura R.

O espaço euclidiano quadridimensional do qual partimos serve apenas para a definição conveniente da hipersuperfície. O que nos interessa são apenas os pontos desta última, cujas propriedades métricas devem coincidir com as do espaço físico no caso de uma distribuição uniforme da matéria. Para a descrição desse contínuo tridimensional, podemos utilizar as coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 (projeção sobre o hiperplano $\xi_4 = 0$), pois ξ_4 pode ser expresso em termos de ξ_1, ξ_2, ξ_3 por meio da equação (17). Eliminando ξ_4 do elemento de linha (16), obtém-se para o elemento de linha do espaço esférico

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, d\xi_\mu d\xi_\nu \,, \tag{18}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2} \,, \tag{19}$$

onde $\delta_{\mu\nu} = 1$ se $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$, e $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. As coordenadas escolhidas são particularmente convenientes para o estudo da vizinhança de um dos dois pontos $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Com isso, o elemento de linha do universo espaço-temporal quadridimensional procurado também fica determinado. Devemos, evidentemente, impor, para os potenciais $g_{\mu\nu}$ cujos dois índices são diferentes de 4,

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^1 + x_2^2 + x_3^2)} \right) \,, \tag{20}$$

o que, em conjunto com as condições (14) e (15), determina completamente o comportamento de réguas, relógios e raios de luz no universo quadridimensional considerado.

4. Sobre um termo adicional a ser introduzido nas equações de campo da gravitação

As equações de campo da gravitação que propus têm, para um sistema de coordenadas arbitrariamente escolhido, a forma[9]

$$G_{\mu\nu} = -\,\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) ,$$

$$G_{\mu\nu} = -\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} . \quad (21)$$

O sistema de equações (21) não é satisfeito quando se inserem, para os potenciais $g_{\mu\nu}$, os valores dados pelas equações (14), (15) e (20), e, para o tensor (contravariante) de energia da matéria, os valores indicados em (12). Como esse cálculo pode ser realizado de forma conveniente será mostrado no parágrafo seguinte. Se, portanto, fosse certo que as equações de campo (21) até agora por mim utilizadas fossem as únicas compatíveis com o postulado da relatividade geral, deveríamos concluir que a teoria da relatividade não admite a hipótese de um mundo espacialmente fechado.

O sistema de equações (21) admite, contudo, uma extensão natural, compatível com o postulado da relatividade, que é completamente análoga à extensão da equação de Poisson dada pela equação (2). Podemos, com efeito, acrescentar ao primeiro membro das equações de campo (21) um termo proporcional ao tensor fundamental $g_{\mu\nu}$, multiplicado por uma constante universal ainda desconhecida $-\lambda$, sem que a covariância geral seja destruída. Assim, colocamos no lugar da equação de campo (21)

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) . \quad (22)$$

Além disso, essa equação de campo é, para valores suficientemente pequenos de λ, certamente compatível com os fatos empíricos estabelecidos no sistema solar. Ela satisfaz igualmente às leis de conservação do momento e da energia, pois se chega a essa equação (22) em lugar de (21) substituindo, no princípio hamiltoniano, o escalar do tensor de Riemann por esse mesmo escalar acrescido de uma constante universal; tal princípio garante, como é sabido, a validade das leis de conservação. Que a equação de campo modificada seja compatível com nossos pressupostos acerca do campo gravitacional e da matéria será demonstrado a seguir.

[9] **NdT.** Aqui Einstein representa o tensor de Ricci com $G_{\mu\nu}$. Em notação moderna, o tensor de Ricci é indicado com $R_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ representa o tensor de Einstein.

5. Execução do cálculo. Resultado

Como todos os pontos do nosso contínuo são equivalentes, basta realizar o cálculo em um único ponto, por exemplo, em um dos dois pontos com coordenadas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Dessa forma, deve-se inserir na (22) para os $g_{\mu\nu}$ os valores

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

em todos os lugares onde aparecem diferenciados uma vez só, ou nenhuma mesmo. Obtém-se, em primeiro lugar,

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} . \quad (24)$$

Lembrando as (14), (15) e (20), verifica-se facilmente que todas as equações de campo (22) são satisfeitas, desde que se cumpram simultaneamente as duas relações

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\kappa\rho}{2} \quad (25)$$

$$-\lambda = -\frac{\kappa\rho}{2} \quad (26)$$

ou

$$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2} . \quad (27)$$

A constante universal λ, introduzida recentemente, determina assim tanto a densidade média de distribuição ρ, que pode permanecer em equilíbrio, quanto o raio R do espaço esférico e, consequentemente, o seu volume $V = 2\pi^2 R^3$. A massa total M do mundo é, segundo nossa concepção, finita e dada por

$$M = \rho \cdot 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa} = \frac{\sqrt{32}\pi^2}{\sqrt{\kappa^3 \rho}} . \qquad (28)$$

A interpretação teórica do universo real seria, portanto, caso ele corresponda às nossas considerações, a seguinte. O caráter de curvatura do espaço é, conforme a distribuição da matéria, variável no tempo e no espaço, mas pode ser aproximado em grande escala por um espaço esférico. Em todo caso, essa concepção é logicamente isenta de contradições e, do ponto de vista da teoria da relatividade geral, a mais natural; se ela é sustentável ou não à luz do conhecimento astronômico atual não será aqui investigado. Para alcançar essa concepção livre de contradições, foi necessário introduzir uma extensão das equações de campo da gravitação que não é justificada pelo nosso conhecimento empírico da gravitação. Deve-se, contudo, salientar que uma curvatura positiva do espaço resulta da matéria nele contida mesmo sem a introdução desse termo adicional; este se torna necessário apenas para possibilitar uma distribuição quase estática da matéria, conforme exigido pelo fato das pequenas velocidades estelares.

Publicado em 15 de fevereiro de 1917.