

Efeitos Não-Lineares: uma nova janela para o Universo primordial

Tays Miranda

École Normale Supérieure

Resumo

A compreensão do universo primordial é fundamental para conectar física de altas energias, cosmologia observacional e formação das estruturas cósmicas. Neste trabalho, discuto o formalismo estocástico aplicado à inflação e a cenários alternativos de colapso, destacando sua capacidade de acessar efeitos não-lineares na distribuição primordial de densidade. Apresento aplicações na produção de buracos negros primordiais (PBHs), incluindo o cenário do curvaton fortemente não-gaussiano, e discuto a estabilidade quântica de modelos colapsantes. Aponto ainda limitações conceituais do formalismo e perspectivas de investigação neste tópicos.

Abstract

Understanding the primordial universe is fundamental to connecting high-energy physics, observational cosmology, and the formation of cosmic structures. This article discusses the stochastic formalism applied to inflation and alternative collapse scenarios, highlighting its ability to access non-linear effects in the primordial density distribution. Applications to primordial black holes (PBHs), including strongly non-Gaussian curvaton scenarios, and to stochastic collapse models are presented, together with conceptual limitations and open questions.

Palavras-chave: inflação, formalismo estocástico, buracos negros primordiais, colapso estocástico.

Keywords: inflation, stochastic formalism, primordial black holes, stochastic collapse.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v7nEspecial.53347](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v7nEspecial.53347)

1 Introdução: por que o Universo Primordial importa?

O Universo primordial é o regime dinâmico onde a física gravitacional, a teoria quântica de campos e a cosmologia observacional se encontram de maneira inevitável. As escalas de energia envolvidas, possivelmente próximas à escala de grande unificação ou mesmo à escala de Planck, estão muito além do alcance de aceleradores terrestres. Ainda assim, processos ocorridos nesse regime deixaram impressões mensuráveis na radiação cósmica de fundo (Cosmic Microwave Background, CMB), na estatística da distribuição de galáxias e, possivelmente, no fundo estocástico de ondas gravitacionais.

Essa conexão entre microfísica e observação cosmológica estrutura aquilo que poderíamos chamar de agenda cosmológica contemporânea: experimentos no espectro eletromagnético (por exemplo Planck [1], JWST [2], LSST [3], SKA [4])

e no espectro de ondas gravitacionais (por exemplo LIGO [5], Virgo [6], KAGRA [7], LISA [8]) estão progressivamente mapeando diferentes janelas da história térmica e dinâmica do Universo. Cada uma dessas sondas acessa, de forma indireta, propriedades do campo primordial responsável pelas flutuações iniciais.

Do ponto de vista da física de partículas, o Universo primordial fornece um teste indireto para diversos cenários [9–12]:

- a hierarquia de massas de neutrinos e sua contribuição à evolução da estrutura;
- a existência de campos escalares leves (como curvatons ou moduladores);
- candidatos a matéria escura produzidos não termicamente;
- extensões do Modelo Padrão motivadas por teorias de grande unificação ou teoria de cordas.

Do ponto de vista cosmológico, toda a estrutura em larga escala — halos, galáxias, filamentos — emerge da amplificação gravitacional de pequenas flutuações primordiais de densidade. A variável relevante é a perturbação de curvatura ζ , cuja estatística codifica a física do regime primordial. Em primeira aproximação, observações da CMB indicam um espectro quase invariante de escala e aproximadamente Gaussiano [13]. No entanto, essa caracterização é essencialmente perturbativa e baseada em correlações de dois pontos.

Aqui surge uma questão que motiva este trabalho: A teoria padrão de perturbações é adequada para descrever flutuações típicas, mas pode falhar quando efeitos raros, como grandes sobredensidades, dominam a fenomenologia. Esses efeitos raros são precisamente os que podem levar à formação de buracos negros primordiais (PBHs) ou modificar significativamente a dinâmica de modelos alternativos à inflação.

Então se faz necessário compreender a distribuição completa de probabilidade do campo primordial. Essa exigência desloca o problema do domínio estritamente perturbativo para um regime intrinsecamente não-linear. É nesse contexto que o formalismo estocástico se torna relevante [14]. Ele não substitui a teoria padrão de perturbações, mas a estende para regimes onde a difusão quântica compete com o *drift* clássico, permitindo acessar as caudas da distribuição primordial. Se quisermos compreender:

- a produção eficiente (ou supressão) de PBHs [15],
- a estabilidade de fases colapsantes [16] e/ou modelos de ricochete,
- ou a sensibilidade das previsões ao potencial completo $V(\phi)$,

precisamos de uma ferramenta que trate flutuações quânticas e dinâmica de fundo de maneira acoplada e probabilística. Neste contexto, o Universo primordial é um regime especial onde essas questões deixam traços observáveis e porque ele nos força a confrontar, simultaneamente, gravitação, teoria quântica e estatística fora do equilíbrio.

2 Inflação de *slow-roll* e espaço de fase

A inflação cósmica descreve um regime de expansão acelerada impulsionado por um campo escalar homogêneo $\varphi(t)$ minimamente acoplado à gravidade [17–20]. A densidade de energia e a pressão associadas ao inflaton são

$$\rho = V(\varphi) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2, \quad P = -V(\varphi) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2, \quad (1)$$

de modo que a condição para aceleração cósmica, $\ddot{a} > 0$, equivale a

$$\rho + 3P < 0 \iff \dot{\varphi}^2 < V(\varphi). \quad (2)$$

A dinâmica do sistema é governada pela equação de Friedmann e pela equação de Klein–Gordon,

$$H^2 = \frac{V(\varphi) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0. \quad (4)$$

Inserindo a equação de Klein–Gordon na derivada temporal da equação de Friedmann, obtém-se

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2}, \quad (5)$$

de onde segue

$$\epsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3\dot{\varphi}^2/2}{V(\varphi) + \dot{\varphi}^2/2}. \quad (6)$$

A inflação ocorre quando $\epsilon_1 < 1$, enquanto o regime de *slow-roll* corresponde a $|\epsilon_n| \ll 1$ para os primeiros membros da hierarquia de parâmetros de fluxo de Hubble,

$$\epsilon_{n+1} = \frac{d \ln |\epsilon_n|}{dN}, \quad N \equiv \ln a, \quad (7)$$

iniciada em

$$\epsilon_0 = \frac{H_{\text{in}}}{H}. \quad (8)$$

A condição $\epsilon_1 \ll 1$ implica que a energia cinética é subdominante,

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi), \quad (9)$$

e, no mesmo regime, a equação de Klein–Gordon reduz-se a

$$3H\dot{\varphi} \simeq -V_{,\varphi}, \quad (10)$$

de modo que

$$H^2 \simeq \frac{V(\varphi)}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad P \simeq -\rho, \quad H \simeq \text{constante}. \quad (11)$$

Comentário sobre o espaço de fase

As equações (3) e (4) definem um sistema dinâmico bidimensional no espaço de fase $(\varphi, \dot{\varphi})$. A equação de Klein–Gordon é de segunda ordem, e portanto admite duas soluções independentes. No regime de *slow-roll*, uma dessas soluções satisfaz, em ordem dominante,

$$\dot{\varphi}_{\text{SR}} \simeq -\frac{V_{,\varphi}}{3H}, \quad (12)$$

enquanto a segunda corresponde à componente transiente associada ao termo de aceleração.

Quando a energia cinética inicialmente domina, $|\dot{\varphi}_{\text{in}}| \gg |V_{,\varphi}|/(3H)$, a equação de movimento fornece

$$|\dot{\varphi}| \propto e^{-3N}, \quad (13)$$

isto é, essa componente transiente decai como a^{-3} . Em poucos *e-folds*, a trajetória converge para a solução *slow-roll*.

Em termos geométricos, a solução *slow-roll* define uma direção atratora no plano $(\varphi, \dot{\varphi})$ já que a dinâmica rapidamente perde memória detalhada da velocidade inicial e passa a evoluir essencialmente ao longo de uma única trajetória determinada pelo potencial. Essa propriedade atratora é central para a robustez fenomenológica da inflação de campo único: a duração da fase inflacionária e as propriedades do espectro primordial tornam-se essencialmente determinadas pela forma local do potencial, e não pelas condições iniciais microscópicas no espaço de fase [21].

2.1 Flutuações quânticas e a origem das estruturas

No cenário inflacionário padrão, a expansão acelerada não resolve apenas problemas do modelo do Big Bang quente, como o problema do horizonte e da planura, mas também fornece o mecanismo físico para a geração das perturbações primordiais. Flutuações quânticas do campo escalar, inicialmente sub Hubble, são esticadas para escalas cosmológicas e tornam-se as sementes das

anisotropias da radiação cósmica de fundo e da estrutura em larga escala.

Para um campo escalar em um fundo aproximadamente de Sitter, os modos de Fourier das flutuações obedecem, em primeira aproximação, à equação [22–24]

$$\delta\ddot{\varphi}_k + 3H\delta\dot{\varphi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_k = 0. \quad (14)$$

Em escalas sub-Hubble ($k/a \gg H$), o termo de gradiente domina e os modos comportam-se como oscilações de vácuo quase livres,

$$\delta\varphi_k \simeq \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}, \quad (15)$$

onde η é o tempo conforme. À medida que a expansão estica os comprimentos de onda físicos e a condição $k/a \sim H$ é satisfeita (cruzamento do horizonte), o termo de atrito gravitacional torna-se dominante. Em escalas super-Hubble ($k/a \ll H$), as oscilações são amortecidas e o modo entra em um estado altamente comprimido (“*squeezed*”), aproximando-se de uma configuração clássica efetiva. A variância das flutuações no momento do cruzamento do horizonte é da ordem

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle_{k=aH} \simeq \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (16)$$

resultado originalmente obtido para campos livres em de Sitter e que se estende a campos fracamente acoplados no regime de *slow-roll* [25, 26].

As flutuações do campo induzem perturbações métricas. Em particular, a curvatura comóvel ζ pode ser interpretada como uma flutuação local no número de *e-folds* [27–29],

$$\zeta \equiv \delta N = \frac{H}{\dot{\varphi}} \delta\varphi. \quad (17)$$

Como $\delta\varphi \sim H/2\pi$ por *e-fold*, enquanto a variação clássica do campo no mesmo intervalo é

$$\delta\varphi_{\text{cl}} \simeq \frac{\dot{\varphi}}{H}, \quad (18)$$

obtém-se

$$\zeta \sim \frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}}. \quad (19)$$

Em escalas super-Hubble, ζ permanece aproximadamente constante, o que permite conectar diretamente as flutuações geradas durante a inflação às anisotropias observadas na radiação cósmica de fundo. O espectro quase invariante medido pelo satélite Planck é compatível com esse mecanismo.

2.2 Regime clássico versus regime quântico

Durante a maior parte da evolução inflacionária, a dinâmica do fundo é bem descrita pela solução clássica de *slow-roll*, e o número total de *e-folds* é dado por

$$N = \int H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi . \quad (20)$$

No entanto, a própria existência de flutuações quânticas implica que o campo executa, a cada intervalo de ordem H^{-1} , um deslocamento estocástico de amplitude $\delta\varphi_{\text{quan}} \sim H/2\pi$. Quando essa contribuição quântica se torna comparável à variação clássica,

$$\delta\varphi_{\text{quan}} \sim \delta\varphi_{\text{cl}} \equiv \frac{\dot{\phi}}{H} , \quad (21)$$

esse regime marca a transição para uma dinâmica efetivamente estocástica, na qual a evolução do campo deve ser tratada como um processo de difusão no espaço de fase.

Embora o cenário padrão de inflação de campo único em *slow-roll* esteja em acordo com as observações, ele não constitui uma teoria fundamental completa. Além disso, a descrição puramente clássica não captura adequadamente efeitos raros, regimes de flutuações grandes ou possíveis desvios não-gaussianos significativos. Essas limitações motivam a formulação estocástica da inflação (e modelos alternativos), que permite investigar sistematicamente o impacto da difusão quântica sobre a dinâmica do fundo.

3 O Formalismo Estocástico

Na abordagem perturbativa padrão, decomponmos o campo escalar como

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi , \quad (22)$$

onde φ_0 é o fundo homogêneo e $\delta\varphi$ descreve flutuações quânticas lineares. Essa descrição é adequada enquanto as perturbações permanecem pequenas e aproximadamente gaussianas. Contudo, em um regime inflacionário prolongado, o acúmulo de modos de longo comprimento de onda pode tornar-se relevante, exigindo uma formulação além da teoria perturbativa linear.

O formalismo estocástico, introduzido por [30] e desenvolvido sistematicamente em [31], fornece essa extensão. A ideia central é separar dinamicamente o campo em dois setores por meio de uma escala de *coarse-graining*

$$k_\sigma(N) = \sigma aH , \quad \sigma \lesssim 1 . \quad (23)$$

Para fixar a notação, escrevemos a decomposição em modos de Fourier como

$$\varphi(\mathbf{x}, N) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi_{\mathbf{k}}(N) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \quad \varphi_{-\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^* , \quad (24)$$

onde a segunda relação garante a realidade do campo. A separação infravermelho/ultravioleta é então implementada por uma janela no espaço de momentos,

$$\varphi_{\text{long}}(\mathbf{x}, N) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(k_\sigma - k) \varphi_{\mathbf{k}}(N) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \quad (25)$$

$$\varphi_{\text{short}}(\mathbf{x}, N) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(k - k_\sigma) \varphi_{\mathbf{k}}(N) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \quad (26)$$

de modo que $\varphi = \varphi_{\text{long}} + \varphi_{\text{short}}$.

Os modos sub-Hubble ($k > k_\sigma$) são tratados como flutuações quânticas em estado de vácuo. À medida que o Universo se expande, esses modos cruzam k_σ e entram no setor de longos comprimentos de onda. No regime super-Hubble, as variáveis canônicas tornam-se altamente correlacionadas e o modo fica efetivamente clássico, de modo que a transferência contínua de modos do setor curto para o longo atua como uma fonte de ruído para o campo *coarse-grained*. A evolução de φ_{long} pode ser descrita como um processo clássico sujeito a “chutes” quânticos.

Em termos do número de *e-folds* N , a dinâmica completa no espaço de fases é governada por

equações de Langevin (ver por exemplo [14, 21])

$$\frac{d\phi}{dN} = \pi_\phi + \hat{\xi}_\phi(N) , \quad (27)$$

$$\frac{d\pi_\phi}{dN} = -(3 - \epsilon_1)\pi_\phi - \frac{V_{,\phi}}{H^2} + \hat{\xi}_\pi(N) , \quad (28)$$

onde $\hat{\xi}_\phi$ e $\hat{\xi}_\pi$ são ruídos estocásticos associados à passagem dos modos através da escala k_σ . Suas correlações são fixadas pelas funções de modo avaliadas no horizonte móvel,

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{\xi}_f(N_1) \hat{\xi}_g(N_2) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \left. \frac{d^3 k_\sigma}{dN} \right|_{N_1} f_{k_\sigma}(N_1) g_{k_\sigma}^*(N_2) \delta(N_1 - N_2) . \end{aligned} \quad (29)$$

No limite de *slow-roll*, essa dinâmica reduz-se a uma única equação efetiva para o campo,

$$\frac{d\varphi}{dN} = -\frac{V_{,\varphi}}{3H^2} + \frac{H}{2\pi} \xi(N) , \quad (30)$$

onde o primeiro termo representa o *drift* clássico e o segundo a difusão quântica, com

$$\langle \xi(N) \xi(N') \rangle = \delta(N - N') , \quad (31)$$

essa propriedade decorre da hipótese de ruído branco gaussiano em N .

A eq.(30) é equação de Langevin: ela descreve a evolução de uma realização individual $\varphi(N)$ do processo estocástico. Entretanto, muitas questões físicas relevantes — como a existência de um estado de equilíbrio, a forma da distribuição de probabilidades ou os tempos de relaxação — dizem respeito não a uma trajetória específica, mas ao conjunto estatístico de todas as trajetórias possíveis.

A dinâmica estocástica acima define um processo markoviano: a probabilidade de transição entre dois valores do campo em N e $N + dN$ depende apenas do valor instantâneo $\phi(N)$, e não da história completa da trajetória. Essa propriedade decorre da hipótese de ruído branco, dado pela eq.(31), que implica ausência de memória temporal no setor infravermelho *coarse-grained*.

A descrição equivalente ao nível probabilístico é dada pela equação de Fokker–Planck associada ao processo markoviano. Para a distribuição $P_N(\phi)$ do campo *coarse-grained*, obtém-se

$$\frac{\partial P_N(\phi)}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{V_{,\phi}}{3H^2} P_N(\phi) \right] + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left[\frac{H^2}{8\pi^2} P_N(\phi) \right] . \quad (32)$$

O primeiro termo codifica o transporte determinístico induzido pelo *drift* clássico, enquanto o segundo representa a difusão no espaço de campo produzida pelo ruído quântico. Assim, a equação de Langevin e a equação de Fokker–Planck constituem duas descrições complementares do mesmo fenômeno: a primeira no nível das trajetórias, a segunda no nível da distribuição de probabilidade.

Uma vez conhecida $P_N(\phi)$, o valor esperado de qualquer função local do campo é obtido por

$$\langle F(\varphi) \rangle_N = \int d\phi F(\phi) P_N(\phi) , \quad (33)$$

o que explicita o sentido em que o setor infravermelho pode ser tratado como uma variável clássica estocástica: todos os correladores locais relevantes podem ser reconstruídos a partir da PDF [31].

Em regime estacionário ($\partial_N P = 0$), obtém-se a distribuição de equilíbrio

$$P_{\text{eq}}(\phi) \propto \exp \left[-\frac{8\pi^2 V(\phi)}{3H^4} \right] , \quad (34)$$

que é, em geral, não-gaussiana. Consequentemente, não é consistente assumir linearidade ou gaussianidade a priori ao analisar observáveis derivados dessa distribuição [32].

Além disso, a estrutura espectral do operador de Fokker–Planck permite determinar tempos de relaxação, funções de autocorrelação e, em potenciais com múltiplos mínimos, taxas de transição entre domínios. O formalismo estocástico captura, portanto, efeitos cumulativos e genuinamente não-perturbativos, como inflação eterna, regimes dominados por difusão ou dinâmicas próximas a pontos críticos do potencial.

4 Aplicações

4.1 Buracos Negros Primordiais

Buracos negros primordiais podem se formar a partir do colapso gravitacional de sobredensidades suficientemente grandes no campo de contraste de densidade primordial [33],

$$\delta = \frac{\delta \rho}{\rho} . \quad (35)$$

Uma caracterização conveniente da condição de colapso é dada pela *compaction function* $C(r)$, que mede o excesso de massa dentro de uma esfera de raio r [34]. A formação ocorre quando, no momento de entrada no horizonte, $C(r)$ excede um valor crítico C_c determinado numericamente.

Como a fração de PBHs formados depende exponencialmente da cauda da distribuição estatística das flutuações, o problema é extremamente sensível à não-gaussianidade [35]. Pequenas modificações na PDF de ζ podem produzir variações de muitas ordens de magnitude na abundância final.

Consideramos um campo espectador leve χ , com potencial quadrático

$$V(\chi) = \frac{1}{2}m^2\chi^2, \quad m^2 \ll H^2, \quad (36)$$

evoluindo durante inflação em um fundo aproximadamente de Sitter. No regime estocástico, o campo atinge o equilíbrio com [31, 36]

$$\langle \chi \rangle = 0, \quad \langle \chi^2 \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2}. \quad (37)$$

Embora a média seja nula, as flutuações de energia são intrinsecamente não-lineares [37],

$$\frac{\delta\rho_\chi(\mathbf{x})}{\langle \rho_\chi \rangle} = \frac{\chi(\mathbf{x})^2}{\langle \chi^2 \rangle} - 1, \quad (38)$$

de modo que a variável relevante obedece a uma distribuição do tipo gaussiana ao quadrado, gerando caudas não-gaussianas significativas.

Após o fim da inflação, o campo espectador χ (curvaton) passa a oscilar em torno do mínimo do potencial e comporta-se efetivamente como matéria não relativística [37–39]. Sua energia é posteriormente transferida ao setor de radiação através de um processo de decaimento perturbativo caracterizado por uma taxa Γ , que controla o momento da conversão de sua fração de energia em perturbações de curvatura. Quando o campo espectador decai, sua fração de energia Ω_χ é convertida em perturbações de curvatura ζ_χ , cuja estatística herda essa estrutura não-gaussiana.

No regime em que as auto-interações são relevantes, a expansão perturbativa convencional falha para campos leves. O formalismo estocástico permite calcular diretamente a distribuição conjunta de dois pontos do campo. Para tempos

iguais, ela pode ser escrita como [32]

$$\rho_{2\chi}(\chi, \mathbf{r}; \chi', \mathbf{r}') = \left(\frac{m}{H^2}\right)^2 \psi_0(x)\psi_0(x') \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(x') [aH|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]^{-2\Lambda_n/H}, \quad (39)$$

onde

$$x = \frac{m\chi}{H}, \quad \Lambda_n = \frac{nm^2}{3H}, \quad (40)$$

e ψ_n são autofunções ortonormais do operador de Fokker–Planck.

A função de correlação de ζ_χ é então obtida integrando a distribuição conjunta,

$$\langle \zeta_\chi(\mathbf{r})\zeta_\chi(\mathbf{r}') \rangle = \int d\chi d\chi' \zeta(\chi)\zeta(\chi') \rho_{2\chi}, \quad (41)$$

e o espectro de potência resulta da transformada de Fourier,

$$\mathcal{P}_{\zeta_\chi}(k) = \frac{2^{3-\frac{4m^2}{3H^2}} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{2m^2}{3H^2}\right)}{9\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2m^2}{3H^2}\right)} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{4m^2}{3H^2}}. \quad (42)$$

Impondo o limite observacional [13]

$$\mathcal{P}_{\zeta_\chi}(0.05 \text{ Mpc}^{-1}) < 10^{-10}, \quad (43)$$

obtém-se a restrição

$$\frac{m^2}{H^2} \gtrsim 0.3, \quad (44)$$

para $H \sim 10^{13} \text{ GeV}$.

O critério de formação de PBHs pode ser expresso pela *compaction function* [34, 35]

$$C(r) = C_l(r) - \frac{5+3w}{12(1+w)} C_l(r)^2, \quad (45)$$

com

$$C_l(r) = -f(w)r\zeta'(r), \quad f(w) = \frac{6(1+w)}{5+3w}. \quad (46)$$

A abundância final depende da PDF completa de C_l . A partir das correlações do campo χ calculadas via formalismo estocástico, determina-se numericamente $P(C_l)$, calcula-se a fração inicial de colapso $\beta(r)$, definida como a fração da densidade de energia que colapsa em PBHs na entrada

no horizonte da escala r , e evolui-se essa quantidade até o presente para obter

$$f_{\text{PBH}} \equiv \frac{\Omega_{\text{PBH}}}{\Omega_{\text{DM}}} , \quad (47)$$

que representa a fração atual da matéria escura constituída por PBHs.

Na referência [40], encontramos que PBHs na faixa de massas de asteroide,

$$10^{-16} M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^{-10} M_{\odot} , \quad (48)$$

podem constituir toda a matéria escura para

$$H \gtrsim 10^{12} \text{ GeV} , 10^{-18} \text{ GeV} \lesssim \Gamma \lesssim 10^{-13} \text{ GeV} , \quad (49)$$

aqui assumimos a aproximação de decaimento instantâneo, na qual a conversão ocorre quando $H \simeq \Gamma$, tratando a transferência de energia como abrupta. Essa hipótese simplifica a relação entre a fração de energia Ω_{χ} no momento do decaimento e a amplitude final de ζ_{χ} , mas ignora efeitos dinâmicos associados a um processo prolongado.

Apesar desses resultados, permanecem questões em aberto. A determinação precisa da função de massa dos PBHs requer estender o cálculo da PDF além da truncação de monopolo empregada na reconstrução de $P(C_l)$. Além disso, a possível detecção de um fundo estocástico de ondas gravitacionais associado à formação desses objetos — por exemplo, por missões como LISA — poderia fornecer um teste observacional direto do cenário. Finalmente, a exigência de que f_{PBH} não exceda a fração observacionalmente permitida pode impor limites superiores sobre o valor máximo atingido por Ω_{χ} antes do decaimento, restringindo ainda mais o espaço de parâmetros do modelo.

4.2 Cenários Alternativos: Universo Colapsante

Modelos com fase de contração seguidos por um mecanismo de *bounce* oferecem uma alternativa à inflação como origem das estruturas em larga escala [41, 42]. Tanto em uma expansão acelerada quanto em uma contração desacelerada, o comprimento de Hubble comóvel diminui, permitindo que flutuações quânticas inicialmente sub-Hubble cruzem para o regime super-Hubble. A questão

central é se essas flutuações permanecem adiabáticas ou se podem modificar a estabilidade da solução clássica.

Consideramos um campo escalar canônico com potencial exponencial [43, 44]

$$V(\phi) = V_0 e^{-\kappa \lambda_0 \phi} , \quad (50)$$

Essa escolha não é arbitrária: potenciais exponenciais admitem soluções exatas de potência para o fator de escala,

$$a(t) \propto |t|^p , \quad (51)$$

permitindo caracterizar de maneira analítica tanto a dinâmica de fundo quanto o espectro de perturbações. Além disso, eles emergem naturalmente como aproximações efetivas em teorias com dimensões extras compactificadas.

Dependendo do valor de λ_0 , esse modelo descreve inflação ($p > 1$), colapso ekpirótico ($p \ll 1$) ou colapso sem pressão ($p = 2/3$).

Para analisar a dinâmica introduzimos as variáveis adimensionais do espaço de fase [45]

$$x = \frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H} , \quad y = \frac{\kappa \sqrt{\pm V}}{\sqrt{3}H} , \quad (52)$$

que satisfazem a restrição de Friedmann $x^2 \pm y^2 = 1$. O sistema possui os pontos críticos

$$(A_{\pm}) : \quad x = \pm 1, \quad y = 0 , \quad (53)$$

$$(B) : \quad x_B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{6}}, \quad y_B = \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{6}} . \quad (54)$$

A estabilidade depende do sinal de H . Em universo colapsante ($H < 0$), a solução de escala é estável apenas para potenciais negativos íngremes¹ ($\lambda_0^2 > 6$). Para potenciais positivos planos, incluindo o caso sem pressão, o ponto fixo é classicamente instável, conforme demonstrado em [45].

A equação de Mukhanov–Sasaki para uma solução de potência pode ser escrita na forma de Bessel, com índice

$$\nu = \frac{3}{2} + \frac{1}{p-1} = \frac{3}{2} + \frac{\lambda_0^2}{2 - \lambda_0^2} . \quad (55)$$

¹No caso ekpirótico, o potencial é negativo e suficientemente íngreme ($\lambda_0^2 > 6$). A energia potencial negativa compensa parcialmente a contribuição cinética no balanço da equação de Friedmann, permitindo uma contração com equação de estado efetiva $w \gg 1$. Esse regime suprime anisotropias clássicas e estabiliza a solução de fundo frente a perturbações lineares.

A solução normalizada ao vácuo adiabático no regime sub-Hubble conduz, no limite super-Hubble ($|k\eta| \rightarrow 0$), a [46]

$$\delta\varphi_k = \frac{i}{a} \sqrt{\frac{1}{4\pi k}} \frac{\Gamma(|\nu|) 2^{|\nu|}}{|k\eta|^{|\nu|-1/2}}, \quad (56)$$

o que implica um espectro de potência

$$\mathcal{P}_{\delta\varphi} \propto \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 |k\eta|^{3-2|\nu|}. \quad (57)$$

O índice espectral é portanto

$$n_s - 1 = 3 - 2|\nu|. \quad (58)$$

O *tilt* depende apenas de $|\nu|$, sendo invariante sob a transformação $\nu \rightarrow -\nu$ [47]. Essa simetria reflete o facto de que a solução geral contém dois modos independentes, e que a transformação equivalente em p troca o modo dominante com o modo subdominante no regime super-Hubble.

Em particular, um espectro quase invariante de escala ($n_s \simeq 1$) pode ser obtido tanto para $\nu = +3/2$ quanto para $\nu = -3/2$. O primeiro caso corresponde à inflação quase-de Sitter, na qual o modo constante domina fora do horizonte. O segundo corresponde ao colapso sem pressão ($w = 0$), em que o modo dominante é temporalmente crescente. Nesse regime, as perturbações super-Hubble crescem como $\delta\varphi \propto H$, acompanhando o aumento de H^2 durante a contração. A obtenção de invariância de escala está, portanto, diretamente ligada à instabilidade da solução clássica de colapso sem pressão.

Na referência [16], linearizando a dinâmica próxima ao ponto de escala x_B e incluindo o ruído quântico obtém-se a equação de Langevin

$$\bar{x}' = m(\bar{x} - x_B) + \hat{\xi}_x, \quad m = \frac{\lambda_0^2 - 6}{2}. \quad (59)$$

A variância pode ser decomposta como

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x,\text{cl}}^2 + \sigma_{x,\text{qu}}^2, \quad (60)$$

sendo a contribuição quântica proporcional a

$$\Xi_{x,x} \propto g(\nu, \sigma) \kappa^2 H^2. \quad (61)$$

O comportamento depende crucialmente do sinal de ν . Para $\nu > 0$ (inflação e colapso ekpirótico), as perturbações são adiabáticas e não deslocam a trajetória clássica no espaço de fase, resultando em $\delta x = 0$. Para $\nu < 0$, ocorre difusão genuína no espaço de fase.

No caso crítico do colapso sem pressão ($\nu = -3/2$), o espectro é aproximadamente invariante de escala e a variância cresce como uma trajetória aleatória (*random walk*),

$$\sigma_{x,\text{qu}}^2 \simeq \frac{3}{128\pi} \frac{H^2}{M_{\text{pl}}^2} (N_\star - N), \quad (62)$$

levando à condição de *backreaction*

$$|H(N)| \approx \sqrt{\frac{128\pi}{3(N_\star - N)}} M_{\text{pl}}. \quad (63)$$

Portanto, para que a difusão estocástica desvie a trajetória clássica antes de atingir a escala de Planck, são necessários aproximadamente 134 *e-folds* de colapso iniciando em energia suficientemente baixa. Caso contrário, a fase de contração permanece efetivamente clássica até o regime de gravidade quântica.

Apesar de a análise acima mostrar que um espectro quase invariante pode emergir durante a fase de contração, a sua relevância física exige a conexão consistente com a fase de expansão através do *bounce*. Essa transição não é trivial: as variáveis normalizadas usuais $x = \kappa\dot{\varphi}/(\sqrt{6}H)$ e $y = \kappa\sqrt{V}/(\sqrt{3}H)$ tornam-se singulares quando $H \rightarrow 0$, deixando de fornecer uma descrição regular da dinâmica exatamente no regime em que o acoplamento entre contração e expansão deve ser controlado.

Uma formulação verdadeiramente robusta requer, portanto, um conjunto de variáveis bem definidas no ponto $H = 0$, capaz de acompanhar a evolução estocástica através do *bounce*. Além disso, resultados recentes mostram que mesmo flutuações quânticas de campos teste geram inevitavelmente fontes adicionais, como o cisalhamento estocástico, durante a contração [48], o que reforça a necessidade de uma descrição geral que conecte contração, bounce e expansão dentro de um único quadro dinâmico.

5 Conclusão

O formalismo estocástico oferece uma extensão da dinâmica inflacionária para regimes onde a difusão quântica compete com o *drift* clássico. Ao reformular a evolução do setor infravermelho como um processo markoviano no espaço de fase,

ele permite determinar não apenas correlações médias, mas a distribuição completa de probabilidade do campo primordial.

Em cenários de produção de PBHs, essa abordagem revela a sensibilidade exponencial da abundância às caudas não-gaussianas da PDF. Em modelos colapsantes, mostra explicitamente como a obtenção de um espectro quase invariante de escala pode estar associada a instabilidades dinâmicas e a possíveis efeitos de *backreaction* antes do regime de Planck.

Esses resultados apontam para uma questão mais geral: sob quais condições os métodos estocásticos permanecem válidos além do regime inflacionário de *slow-roll*. A consistência dessa abordagem requer uma série de ingredientes teóricos [49]. Em primeiro lugar, a validade da aproximação de universos separados, cuja extensão para fases não inflacionárias ou não expansivas tem sido recentemente discutida na literatura. Em segundo lugar, uma compreensão cuidadosa das escolhas de gauge e da relação entre o gauge espacialmente plano e gauges associados a superfícies de densidade uniforme ou de expansão uniforme. Por fim, o controle da transição quântico-clássica das perturbações, tipicamente associada ao *squeezing* dos modos.

Nesse sentido, tanto cenários dominados por flutuações raras quanto modelos cosmológicos alternativos à inflação oferecem laboratórios teóricos naturais para explorar os limites de validade dessa descrição e aprofundar nossa compreensão da física do Universo primordial.

6 Sessão agradecimentos

Agradeço aos editores pela leitura atenta e pelos comentários. Agradeço também aos meus colaboradores nos trabalhos aqui mencionados pelas discussões e contribuições que motivaram parte das reflexões apresentadas.

Sobre a autora

Tays Miranda (tays.miranda@phys.ens.fr) é pesquisadora de pós-doutorado (Junior Research Chair) em Paris. Sua pesquisa concentra-se na

cosmologia do universo primordial, com ênfase em efeitos estocásticos.

Referências

- [1] N. Aghanim et al., *Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck*, *Astron.Astrophys.* **641**, A1 (2020). [ArXiv:1807.06205](#).
- [2] J. P. Gardner et al., *The James Webb Space Telescope*, *Space Sci.Rev.* **123**, 485 (2006). [ArXiv:astro-ph/0606175](#).
- [3] Z. Ivezić et al., *LSST: From Science Drivers to Reference Design*, *Astrophys.J.* **873**, 111 (2019). [ArXiv:0805.2366](#).
- [4] R. Braun et al., *Anticipated Performance of the Square Kilometre Array – Phase 1 (SKA1)*, arXiv (2019). [ArXiv:1912.12699](#).
- [5] B. P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys.Rev.Lett.* **116**, 061102 (2016). [ArXiv:1602.03837](#).
- [6] F. Acernese et al., *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*, *Class.Quant.Grav.* **32**, 024001 (2015). [ArXiv:1408.3978](#).
- [7] Y. Aso et al., *Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector*, *Phys.Rev.D* **88**, 043007 (2013). [ArXiv:1306.6747](#).
- [8] P. Amaro-Seoane et al., *Laser Interferometer Space Antenna*, arXiv (2017). [ArXiv:1702.00786](#).
- [9] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990).
- [10] J. Lesgourgues et al., *Neutrino Cosmology* (Cambridge University Press, 2013).
- [11] G. Bertone, D. Hooper e J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, *Phys.Rept.* **405**, 279 (2005). [ArXiv:hep-ph/0404175](#).
- [12] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, arXiv (2009). [ArXiv:0907.5424](#).

- [13] Y. Akrami et al., *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, *Astron.Astrophys.* **641**, A10 (2020). [ArXiv:1807.06211](#).
- [14] V. Vennin e A. A. Starobinsky, *Correlation Functions in Stochastic Inflation*, *Eur.Phys.J.C* **75**, 413 (2015). [ArXiv:1506.04732](#).
- [15] J. M. Ezquiaga, J. Garcia-Bellido e V. Vennin, *The exponential tail of inflationary fluctuations: consequences for primordial black holes*, *JCAP* **03**, 029 (2020). [ArXiv:1912.05399](#).
- [16] T. Miranda, E. Frion e D. Wands, *Stochastic collapse*, *JCAP* **01**, 026 (2020). [ArXiv:1910.10000](#).
- [17] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, *Phys.Lett.B* **91**, 99 (1980).
- [18] K. Sato, *First-order phase transition of a vacuum and expansion of the Universe*, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **195**, 467 (1981).
- [19] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Phys.Rev.D* **23**, 347 (1981).
- [20] A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario*, *Phys.Lett.B* **108**, 389 (1982).
- [21] J. Grain e V. Vennin, *Stochastic inflation in phase space: Is slow roll a stochastic attractor?*, *JCAP* **05**, 045 (2017). [ArXiv:1703.00447](#).
- [22] S. W. Hawking, *The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe*, *Phys.Lett.B* **115**, 295 (1982).
- [23] A. A. Starobinsky, *Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations*, *Phys.Lett.B* **117**, 175 (1982).
- [24] A. H. Guth e S.-Y. Pi, *Fluctuations in the New Inflationary Universe*, *Phys.Rev.Lett.* **49**, 1110 (1982).
- [25] M. Sasaki, *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, *Prog.Theor.Phys.* **76**, 1036 (1986).
- [26] V. F. Mukhanov, *Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, *JETP Lett.* **41**, 493 (1985).
- [27] A. A. Starobinsky, *Multicomponent de Sitter (inflationary) stages and the generation of perturbations*, *JETP Lett.* **42**, 152 (1985).
- [28] M. Sasaki e E. D. Stewart, *A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation*, *Prog.Theor.Phys.* **95**, 71 (1996). [ArXiv:astro-ph/9507001](#).
- [29] D. H. Lyth e Y. Rodriguez, *The inflationary prediction for primordial non-Gaussianity*, *Phys.Rev.Lett.* **95**, 121302 (2005). [ArXiv:astro-ph/0504045](#).
- [30] A. A. Starobinsky, *Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe*, *Lect.Notes Phys.* **246**, 107 (1986).
- [31] A. A. Starobinsky e J. Yokoyama, *Equilibrium state of a self-interacting scalar field in the de Sitter background*, *Phys.Rev.D* **50**, 6357 (1994). [ArXiv:astro-ph/9407016](#).
- [32] T. Markkanen et al., *Scalar correlation functions in de Sitter space from the stochastic spectral expansion*, *JCAP* **08**, 001 (2019). [ArXiv:1904.11917](#).
- [33] B. J. Carr, *The Primordial black hole mass spectrum*, *Astrophys.J.* **201**, 1 (1975).
- [34] I. Musco, *Threshold for primordial black holes: Dependence on the shape of the cosmological perturbations*, *Phys.Rev.D* **100**, 123514 (2019). [ArXiv:1809.02127](#).
- [35] S. Young, I. Musco e C. T. Byrnes, *Primordial black hole formation and abundance: contribution from the non-linear relation between the density and curvature perturbation*, *JCAP* **11**, 012 (2019). [ArXiv:1904.00984](#).
- [36] K. Enqvist et al., *Spectator field dynamics in de Sitter and curvaton initial conditions*, *JCAP* **10**, 052 (2012). [ArXiv:1205.5446](#).
- [37] D. H. Lyth e D. Wands, *Generating the curvature perturbation without an inflaton*,

- [Phys.Lett.B](#) **524**, 5 (2002). [ArXiv:hep-ph/0110002](#).
- [38] T. Moroi e T. Takahashi, *Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background*, [Phys.Lett.B](#) **522**, 215 (2001). [ArXiv:hep-ph/0110096](#).
- [39] K. Enqvist e M. S. Sloth, *Adiabatic CMB perturbations in pre-Big Bang string cosmology*, [Nucl.Phys.B](#) **626**, 395 (2002). [ArXiv:hep-ph/0109214](#).
- [40] A. D. Gow, T. Miranda e S. Nurmi, *Primordial black holes from a curvaton scenario with strongly non-Gaussian perturbations*, [JCAP](#) **11**, 006 (2023). [ArXiv:2307.03078](#).
- [41] M. Novello e J. M. Salim, *Non-singular cosmological models*, [Phys.Rev.D](#) **20**, 377 (1979).
- [42] V. N. Melnikov e S. V. Orlov, *Non-singular cosmological models with a bounce*, [Phys.Lett.A](#) **70**, 263 (1979).
- [43] J. J. Halliwell, *Scalar fields in cosmology with an exponential potential*, [Phys.Lett.B](#) **185**, 444 (1987).
- [44] E. J. Copeland, A. R. Liddle e D. Wands, *Exponential potentials and cosmological scaling solutions*, [Phys.Rev.D](#) **57**, 123505 (1998). [ArXiv:hep-ph/9711068](#).
- [45] I. P. C. Heard e D. Wands, *Cosmology with positive and negative exponential potentials*, [Class.Quant.Grav.](#) **19**, 5435 (2002). [ArXiv:gr-qc/0206085](#).
- [46] A. A. Starobinsky, *Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe*, [JETP Lett.](#) **30**, 682 (1979).
- [47] D. Wands, *Cosmological perturbations through the big bang*, [Phys.Rev.D](#) **60**, 023507 (1999). [ArXiv:gr-qc/9809062](#).
- [48] J. Grain e V. Vennin, *Unavoidable shear from quantum fluctuations in contracting cosmologies*, [Eur.Phys.J.C](#) **81**, 132 (2021). [ArXiv:2005.04222](#).
- [49] C. Pattison, V. Vennin e D. Wands, *Quantum diffusion during inflation and primordial black holes*, [JCAP](#) **10**, 011 (2019). [ArXiv:1905.06300](#).