



ARTIGO ORIGINAL

OPEN ACCESS

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DA ALOCAÇÃO DE
ÁRBITROS EM UM CAMPEONATO DO FUTEBOL CAPIXABA

*MATHEMATICAL MODELING FOR OPTIMIZING THE ALLOCATION OF REFEREES IN
CAPIXABA SOCCER CHAMPIONSHIP*

Matheus Augusto Delunardo dos Santos¹ & Marcos Wagner Jesus Servare Junior^{2*}

^{1,2} [Centro Universitário Salesiano](http://www.centro.unisa.br) – Unisales.

¹ matheusdelunardomads@hotmail.com ² marcos.servare@salesiano.br

ARTIGO INFO.

Recebido em: 29.11.2021

Aprovado em: 10.12.2021

Disponibilizado em: 14.12.2021

PALAVRAS-CHAVE:

Árbitros; Futebol; Programação Linear; Pesquisa Operacional.

KEYWORDS:

Referees; Soccer; Linear Programming; Operational Research.

*Autor Correspondente: Servare, M. W. J., Junior.

RESUMO

Este trabalho utilizou a Pesquisa Operacional no Campeonato Capixaba da série B de 2020 para implementação de um modelo que otimize a alocação de árbitros e contribua para a redução de custos atuais quanto ao transporte dos mesmos, através de uma solução que reduza a distância total percorrida pelos árbitros para realização das partidas. Através da Programação linear, a solução apresentada economizaria 55% do total da distância percorrida originalmente e seus gastos, além da possibilidade da redução de custos com árbitros que se tornam ociosos. O modelo exposto pode ainda ser modificado conforme novas restrições, como a obrigatoriedade de todos os árbitros serem designados aos jogos e ser aplicado em outros esportes.

ABSTRACT

This work used the Operational Research in the Capixaba soccer Championship of series B of 2020 to implement a model that optimizes the allocation of referees and contributes to the reduction of current costs regarding their transport, through a solution that reduces the total distance traveled by referees to carry out the matches. Through Linear Programming, the solution presented would save 55% of the total distance covered originally and its expenses, in addition to the possibility of reducing costs with arbitrators who become idle. The exposed model can still be modified according to new restrictions, such as the obligation for all referees to be assigned to the games and to be applied in other sports.



1. INTRODUÇÃO

O futebol é um esporte mundial e de enorme popularidade no Brasil de enorme influência em nossa cultura, é também responsável pela atração de pessoas de todas as classes sociais (Nakamura & Cerqueira, 2021). Ademais, tomou proporções extraordinárias, sendo patrocinado por empresas, movimentando a economia e a sociedade; desse modo, o papel do juiz é de alta relevância, então seu condicionamento deve estar adequado para sua função.

A função do árbitro de futebol é de garantir o cumprimento de todas as regras, de forma que as falhas sejam mínimas, proporcionando a todos envolvidos um verdadeiro espetáculo. Como a eleição dos árbitros atualmente é realizada por sorteio, estima-se que as despesas para arbitrar uma partida são maiores que as menores possíveis, ou seja, a aleatoriedade gera gastos desnecessários com alocação.

Este trabalho tem como objetivo implementar um modelo que otimize a alocação dos árbitros em partidas de futebol em um campeonato local no Estado do Espírito Santo (ES) através da ferramenta Modelagem Matemática.

Dito isto, a problemática apresentada neste trabalho possui Viabilidade, já que há potencial para ser solucionada; Relevância e Novidade, pois trará novos conhecimentos a respeito da alocação de árbitros no Espírito Santo; Exequibilidade, visto que de acordo com a Literatura, há potencial de alcançar uma solução válida; por fim, Oportunidade, pois há interesse tanto geral: Federação de Futebol do Espírito Santo que reduzirá seus custos, quanto particulares: os próprios árbitros que terão mais comodidade e menos desgastes.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Como aponta Pilla (2019), a Pesquisa Operacional (PO) é uma ciência que busca inserir ferramentas quantitativas nas tomadas de decisões. De acordo com a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO) Pesquisa Operacional é a área de conhecimento que além de atuar na parte teórica, exerce também a prática de técnicas analíticas para dar suporte e apoio à tomada de decisão em inúmeras áreas de atuação.

Percebe-se que as duas definições citadas corroboram com a ideia de que a utilização da PO não se restringe à uma ou outra área, ou seja, existe a possibilidade de ser utilizada em segmentos inimagináveis e apresentam seis fases para um projeto de PO (Tabela 1).

Tabela 1. Fases de um projeto de Pesquisa Operacional.

| | |
|----|---|
| 1. | Formulação do problema |
| 2. | Construção do modelo matemático de modo que represente o problema |
| 3. | Cálculo da solução através do modelo |
| 4. | Teste do modelo e aprimorações caso necessário |
| 5. | Estabelecimento de controle da solução |
| 6. | Implementação e acompanhamento |

Fonte: Pilla (2019)

A definição do problema é o primeiro passo de qualquer trabalho, pois sem esta informação não há trabalho a ser feito. Quanto a coleta de dados, é de suma importância em um projeto de Pesquisa Operacional não apenas para introduzir no modelo a ser proposto, mas pelo fato de que deve ser feito da forma mais criteriosa e fiel a realidade possível, já que o resultado está



Citação (APA): Santos, M. A. D., dos & Servare, M. W. J., Junior. (2021). Modelagem matemática para otimização da alocação de árbitros em um campeonato do futebol capixaba. *Brazilian Journal of Production Engineering*, 7(5), 207-215.

diretamente ligado aos dados introduzidos, logo, um dado comprometido pode maquiara a solução apresentada, causando frustração após a implementação e gastos desnecessários.

Há ainda, inúmeras ferramentas existentes para formulação de um modelo inclusas na PO, o presente trabalho utilizará a Programação ou Modelagem Matemática que busca representar um problema em forma de equações matemáticas e solucioná-lo.

O terceiro passo mencionado na tabela, nada mais é que a escolha do software adequado para resolução do modelo construído, dado que há inúmeras ferramentas disponíveis atualmente para diversos modelos, então entende-se que não há necessidade de um Software avançado para resolução de um modelo mais simples, logo é inviável a tentativa de resolução de um modelo com diversos parâmetros, restrições e variáveis em um programa computacional básico.

Os passos subsequentes são intuitivos quanto a sua compreensão, após a escolha do Soft é necessário testar o modelo e realizar a análise dos resultados para saber se há alguma mudança significativa quanto a atual realidade para validar sua implementação, se a implementação é viável, pois mesmo uma solução ótima pode não ser satisfatória. Posteriormente há a preparação, etapa onde é a realidade que deve atender os critérios do modelo simulado para obter os resultados nele apresentados e por fim sua implementação.

De acordo com Pilla (2019), a Programação Linear (PL) tem como objetivo a otimização de uma função linear que possui diversas soluções que estão sujeitas a determinadas restrições. Atualmente diversas são as áreas que adotam a Programação Linear como ferramenta para solução de seus problemas: Instituições Financeiras, Transportadoras, Indústrias dos mais diversos segmentos, Companhias Aéreas etc.

De acordo com Serrano, Morandi, Lacerda e Piran (2020), a visão do futebol somente como um jogo é equivocada, já que ele está correlacionado em alguns segmentos, como os industriais ou comerciais. Dessa forma, Soares, Neves e Servare Junior (2019) objetivaram identificar as razões que causam e as que não tem importância para a ida do torcedor ao estádio no Espírito Santo e propor melhorias que elevem a média dos pagantes e da renda dos clubes capixabas em jogos locais.

A primeira métrica observada Soares *et al.* (2019) foi a relação da economia local com a média de torcedores pagantes em seus estádios e renda dos clubes, pois observaram que Estados com indicadores econômicos que apresentam valores acima dos indicadores capixabas possuíam maior média de público pagante e renda dos clubes em seus respectivos campeonatos; com isso surgiu a necessidade de uma análise entre clubes que possuem indicadores da economia inferiores aos do Espírito Santo e concluiu-se que não há uma relação direta significativa entre eles.

Para realização do estudo, foi desenvolvida as seguintes questões a serem respondidas pelos torcedores presentes em uma disputa da série D do campeonato brasileiro no Estádio Salvador Venâncio da Costa, considerado a casa do Vitória F.C, um dos participantes do jogo:



Citação (APA): Santos, M. A. D., dos & Servare, M. W. J., Junior. (2021). Modelagem matemática para otimização da alocação de árbitros em um campeonato do futebol capixaba. *Brazilian Journal of Production Engineering*, 7(5), 207-215.

- Idade
- Gênero
- Renda mensal
- Fatores que levariam o torcedor ir a mais partidas
- Formas preferenciais para compra do ingresso

Segundo Soares *et al.* (2019), houve dificuldades para realização do estudo, sendo elas: a falta de disponibilidade dos dados sobre público pagante e arrecadação durante o ano de 2017, carência de artigos presentes na literatura com o tema e metas similares ao do trabalho apresentado e o baixo número de jogos envolvendo times do Espírito Santo que restringe o número de pagantes entrevistados. A conclusão observada por Soares *et al.* (2019) se dá com propostas de melhoria dos pontos fracos dos resultados do trabalho: a baixa representatividade de jovens e mulheres no estádio poderia ser minimizada com promoções no ingresso e atrações direcionadas a esse público; a preferência dos torcedores pela obtenção de seu ingresso por meio do pagamento virtual pode ser solucionada através de parcerias entre os membros que organizam os campeonatos, os times e empresas que fornecem esse meio de pagamento ou a elaboração de um aplicativo próprio para realização da compra. Ademais, propõe-se sugestões para uma possível continuação do trabalho, como o aumento da base amostral, que por sua vez torna o torna mais confiável e credibilizado.

O árbitro de futebol é um personagem polêmico, criticado; as suas interpretações e decisões são, na maior parte das vezes compreendidas como má-fé se contrariam a percepção do observador sobre a cena do jogo (Dos Reis e Righeto, 2017). O fato de que ele não possui o mesmo acesso a visões que temos de nossa TV, no presente momento do lance é um fator a ser levado em consideração quanto ao seu desempenho e por esta razão há de se levantar métricas para analisar seus erros em função de cada clube/partida. Dessa forma, segundo Añon, Scaglia e Torezzan (2017) a escolha da arbitragem para apitar um jogo é uma tarefa que carrega consigo enorme responsabilidade e nesse sentido ainda divulgaram um modelo cuja finalidade é reduzir a distância percorrida pelos juízes para arbitrar confrontos entre clubes do Campeonato Brasileiro. Añon *et al.* (2017) afirmam que devido a demografia do Brasil, um dos problemas para a escolha deles para a arbitragem é a distância a ser percorrida e propõem uma solução através da Programação Linear cuja finalidade é reduzir essa longitude e o número de partidas de uma equipe arbitradas pelo mesmo juiz, com a finalidade de aumentar a imparcialidade.

Após a obtenção dos dados dos jogos do Brasileirão de 2014, Añon *et al.* (2017) obtiveram a conclusão de que a quilometragem total gasta pelos 59 árbitros para realizar todas as partidas foi de 833.516. Além disso, Añon *et al.* (2017) adicionaram outra métrica para a modelagem de seu problema: o total de jogos designados para cada juiz, que em seus objetivos permitem que a variância entre o total de disputas apitadas por cada árbitro não ultrapasse 2 jogos. Por fim, foi encontrado outro problema no decorrer da análise: a quantidade mínima de componentes para que o modelo alcance as métricas definidas, sendo assim os 20 árbitros que mais receberam jogos para sua função e utilizaram a capital de sua origem como ponto de partida até o local do jogo.



Citação (APA): Santos, M. A. D., dos & Servare, M. W. J., Junior. (2021). Modelagem matemática para otimização da alocação de árbitros em um campeonato do futebol capixaba. *Brazilian Journal of Production Engineering*, 7(5), 207-215.

Com os parâmetros estabelecidos, adaptaram um modelo feito por Alarcón *et al.* (2014) para alcançarem seus objetivos, aplicaram a Linguagem MPL e inseriram o modelo no solver GPLK para solucioná-lo. De acordo com Añon *et al.* (2017), este problema foi solucionado com exatidão e praticidade, satisfazendo por completo as restrições com uma média de 45 minutos para sua resolução total. Seu resultado foi de um total de 514.692 quilômetros percorridos pelos árbitros para exercerem seu trabalho, um corte de 38% comparado ao Brasileirão 2014 e uma distribuição quase que homogênea das partidas para cada árbitro, onde 50% foram designados para arbitrar 20 partidas e os outros 50% 18 partidas, enquanto no campeonato de 2014 alguns juízes apitaram apenas 4 partidas enquanto outros até 24, observa-se ainda a possibilidade de flexibilização do modelo, com adição ou eliminação de novos parâmetros. Admite-se ressaltar que com a distribuição dos jogos sendo mais uniforme, a possibilidade de um time levar vantagem a outro por erros demasiados de um arbitro em relação a uma equipe diminui consideravelmente.

Dessarte, Añon *et al.* (2017) concluem que o objetivo desta proposta foi alcançado com êxito, apresentando um modelo que com menos da metade dos árbitros obteve uma redução em 38% do total da Quilometragem gasta em relação ao modo de designação aplicado em 2014,

Ressalta-se ainda os enormes cortes de gastos realizados com o trabalho realizado por Añon *et al.* (2017), com uma redução de 38% da quilometragem total percorrida pelos árbitros com uma eliminação de aproximadamente 66% dos juízes, ou seja, uma otimização de recursos surpreendente que pode ser aplicada ao futebol capixaba. Além disso, constata-se a raridade de obras na literatura que abordam a problemática em questão, realçando a importância deste trabalho.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ALOCAÇÃO DE ÁRBITROS

Para resolução do problema foi estabelecido a técnica da Pesquisa Operacional, utilizando a ferramenta Programação Linear após leitura e análise de um dos artigos filtrados pelo ProKnow- C: Añon *et al.* (2017) trazem uma proposta semelhante à que se deseja alcançar no presente estudo. Através da Programação Linear, Añon *et al.* (2017) minimizaram o percurso total realizado pelos árbitros em função das partidas. Os dados obtidos sobre os jogos do Campeonato Capixaba da Série B 2020 e árbitros designados foram obtidos no Site da Federação de Futebol do Espírito Santo (FES). O modelo apresentado a seguir para o desenvolvimento deste trabalho é derivado do modelo utilizado por Añon *et al.* (2017) adaptado às particularidades do Campeonato Capixaba e das ferramentas disponíveis:

- $A = \{1, 2, \dots, 14\}$ **Conjunto de Árbitros**
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **Conjunto de Equipes**
- $R = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ **Conjunto de Rodadas**
- $P_{t1} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ **Conjunto de Partidas do Turno 1**
- $P_{t2} = \{11, 12, 13, \dots, 20\}$ **Conjunto de Partidas do Turno 2**

Para que a simulação se tornasse possível, foi necessário distribuir o número de partidas em dois turnos, distribuindo as partidas conforme ocorre originalmente no Campeonato. Dessa forma foram realizadas duas simulações: para o Turno 1 e Turno 2. Para realização do modelo, três etapas foram delineadas: Definição da função objetivo, definição das variáveis



de decisão e finalmente a definição das restrições que representam os recursos disponíveis e suas limitações. A função objetivo é minimizar a distância total percorrida pelos juízes através da melhor solução possível, já que isso resultará em um menor gasto em locomoção.

Os parâmetros utilizados neste modelo foram os seguintes:

$d_{p,a}$ distância entre o local da partida p para o local de origem do árbitro a ;
 $\alpha_{p,r}$ = 1 se a Partida p pertence a Rodada r
 = 0, caso contrário

Max_α Número máximos que um árbitro pode apitar por turno

$v_{\alpha,r}$ Número máximo de partidas de um árbitro por rodada

Por sua vez, são estas as variáveis de decisão:

$x_{p,a}$ = 1 se a Partida p é apitada pelo árbitro a
 = 0, caso contrário

Para que um árbitro seja alocado em cada jogo foi implementado o modelo matemático baseado em Añon *et al.* (2017).

Minimizar

$$D = \sum_{p \in P} d_{p,t} x_{p,t} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p \in P} \alpha_{p,a} x_{p,a} \leq 1 \quad \forall r \in R, \forall a \in A \quad (2)$$

$$\sum_{a \in A} x_{p,a} = 1 \quad \forall p \in P \quad (3)$$

$$\sum_{p \in P} x_{p,a} \leq 2 \quad \forall p_{t1} \in P_{t1}, \forall a \in A \quad (4)$$

A Função Objetivo representada pela Equação (1) aponta a minimização da distância total percorrida pelos árbitros para apitar as partidas. Por sua vez, o conjunto de equações representadas na Equação (2) é uma restrição que determina que um arbitro deverá apitar, no máximo, uma partida por rodada.

Já a restrição representada pela Equação (3) determina que um arbitro seja designado para cada partida e a equação (4) que um arbitro deverá apitar no máximo duas partidas por turno do campeonato.

A resolução desta simulação foi realizada em *solver* comercial a partir de um complemento do Software Microsoft Excel. Devido a limitações deste *solver*, o problema passou por ajustes para que sua solução fosse possível, sendo o modelo utilizado duas vezes para simular o turno e o retorno do campeonato.

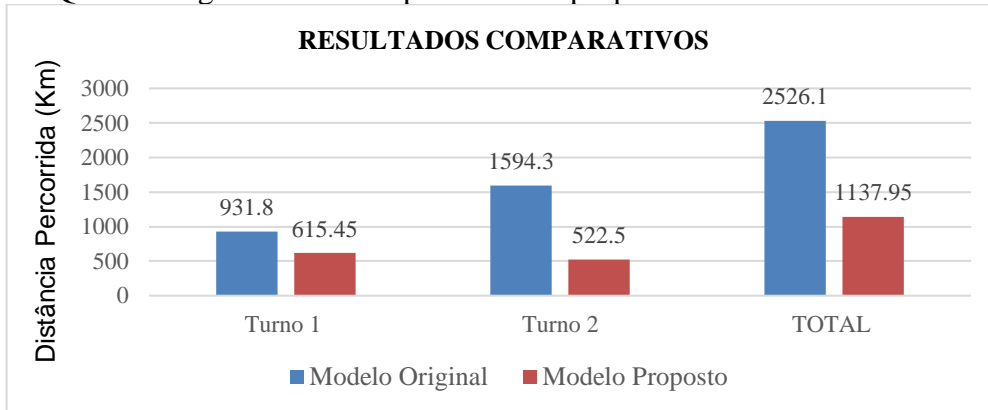
4. RESULTADOS

Após a formulação do problema e a inserção dos dados no Excel, a solução do modelo de programação linear proposto foi obtida com exatidão em poucos segundos, apresentando resultados incrivelmente satisfatórios. Enquanto o método atual de designação de árbitros



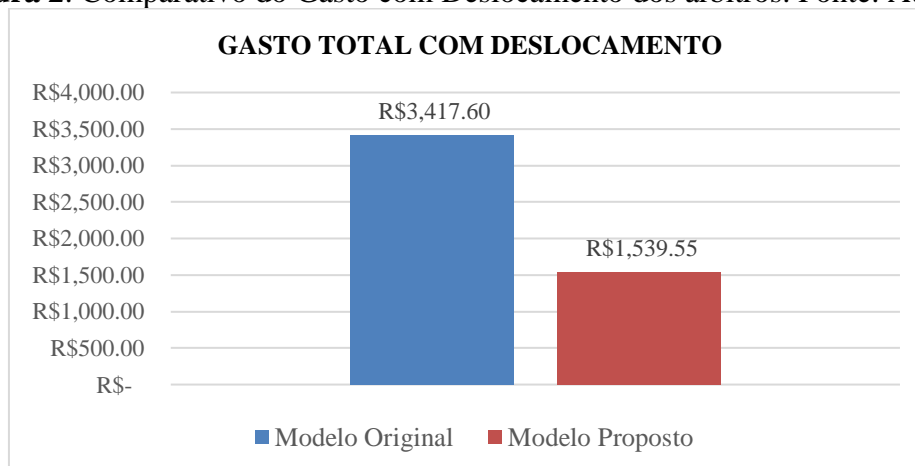
possui uma distância total percorrida de 2.526,1 Km para cobrir os 20 jogos realizados, o resultado obtido através do modelo proposto foi um total de 1.137,95Km. Ou seja, uma redução de 55% da distância total percorrida pelos árbitros no Campeonato de 2020. Cabe ressaltar que não foi possível obter os dados do árbitro designado para a primeira partida do Campeonato, porém inserimos a mesma no modelo, caso contrário a diferença seria ainda maior. A seguir, a Figura 5 apresenta-se a comparação entre a solução obtida no presente trabalho com o método utilizado originalmente para designação de árbitros no Espírito Santo:

Figura 1. Quilometragem Percorrida pelo modelo proposto x modelo atual. Fonte: Autores



Como foi possível obter os dados relacionados aos custos com a deslocação da arbitragem em cada partida através do site da FES, tornou-se viável a comparação diretamente proporcional entre os custos de cada modelo, através dos árbitros designados para cada local de partida respectivamente. O resultado também foi uma economia de 55% de gastos, desconsiderando o fato de que com o melhor resultado possível para diminuir a distância total percorrida, o modelo ainda alcançou a ociosidade de 6 árbitros, que podem ser realocados em outras funções e outros inevitavelmente dispensados. O custo relacionado ao salário desses árbitros não foi levado em consideração (Figura 5).

Figura 2. Comparativo do Gasto com Deslocamento dos árbitros. Fonte: Autores



De modo a preservar a identidade dos árbitros presentes neste trabalho, seus nomes foram representados por números (1,2,3...,14) sequencialmente, os números repetidos são árbitros que apitam mais que 1 jogo. A restrição imposta neste modelo, delimita o árbitro a apitar um



Citação (APA): Santos, M. A. D., dos & Servare, M. W. J., Junior. (2021). Modelagem matemática para otimização da alocação de árbitros em um campeonato do futebol capixaba. *Brazilian Journal of Production Engineering*, 7(5), 207-215.

jogo por rodada e 2 jogos por turno, ou seja, 4 jogos ao total do Campeonato. A Tabela 4 ilustra a designação dos árbitros tanto do modelo atual quanto do modelo proposto para a série B do Campeonato Capixaba 2020:

Tabela 2.Comparativo da Relação Partidas x Árbitros. Fonte: Autores

| PARTIDAS | | Árbitros Originais | Modelo Proposto |
|----------|--|--------------------|-----------------|
| 1 | Pinheiros F.C. x S.C. Capixaba | S/ INFORMAÇÃO | 3 |
| 2 | Brasil Capixaba x Vilavelhense | 1 | 11 |
| 3 | Vilavelhense X Pinheiros | 3 | 1 |
| 4 | S.C. Capixaba x E.S.S.E./C.T.E | 4 | 2 |
| 5 | E.S.S.E./C.T.E. x Vilavelhense F.C | 5 | 9 |
| 6 | Pinheiros F.C. x S.C. Brasil Capixaba | 6 | 6 |
| 7 | S.C. Brasil Capixaba x E.S.S.E./C.T.E | 7 | 14 |
| 8 | Vilavelhense F.C. x S.C. Capixaba | 8 | 1 |
| 9 | S.C. Capixaba x S.C. Brasil Capixaba | 9 | 14 |
| 10 | E.S.S.E./C.T.E. x Pinheiros F.C. | 10 | 6 |
| 11 | S.C. Capixaba x Pinheiros F.C. | 11 | 1 |
| 12 | Vilavelhense F.C. x S.C. Brasil Capixaba | 12 | 14 |
| 13 | Pinheiros F.C. x Vilavelhense F.C. | 10 | 9 |
| 14 | E.S.S.E./C.T.E. x S.C. Capixaba | 14 | 12 |
| 15 | Vilavelhense F.C. x E.S.S.E./C.T.E | 13 | 11 |
| 16 | S.C. Brasil Capixaba x Pinheiros F.C. | 9 | 6 |
| 17 | E.S.S.E./C.T.E. x S.C. Brasil Capixaba | 11 | 9 |
| 18 | S.C. Capixaba x Vilavelhense F.C. | 2 | 14 |
| 19 | S.C. Brasil Capixaba x S.C. Capixaba | 12 | 1 |
| 20 | Pinheiros F.C. x E.S.S.E./C.T.E | 8 | 6 |

É possível observar a ociosidade de 6 árbitros do modelo original, que estarão a disposição da Federação, que determinará se irá redirecionar esses recursos ou dispensá-los.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou a utilização de um modelo de programação linear inteira para a designação de juizes na série B do Capixabão 2020. Para este tema foram observadas a baixa consolidação da literatura para este tipo de estudo, identificando pouca alteração entre as variações do modelo, bem como a impossibilidade de resolver problemas em escalas maiores usando o *solver* do Microsoft Excel.

Fora observado, também, a escassez de trabalhos que estudem o futebol capixaba, podendo a academia contribuir com a parte gerencial deste campo. Em relação ao modelo, foi constatado que utilizar a modelagem matemática para designar árbitros para a partida consegue proporcionar alternativas interessantes na escolha do profissional responsável pela condução do certame.



Citação (APA): Santos, M. A. D., dos & Servare, M. W. J., Junior. (2021). Modelagem matemática para otimização da alocação de árbitros em um campeonato do futebol capixaba. *Brazilian Journal of Production Engineering*, 7(5), 207-215.

Além disso, com o uso de *solvers* mais robustos e máquinas apropriadas para atividades relacionadas a pesquisa pode ser obtido soluções para este problema em escalas ainda maiores, que validem de forma ainda mais conclusiva a utilização da modelagem matemática nesta temática.

No caso específico deste problema, foi possível constatar que não é necessário a contratação de um Software pago, ou conhecimento avançado em alguma linguagem de programação para a melhora na proposta considerando a situação atual. Uma vez que com o Excel foi possível realizar a simulação do modelo proposto, alcançando um resultado com êxito, obedecendo todas as restrições impostas.

Desse modo, infere-se que o modelo apresentado está apto a ser utilizado no Futebol Capixaba, reduzindo custos de forma expressiva, podendo ser utilizado também não só em outros esportes, mas todo problema que envolve a alocação e deslocamento de pessoas para realização de um trabalho ou serviço, já que ele é flexível e pode ser adaptado facilmente conforme a necessidade da resolução.

Como trabalho futuro sugere-se a utilização de softwares mais robustos, campeonato com mais participantes e partidas, além de outras técnicas de solução para encontrar uma solução ótima global de um campeonato, sem ter que dividi-lo em partes para implementação devido a restrições de um solver comercial.

REFERÊNCIAS

Añon, I. C., Scaglia, A. J., & Torezzan, C. (2017). *Um modelo de programação linear inteira para otimização de recursos na designação de árbitros para o campeonato brasileiro de futebol*. Pesquisa Operacional Para O Desenvolvimento, 9(1), 10–17. <https://doi.org/10.4322/PODes.2017.002>

Nakamura, W. T. & Cerqueira, S. de A. (2021). *The New Era of Brazilian Football and Clubs Managed as a Business*. Revista de Administração Contemporânea [online], 25(4), 1982-7849. <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac2021210055.en>

Pilla, C. A. G. de., & Vieira, J. P. (2019). *A álgebra linear como ferramenta para a pesquisa operacional*. (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, SP, Brasil.

Righeto, C. & Baldy dos R., H. H. (2017). *Os árbitros de futebol e a mídia esportiva: a interpretação de árbitros paulistas sobre os comentários da mídia acerca do trabalho da equipe de arbitragem*. Movimento, 23 (1), 281-2940104-754X. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=115350608020>

Serrano, R., Morandi, M., Lacerda, D., & Piran, F. (2020). Análise da agregação de valor do ecossistema de futebol brasileiro: estudo de caso com o uso da dinâmica de sistemas. *Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção – ENEGEP*, 24(6), 2594-9713. http://dx.doi.org/10.14488/ENEGEP2020_TN_STO_347_1780_41138

Soares, C. G., Neves, Y. N., & Servare, M. W. J., Junior. (2019). Público e renda do futebol capixaba: cenário atual e alternativas. *Brazilian Journal of Production Engineering - BJPE*, 5(4), 221–236. <https://doi.org/10.0001/%25x>

