

Buracos negros regulares e dinâmica térmica de campos

Jhonny A. A. Ruiz¹ e Alesandro Ferreira²

¹Universidade Federal de Juiz de Fora

²Universidade Federal de Mato Grosso

Resumo

Trabalho apresentado no evento As Astrocientistas: III Encontro Brasileiro de Meninas e Mulheres da Astrofísica, Cosmologia e Gravitação, realizado entre os dias 31 de março e 4 de abril de 2025.

Abstract

Work presented at 'The Astro-scientists: III Brazilian Meeting of Girls and Women in Astrophysics, Cosmology, and Gravitation,' held between March 31 and April 4, 2025.

Palavras-chave: buracos negros, teoria quântica de campos, temperatura.

Keywords: black holes, quantum field theory, temperature.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v7nEspecial.53379](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v7nEspecial.53379)

1 Campo escalar massivo

A expressão geral para o tensor energia-momento dessa teoria de campo escalar não minimal é dada por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + \left[\xi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \right] \phi^2, \quad (1)$$

supondo que a função de acoplamento não mínimo $f(\phi)$ seja dada por $f(\phi) = \frac{1}{2} \xi \phi^2$ onde ξ é o parâmetro conforme [1].

Para evitar divergências do produto de operadores de campo no mesmo ponto do espaço-tempo, esse tensor é escrito em diferentes pontos do espaço-tempo como

$$T_{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \tau \left\{ \partial_\mu \phi(x) \partial'_\nu \phi(x') - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\kappa \phi(x) \partial'_\kappa \phi(x') + \left[\xi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \right] \phi(x) \phi(x') \right\}, \quad (2)$$

onde τ é o operador de ordenamento temporal.¹

¹Aqui estamos usando a notação abreviada $x^\mu \equiv x = (x^0, \vec{x})$

Assim, o tensor energia-momento torna-se

$$T_{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma_{\mu\nu} \tau(\phi(x) \phi(x')) - I_{\mu\nu} \delta(x - x') \right\}, \quad (3)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\kappa \partial'_\kappa - \partial_\mu \partial'_\nu + \xi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \quad (4)$$

e

$$I_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} g_{\mu\nu} n_0^\kappa n_{0\kappa} + i n_{0\mu} n_{0\nu}. \quad (5)$$

Para quantificar os efeitos térmicos e de tamanho, precisamos calcular o valor esperado no vácuo do tensor energia-momento. Este é dado por

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \langle 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left[i \Gamma_{\mu\nu} G_0(x - x') - I_{\mu\nu} \delta(x - x') \right], \quad (6)$$

onde

$$i G_0(x - x') = \langle 0 | \tau(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle, \quad (7)$$

é o propagador do campo escalar massivo, que pode ser escrito como

$$G_0(x - x') = -\frac{i m}{4\pi^2} \frac{K_1\left(m\sqrt{-(x - x')^2}\right)}{\sqrt{-(x - x')^2}} \quad (8)$$

no espaço de coordenadas x . Aqui K_ν é a função de Bessel modificada, a qual pode ser escrita como

$$K_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = e^{-\nu\pi/2} J_\nu(xe^{i\pi/2}) \quad (9)$$

onde J_ν são definidas como as funções de Bessel do primeiro tipo [2]. Nosso foco é investigar Buracos Negros Regulares (BNR) dentro desta teoria. Um BNR pode ser visto como uma solução das equações de campo de Einstein com simetria esférica, cujo elemento de linha pode ser expressado como segue

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (10)$$

onde $f(r)$ é uma função geral de r que pode ser escrita na forma

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^{p-1}}{[r^q + r_0^q]^{p/q}}. \quad (11)$$

Aqui M é a massa do BNR, q e p são parâmetros inteiros e r_0 pode ser vista como a carga magnética ou o comprimento de Hubble do BNR, para uma escolha adequada de p e q , tais como nos casos das soluções de Bardeen ($p = 3$, $q = 2$) e Hayward ($p = q = 3$), respectivamente [3, 4]. A principal quantidade que precisamos determinar é $\Gamma_{\mu\nu}$, conforme definido na Eq. (4). Ela assume a forma

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\kappa\partial'_\kappa - \partial_\mu\partial'_\nu + \xi(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2 \quad (12)$$

2 Dinâmica térmica de campo

Nesta seção, é brevemente apresentada uma teoria quântica e térmica conhecida como formalismo TFD. Para uma revisão desse formalismo, ver as referência [5]. Esse formalismo considera o valor esperado no vácuo de um operador arbitrário como equivalente à média estatística. Para isso, deve-se propor um novo estado fundamental, denominado vácuo térmico. Assim, o valor médio de um operador arbitrário $\mathcal{O}$ em um vácuo térmico é definido como

$$\mathcal{O} = \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle \quad (13)$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$, com k_B sendo a constante de Boltzmann e T a temperatura. Essa construção requer dois ingredientes: (i) o espaço de Fock dobrado $\mathcal{S}_T$ dado pelo produto tensorial

$$\mathcal{S}_T = \mathcal{S} \otimes \tilde{\mathcal{S}}, \quad (14)$$

onde $\mathcal{S}$ é o espaço de Fock padrão e $\tilde{\mathcal{S}}$ é o espaço dual (til). (ii) A transformação de Bogoliubov, que envolve uma rotação entre $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ com D parâmetros, um para cada dimensão na forma $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{D-1})$ onde α é o parâmetro de compactificação

Outra característica do formalismo TFD é a introdução de um parâmetro de compactificação no propagador da teoria. Aqui, introduzimos esse parâmetro no propagador do campo escalar [6], começando com a expressão

$$G_0^{AB}(x - x'; \alpha) = i \langle 0(\alpha) | \tau [\phi^A(x) \phi^B(x')] | 0(\alpha) \rangle \\ = i \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} G_0^{AB}(k; \alpha) \quad (15)$$

onde

$$G_0^{AB}(k; \alpha) = \mathcal{B}^{-1}(\alpha) G_0^{AB}(k) \mathcal{B}(\alpha), \quad (16)$$

com

$$G_0^{AB}(k) = \begin{pmatrix} G_0(k) & 0 \\ 0 & \eta G_0^*(k) \end{pmatrix} \quad (17)$$

e $G_0(k)$ é o propagador do campo escalar definido previamente². Seu componente físico é dado pelo componente $A = B = 1$, de modo que

$$G_0^{AB}(k; \alpha) = G_0(k) + \eta v^2(k; \alpha) [G_0^*(k) - G_0(k)], \quad (18)$$

onde $v^2(k; \alpha)$ é a transformação de Bogoliubov generalizada. Nesse contexto, vamos reescrever o valor esperado no vácuo do tensor energia-momento, dado na Eq. (6), usando a notação no espaço duplicado. Assim,

$$\langle T_{\mu\nu}^{(AB)}(x; \alpha) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left[i \Gamma_{\mu\nu} G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - I_{\mu\nu} \delta(x - x') \delta^{AB} \right], \quad (19)$$

onde δ^{AB} é o delta de Kronecker. Para obter um tensor energia-momento físico que leve a quantidades finitas, é necessário um procedimento de

²Aqui A, B=1,2 representam o espaço duplicado e $G_0^*(k)$ é o complexo conjugado de $G_0(k)$.

renormalização. Aqui, aplica-se a prescrição de Casimir. O tensor energia-momento finito resultante é dado por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) = \langle T_{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) \rangle - \langle T_{\mu\nu(ab)}(x) \rangle. \quad (20)$$

Com esse procedimento, obtemos uma quantidade física mensurável, explicitamente

$$\mathcal{T}_{\mu\nu(ab)}(x; \alpha) = i \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \Gamma_{\mu\nu}(x, x') \bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) \right\}, \quad (21)$$

onde

$$\bar{G}_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) = G_0^{(ab)}(x - x'; \alpha) - G_0^{(ab)}(x - x'). \quad (22)$$

3 Resultados e conclusões

Consideramos aqui um campo escalar massivo acoplado de forma não mínima à gravidade. Utilizando a estrutura topológica do formalismo TFD, investigamos efeitos térmicos e de tamanho, considerando um BNR como fundo gravitacional. Adicionalmente, calculamos a lei de Stefan-Boltzmann e o efeito Casimir para o campo escalar massivo em um espaço-tempo curvo. Nossos resultados mostram que essas quantidades exibem comportamentos distintos quando diferentes BNRs são considerados. Comparamos também os resultados para BNRs com aqueles obtidos para o buraco negro de Schwarzschild. Embora os resultados para o buraco negro de Schwarzschild e para o BNR de Hayward apresentem singularidades, os resultados para o buraco negro de Bardeen são sempre finitos (Figura 1). Para as pressões de Casimir, quando os espaço-tempos de Schwarzschild e Hayward são considerados, há uma transição de força atrativa para repulsiva. Além disso, para um r menor do que o horizonte de eventos, a força é repulsiva e infinitamente grande. Para o buraco negro de Bardeen, a força é sempre atrativa e finita. Tanto para a pressão de Casimir quanto para a energia, no regime $r \geq 0$, as soluções de BNR consideradas apresentam pequenas diferenças e, para grandes raios, as três soluções tendem ao mesmo valor negativo (Figura 2). Comparados com a solução de Reissner-Nordstrom (RN) para um buraco negro carregado, nossos resultados sugerem que apenas valores próximos às cargas extremas de cada solução podem reproduzir

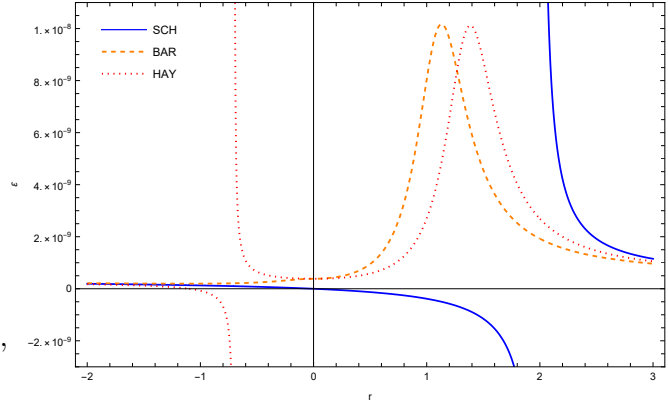


Figura 1: Comparação entre a energia ($\mathcal{E}$) e o raio (r) para diferentes fundos gravitacionais: buraco negro de Schwarzschild (linha contínua), RBH de Bardeen (tracejada) e RBH de Hayward (pontilhada). Aqui, usamos $\mathcal{E} = E \times 10^{-9}$, $M = T = 1$, $\xi = 1/6$ e $r_{0B} = 0,8$, $r_{0H} = 1,1$, de acordo com [7]. Note o comportamento singular para as energias de Schwarzschild e Hayward em $r = 2M$ e $r = -r_{0H}$, respectivamente.

o comportamento correspondente no caso RN (Figura 3).

Agradecimentos

Este trabalho de A. F. S. é parcialmente apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projeto nº 312406/2023-1. J. A. A. Ruiz agradece à UTEC e à UFJF pelo apoio durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Sobre os autores

Jhonny A. A. Ruiz (jaar@cosmo-ufes.org) é especialista na área de gravitação e cosmologia, atuando principalmente em aplicações da teoria quântica de campos em cosmologia primordial. Atualmente trabalha como professor de física no ensino médio.

Alesandro F. Santos (alesandro@fisica.ufmt.br) é especialista na área de gravitação e teoria quântica dos campos. É professor do instituto de física da UFMT e pesquisador bolsista nível 2 do CNPq.

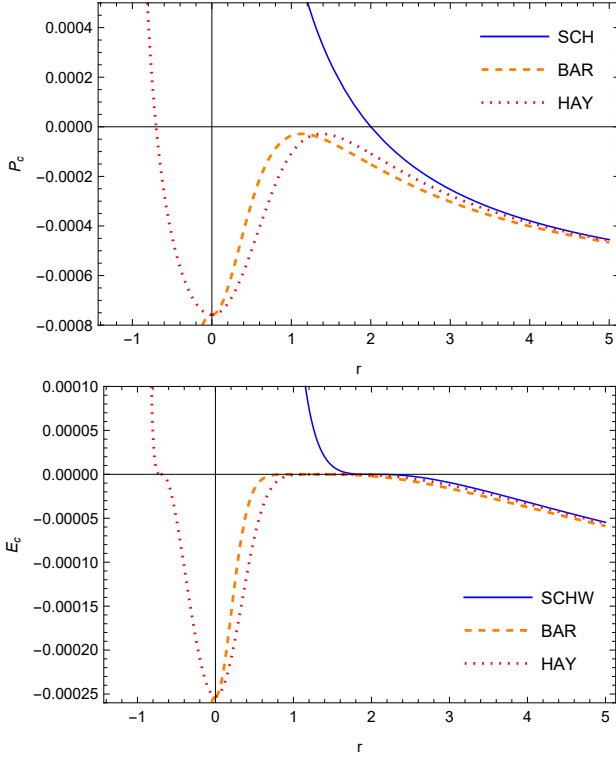


Figura 2: Pressão de Casimir (P_C) (acima) e energia de Casimir E_C (abaixo) em função do raio (r) para diferentes fundos: buraco negro de Schwarzschild (linha contínua), buraco negro regular de Bardeen (linha tracejada) e buraco negro regular de Hayward (linha pontilhada). Aqui usamos $\mathcal{P} = P_{BH}\hbar c$, onde $P_{BH} = P_{CS}, P_{CB}, P_{CH}$. Além disso, assume-se que $M = 1$, $b = 10^{-6}$ [8, 9], $\xi = 1/6$ e $r_{0B} = 0,8$, $r_{0H} = 1,1$, de acordo com [7].

Referências

- [1] S. Capozziello e M. De Laurentis, *Extended theories of gravity*, Physics Reports **509**(4-5), 167 (2011).
- [2] I. Gradshteyn et al., *Tables integrals series and products [table of integrals series and products](in Russian)* (BHV (BHV-Petersburg), 2011), 1182.
- [3] J. Bardeen, *Non-singular general relativistic gravitational collapse*, in *Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity* (1968), 87.
- [4] A. Hayward Sean, *Formation and evaporation of regular black holes*, Phys. Rev. Lett **96**, 031103 (2006).
- [5] H. Umezawa e H. Umezawa, *Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics* (Springer, 1995).

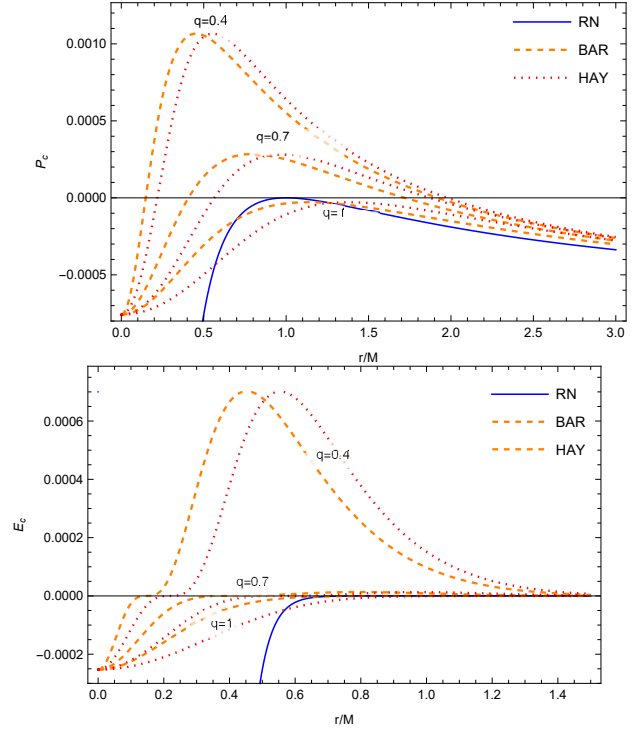


Figura 3: Pressões de Casimir (P_C) (acima) e energias de Casimir E_C (abaixo) em função da razão (r/M) para o buraco negro regular de Bardeen (linha tracejada), o buraco negro regular de Hayward (linha pontilhada) e para diferentes valores do parâmetro q . Note que, para cada valor de q , temos duas curvas correspondentes às soluções de Bardeen e de Hayward. A curva azul (contínua) em ambos os gráficos representa a pressão de Casimir e a energia de Casimir para o caso de referência RN.

- [6] A. E. Santana et al., *Thermal lie groups, classical mechanics, and thermofield dynamics*, annals of physics **249**(2), 481 (1996).
- [7] Vagnozzi et al., *Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the Event Horizon Telescope image of Sagittarius A*, Classical and Quantum Gravity **40**(16), 165007 (2023).
- [8] V. M. Mostepanenko, *New Experimental Results on the Casimir*, Brazilian Journal of Physics **30**(02), 309 (2000).
- [9] G. L. Klimchitskaya e V. M. Mostepanenko, *Experiment and theory in the Casimir effect*, Contemp.Phys. **47**, 131 (2006).