

Cordas negras e nuvens de cordas imersas em quintessência anisotrópica: soluções para partículas escalares e implicações

M. L. Deglmann 

Universidade Federal de Santa Catarina

Resumo

Neste trabalho, mostramos que as soluções radiais da equação de Klein-Gordon num espaço-tempo AdS composto de uma corda negra, cercada tanto por uma distribuição de matéria análoga a uma nuvem de cordas quanto por um fluido anisotrópico de quintessência, apresentam a ocorrência das chamadas *fases escuras*, que são induzidas pela presença do fluido quintessencial. Estas *fases escuras* são possíveis observáveis quânticos para partículas de spin-0 próximas do horizonte de eventos da corda negra.

Abstract

In this work, we show that the radial solutions of the Klein-Gordon equation in an AdS spacetime composed of a black string, surrounded by both a matter distribution analogous to a string cloud and an anisotropic quintessence fluid, exhibit the occurrence of so-called *dark phases*, which are induced by the presence of the quintessential fluid. These *dark phases* are possible quantum observables for spin-0 particles located near the black string's event horizon.

Palavras-chave: Energia Escura, Quintessência, Partícula Escalar, Equações de Heun.

Keywords: Dark Energy, Quintessence, Scalar Particle, Heun Equations.

DOI: [10.47456/Cad.Astro.v7nEspecial.53381](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v7nEspecial.53381)

1 Introdução

Desde o final dos anos 1990, nossa compreensão sobre a dinâmica de expansão do Universo sofreu alterações significativas, pois dados provenientes de supernovas do tipo Ia (SN Ia) mostraram uma taxa de expansão cósmica acelerada [1, 2], incompatível com o caráter atrativo da interação gravitacional. Com o objetivo de explicar estes dados observacionais, postulou-se a existência de uma nova componente do Universo: a *Energia Escura*, cuja existência é corroborada também por observações independentes provenientes da idade das estrelas mais antigas, da radiação cósmica de fundo (CMB), da oscilação acústica de bárions (BAO) e de simulações da estrutura em larga escala (LSS) [3–5]. No entanto, ainda que saibamos de sua existência, a natureza fundamental da energia escura permanece desconhecida.

Na tentativa de descrever corretamente a natureza e mecanismos desta nova componente do Universo muitos candidatos foram considerados, incluindo a tradicional constante cosmológica (Λ)

de Einstein, os modelos de matéria modificada e os de gravitação modificada [5].

Neste resumo, baseado no artigo [6], investigamos um modelo de matéria modificada, a saber, um fluido de quintessência, originalmente proposto por Kiselev [7] para um espaço-tempo com simetria esférica e posteriormente adaptado por Ali et al. [8] para o caso de simetria cilíndrica, que é descrito diretamente por um tensor de energia-momento (com componentes $T_{\mu\nu}$) diagonal. Este fluido possui uma densidade de energia ρ_q positiva, enquanto suas componentes espaciais não-nulas (T_{ii} , sem soma implícita) estão associadas à pressões negativas. Quanto ao último quesito, podemos ter casos onde a pressão ao longo de uma ou mais coordenadas é diferente das demais, o que caracteriza um fluido anisotrópico, onde, por exemplo, a pressão radial é diferente da tangencial. Em quaisquer casos, exigimos que o parâmetro de estado ω_q da quintessência satisfaça a relação

$$\omega_q = \frac{P}{\rho_q},$$

tendo seus valores restritos ao intervalo de interesse $-1 < \omega_q < -1/3$ [3, 5].

Na presente pesquisa, portanto, investigamos um espaço-tempo composto por uma *black string* (corda negra¹) cercada tanto por uma distribuição de matéria análoga a uma nuvem de cordas² quanto por um fluido anisotrópico de quintessência. Nesse sentido, estendemos a configuração proposta por Ali e colaboradores [8] ao adicionarmos a distribuição de matéria semelhante às nuvens de cordas. Contudo, ao contrário desta referência [8], que explora a equação de estado do fluido de quintessência, a termodinâmica das *black strings* e o cenário de uma *black string* em rotação, em nossa análise investigamos como este candidato a energia escura influencia os sistemas quânticos ao seu redor, bem como se tal efeito é mensurável. Para isso, analisamos o caso de partículas de spin-0, governadas pela equação de Klein-Gordon (KG), e como estas se comportam neste espaço-tempo.

Ao obtermos e analisarmos essas soluções, comparamos diferentes cenários (com e sem a nuvem de cordas), o fluido de quintessência e a *black string* para obter um entendimento detalhado do sistema em questão. Ressaltamos ainda que a escolha de um modelo com simetria cilíndrica foi motivada pela necessidade de obtermos soluções analíticas para a equação de KG. Afinal, os efeitos quânticos induzidos pela energia escura são extremamente diminutos, fazendo com que apenas soluções analíticas consigam capturar sua sutileza.

2 Configuração do Espaço-Tempo

Consideramos o seguinte ansatz para a métrica de um espaço-tempo AdS, determinada pelo intervalo invariante ds^2 , dado por:

$$ds^2 = A(\rho) c^2 dt^2 - \frac{d\rho^2}{A(\rho)} - \rho^2 d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{l^2} dz^2,$$

¹As cordas negras são soluções das equações de Einstein que se assemelham a buracos negros de Schwarzschild, mas exibem simetria cilíndrica em um espaço-tempo anti-de Sitter (AdS) [9, 10].

²Do inglês *cloud of strings*. Originalmente proposta como uma descrição efetiva para um conjunto de cordas cósmicas [11]. Em nosso contexto, as analogias são limitadas e ressaltamos que a contribuição análoga às nuvens atua como uma distribuição de matéria com simetria cilíndrica.

onde $l^2 = -3/\Lambda$ é o chamado *raio AdS*, enquanto que Λ é a constante cosmológica (negativa num espaço-tempo AdS). Com este ansatz, o tensor métrico será dado por $[g_{\mu\nu}] = \text{diag}(A(\rho), -1/A(\rho), -\rho^2, -\rho^2/l^2)$.

Para resolvermos as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

determinamos – além do tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$) – os tensores de energia-momento associados às fontes, ou seja, o fluido de quintessência e a contribuição de nuvem, que são descritos por:

$$\begin{aligned} T_t^t &= T_\rho^\rho = \rho_q(\rho), \\ T_\varphi^\varphi &= T_z^z = \alpha_q \rho_q(\rho), \end{aligned} \quad (1)$$

e

$$\begin{aligned} T_t^t &= T_\rho^\rho = \frac{a}{\rho^2}, \\ T_\varphi^\varphi &= T_z^z = 0, \end{aligned}$$

respectivamente. O parâmetro de estado auxiliar α_q é definido como

$$\alpha_q = -\frac{1}{2} (3\omega_q + 1),$$

onde ω_q é o parâmetro usual de estado para a energia escura e assume valores no intervalo $(-1, -1/3)$. Segue da definição acima que $\alpha_q \in (0, 1)$. Por outro lado, a constante a é chamada de parâmetro de nuvem e assume apenas valores reais e positivos.

Após a solução das equações de Einstein, mostramos que a função métrica $A(\rho) \in \mathbb{R}$ é determinada por:

$$A(\rho) = \bar{a} + \frac{\rho^2}{l^2} - \frac{\rho_s}{\rho} + N_q \rho^{2\alpha_q}, \quad (2)$$

onde $\bar{a} = \frac{8\pi G}{c^4} \bar{a}$ é o parâmetro de nuvem adimensional (cuja variação estimada vai de 10^{-6} a 10^1), ρ_s é o raio tipo Schwarzschild (normalmente variando de 10^{-3} – 10^{15} m), enquanto N_q é o parâmetro de quintessência e possui dimensão de $m^{-2\alpha_q}$ no Sistema Internacional de Unidades (SI).

Com o resultado para $A(\rho)$ em mãos, utilizamos as equações de Einstein para mostrar que a densidade de energia da quintessência $\rho_q(\rho)$ possui a forma

$$\rho_q = (2\alpha_q + 1) \frac{N_q}{8\pi G/c^4} \rho^{2\alpha_q - 2},$$

dada também em termos de unidades do SI. Por fim, utilizamos as eqs. (1) para mostrar que a pressão radial do fluido quintessencial é dada por $P_\rho = -\rho_q$, enquanto as pressões longitudinal e tangencial são determinadas por $P_\varphi = P_z = -\alpha_q \rho_q$.

2.1 O parâmetro de quintessência

Ao integrarmos a densidade de energia $\rho_q(\rho)$ para um certo raio de Universo observável ($\rho_{\text{obs.}}$), mostramos que o parâmetro N_q pode ser estimado de acordo com a relação

$$N_q = \frac{2G}{c^4} \frac{E_{DE}}{\rho_{\text{obs.}}^{2\alpha_q+1}}, \quad (3)$$

em que E_{DE} denota a quantidade total estimada de energia escura neste Universo, segundo a qual verificamos que a contribuição da quintessência para a métrica do espaço-tempo pode ser significativa de duas formas distintas:

- Primeiramente, no caso de $\alpha_q = 0$ (ou $\alpha_q \rightarrow 0^+$). Neste regime, a contribuição do termo de quintessência ($N_q \rho^{2\alpha_q}$) é máxima, mesmo em distâncias pequenas onde $\rho/\rho_{\text{obs.}} \ll 1$.
- Para os casos em que α_q não está bastante próximo de $\alpha_q = 0$, ou seja, $\alpha_q > 0$. Nestes regimes, a contribuição do termo de quintessência só é significativa para grandes distâncias, quando $\rho/\rho_{\text{obs.}} \approx 1$.

Por clareza, incluímos também uma estimativa numérica de N_q na Figura 1 a seguir.

2.2 Existência de um horizonte de eventos

Devido a ocorrência de um sinal negativo no termo tipo-Schwarzschild em $A(\rho)$, pode-se mostrar que existe um horizonte de eventos, de raio ρ_+ , para os valores de $\alpha_q = 0, 1/2$ e 1. Nestes casos particulares, inclusive, existe uma única solução real para a condição

$$A(\rho_+) = \bar{a} + \frac{\rho_+^2}{l^2} - \frac{\rho_s}{\rho_+} + N_q \rho_+^{2\alpha_q} = 0.$$

Em nosso artigo, obtemos expressões exatas para ρ_+ nestes regimes fixados e mostramos que é uma boa aproximação considerar

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{\rho_s}{(\bar{a} + N_q)}, \text{ se } \alpha_q = 0, \\ \rho_+ &= \frac{\rho_s}{\bar{a}}, \text{ se } \alpha_q \geq 1/2, \end{aligned}$$

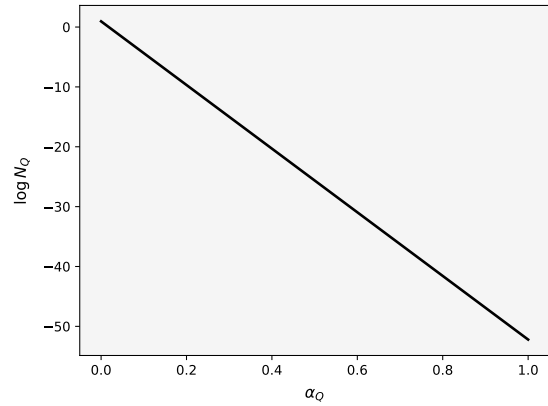


Figura 1: Gráfico logarítmico do parâmetro de quintessência N_q como função de α_q . De acordo com a eq. (3), há uma diminuição exponencial em N_q quando o parâmetro de estado α_q aumenta. Os valores do eixo vertical são calculados assumindo um universo observável com um raio de $\rho_{\text{obs.}} = 3.8 \times 10^{26}$ m, com $E_{DE} = 2 \times 10^{71}$ kg m² s⁻², garantindo que este modelo cilíndrico possua o mesmo volume observável e a mesma quantidade de energia escura que o nosso Universo real.

desde que $\rho_+ \ll l$, que é uma condição plausível do ponto de vista físico já que consideramos $l \sim \rho_{\text{obs.}}$. A título de ilustração, apresentamos um exemplo numérico na Fig. 2.

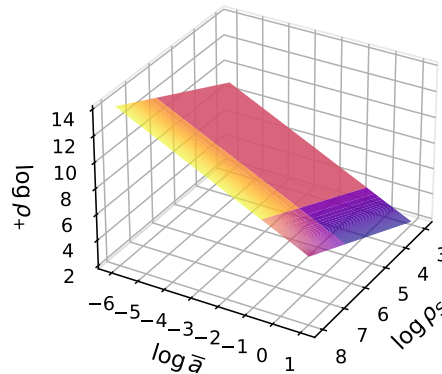


Figura 2: Gráfico logarítmico do raio do horizonte de eventos ρ_+ em função do parâmetro da nuvem $\bar{a}$ e do raio tipo Schwarzschild ρ_s . Consideramos $10^{-6} \leq \bar{a} \leq 10^1$, enquanto $10^3 \text{ m} \leq \rho_s \leq 10^8 \text{ m}$. É evidente, tanto pela imagem quanto pelo resultado anterior (para $\alpha_q \geq 1/2$), que quanto mais intensas forem as nuvens de cordas, menor será o raio do horizonte de eventos.

3 Solução da equação de Klein-Gordon próxima do horizonte de eventos

Agora que conhecemos as propriedades deste espaço-tempo, podemos investigar as soluções da

equação de Klein-Gordon para uma partícula escalar presente neste meio. Desta forma, podemos extrair informações destas soluções e, sob certos limites, interpretá-la como uma função de onda. Para isso, lembramos que, num espaço-tempo curvo arbitrário, associado ao tensor métrico de componentes $g_{\mu\nu}$, a equação de Klein-Gordon é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi) + \frac{m_\phi^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0.$$

Utilizando uma separação de variáveis na forma $\phi = T(t) R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)$, pode-se mostrar que a solução geral é da forma:

$$\phi = \exp(-iEt/\hbar) \exp(in_R \varphi) \exp(ik_z z/l) R(\rho),$$

onde E possui dimensão de energia ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) e – sob certas limitações – pode ser interpretado como a energia da partícula escalar, $n_R \in \mathbb{Z}$ é um número quântico de rotação (adimensional), enquanto k_z está relacionado com o momento linear ao longo do eixo z e também é adimensional.

Por sua vez, a função $R(\rho)$ satisfaz a equação diferencial ordinária (EDO) a seguir:

$$\partial_\rho^2 R(\rho) + \chi(\rho) \partial_\rho R(\rho) + \tau(\rho) R(\rho) = 0,$$

onde

$$\chi(\rho) = \frac{1}{A(\rho)} \partial_\rho A + \frac{2}{\rho},$$

$$\tau(\rho) = \frac{1}{A(\rho)} \left(\frac{\epsilon^2}{A(\rho)} - \frac{\kappa^2}{\rho^2} - \bar{m}_\phi^2 \right).$$

A expressão para $A(\rho)$, tanto em $\chi(\rho)$ quanto em $\tau(\rho)$, segue diretamente do resultado (2). Por outro lado, os parâmetros ϵ , κ , e $\bar{m}_\phi$ que ocorrem em $\tau(\rho)$ são definidos como

$$\epsilon = \frac{E}{\hbar c}, \quad \kappa^2 = n_R^2 + k_z^2, \quad \bar{m}_\phi = \frac{m_\phi c}{\hbar}.$$

No caso de uma solução na vizinhança do horizonte de eventos, quando $x = \rho/\rho_+$ satisfaz $x \rightarrow 1^+$, mostramos como resultado geral que

$$R_{NH}(x) = c_1 \exp \left[\frac{\beta}{2} (x-1) + \frac{\gamma}{2} \ln(x-1) \right] + c_2 \exp \left[\frac{\beta}{2} (x-1) - \frac{\gamma}{2} \ln(x-1) \right].$$

onde $\beta_+ = \rho_+ (dA/d\rho)|_{\rho_+}$, enquanto o subscrito NH denota que estas soluções são válidas próximas do horizonte de eventos.

Já no caso particular em que $\alpha_q = 1$, por exemplo, esta solução radial pode ser escrita como:

$$R_{NH}^{(1)}(x) = \Phi_+(x) \exp[-i\delta_+^{(1)}(x)] + \Phi_-(x) \exp[-i\delta_-^{(1)}(x)], \quad (4)$$

onde

$$\Phi_\pm(x) = c_\pm \exp \left[\pm i\epsilon \frac{\rho_s}{\bar{a}^2} \ln(x-1) + i \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\kappa^2}{\bar{a}}} (x-1) \right]$$

são funções independentes de N_q , $c_\pm$ são constantes, e

$$\delta_\pm^{(1)}(x) = \left[\pm \frac{2\epsilon\rho_s}{\bar{a}^2} \ln(x-1) + \frac{\kappa^2/\bar{a}}{\sqrt{\kappa^2/\bar{a} - 1/4}} (x-1) \right] \frac{N_{ql} \rho_s^2}{\bar{a}^3}.$$

dependem explicitamente de $N_{ql} = N_q + 1/l^2$.

Portanto, desde que toda a dependência no parâmetro de quintessência N_q esteja contida nessas funções, denominamos tanto $\delta_\pm^{(1)}(x)$ quanto seus análogos para regimes distintos de α_q como *fases escuras*. Desta forma, vemos diretamente que a presença de um fluido de energia escura é capaz de induzir uma fase relativa na solução radial da equação de Klein-Gordon, conforme ilustrado na Figura 3. Interpretando-a como uma função de onda, vemos que estas fases escuras são possíveis observáveis da presença de energia escura neste meio.

4 Conclusão

Neste trabalho, analisamos um espaço-tempo cilindricamente simétrico composto de uma *black string* (corda negra) cercada tanto por uma distribuição de matéria semelhante às nuvens de cordas quanto por um fluido de quintessência (candidato à energia escura).

Neste contexto, examinamos as propriedades do espaço-tempo e determinamos as soluções da equação de Klein-Gordon na vizinhança do horizonte de eventos, de onde mostramos que o fluido

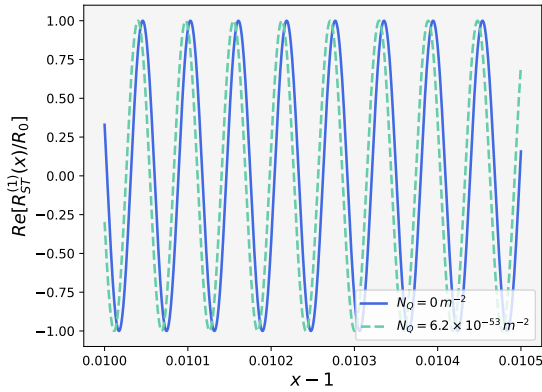


Figura 3: Parte real da função de onda radial $R_{ST}^{(1)}(x)$, dada pela eq. (4) (com $c_+ = 0$ e $c_- = R_0$), como uma função de $x - 1$ (afastamento do horizonte de eventos). A figura representa o cenário padrão (ST) de $\alpha_Q = 1$, ou seja, quando os parâmetros $\bar{\rho}_S$ e N_Q são todos não-nulos. Neste gráfico, consideramos $\kappa = 1$ (de modo que $n_R = 1$ e $k_z = 0$), indicando que a partícula não se move na direção vertical. Os parâmetros restantes são: $\rho_S = 10^{15}$ m, $\bar{a} = 10^{-6}$, $\bar{m}_\phi = 2.23 \times 10^{-25}$ m $^{-1}$ (escolhido para clareza visual) e $\epsilon = 5 \bar{m}_\phi$. As duas curvas ilustram os casos de $N_Q = 0$ m $^{-2}$ (ausência de quintessência) e $N_Q = 10^{-52}$ m $^{-2}$ (presença de quintessência). Ademais, um valor conveniente para $\bar{m}_\phi$ foi usado, pois valores realistas implicariam que a mudança de fase seria perceptível apenas em distâncias extremamente pequenas.

de quintessência induz uma fase relativa – que depende explicitamente do parâmetro N_Q – na solução radial $R_{NH}(x)$, revelando um possível observável que denotamos como *fase escura*. Em trabalhos futuros, estenderemos esses resultados a cenários mais complexos.

Agradecimentos

A autora agradece ao comitê organizador do evento *As Astrocientistas* pela oportunidade de apresentar este trabalho, bem como o Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFSC) da UFSC pelo suporte.

Sobre a autora

Maria de Lourdes Deglmann é Doutora em Física, na área de Física Matemática e Teoria de Campos, pela Universidade Federal de Santa Catarina (2025). Atualmente, sua pesquisa é voltada para modelos de Energia Escura e suas implicações quânticas. Também possui experiência

em Soluções Topológicas em Teorias de Yang-Mills-Higgs e Física Matemática. E-mail para contato: m.l.deglmann@posgrad.ufsc.br.

Referências

- [1] A. G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998). [ArXiv:astro-ph/9805201](#).
- [2] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High Redshift Supernovae*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999). [ArXiv:astro-ph/9812133](#).
- [3] P. J. Steinhardt, *A quintessential introduction to dark energy*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **361**(1812), 2497 (2003).
- [4] E. J. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa, *Dynamics of Dark Energy*, *International Journal of Modern Physics D* **15**(11), 1753 (2006).
- [5] L. Amendola e S. Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations* (Cambridge University Press, 2010).
- [6] M. Deglmann, L. Barbosa e C. Barros, *Black strings and string clouds embedded in anisotropic quintessence: Solutions for scalar particles and implications*, *Annals of Physics* **475**, 169948 (2025).
- [7] V. V. Kiselev, *Quintessence and black holes*, *Classical and Quantum Gravity* **20**(6), 1187 (2003).
- [8] M. S. Ali, F. Ahmed e S. G. Ghosh, *Black string surrounded by a static anisotropic quintessence fluid*, *Annals of Physics* **412**, 168024 (2020).
- [9] J. P. Lemos, *Three dimensional black holes and cylindrical general relativity*, *Physics Letters B* **353**(1), 46 (1995).
- [10] J. P. S. Lemos e V. T. Zanchin, *Rotating charged black strings and three-dimensional black holes*, *Physical Review D* **54**(6), 3840 (1996).

- [11] P. S. Letelier, *Clouds of strings in general relativity*, [Physical Review D](#) **20**(6), 1294 (1979).