



DESENVOLVIMENTO DE UM PÊNULO INVERTIDO SOBRE DUAS RODAS

DEVELOPMENT OF AN INVERTED PENDULUM ON TWO WHEELS

DESARROLLO DE UN PÉNDULO INVERTIDO SOBRE DOS RUEDAS

Guilherme Viriato Leal ^{1*} & Ricardo Ribeiro Moura ²

^{1,2} Universidade Federal de Catalão - UFCAT

^{1*} guilhermeviriatoleal@gmail.com ² ricardoriibeimoura@ufcat.edu.br

ARTIGO INFO.

PALAVRAS-CHAVE: Acelerômetro; Arduino; Pêndulo invertido; PID.

KEYWORDS: Accelerometer; Arduino; Inverted pendulum; PID.

PALABRAS CLAVE: Acelerómetro; Arduino; Péndulo invertido; PID.

*Autor Correspondente: Leal, G. V.

RESUMO

O pêndulo invertido é caracterizado por ser um sistema instável a menos que uma força externa aja sobre ele, isso o torna um grande objeto de estudos em diversas áreas. Este trabalho tem como objetivo construir um protótipo de pêndulo invertido utilizando um controlador PID para alcançar a estabilização. Foi desenvolvido um protótipo utilizando-se um Arduino, um acelerômetro e dois motores de corrente contínua para a construção do veículo, assim como o desenvolvimento do código computacional. As variações dos parâmetros PID podem resultar na instabilidade do sistema, se forem valores muito altos. Contudo, valores menores do PID resultaram em um controle mais estável desse sistema.

ABSTRACT

The inverted pendulum is characterized as an unstable system unless an external force acts upon it, making it a subject of study in various fields. The objective of this work is to build a prototype of an inverted pendulum using a PID controller to achieve stabilization. A prototype was developed using an Arduino, an accelerometer, and two DC motors for the vehicle construction, along with the development of the computational code. Variations in the PID parameters can lead to system instability if the values are too high. El péndulo invertido se caracteriza por ser un sistema inestable a menos que una fuerza externa actúe sobre él, lo que lo convierte en un objeto de estudio en diversas áreas. El objetivo de este trabajo es construir un prototipo de péndulo invertido utilizando un controlador PID para lograr la estabilización. Se desarrolló un prototipo utilizando un Arduino, un acelerómetro y dos motores de corriente continua para la construcción del vehículo, así como el desarrollo del código computacional. Las variaciones en los parámetros PID pueden provocar la inestabilidad del sistema si los valores son demasiado altos. Sin embargo, valores más bajos de PID resultaron en

un control más estable de este sistema. However, lower PID values resulted in a more stable control of this system.

RESUMEN

El péndulo invertido se caracteriza por ser un sistema inestable a menos que sobre él actúe una fuerza externa, lo que lo convierte en objeto de estudio en diversos campos. El objetivo de este trabajo es construir un prototipo de péndulo invertido utilizando un controlador PID para lograr la estabilización. Se desarrolló un prototipo utilizando un Arduino, un acelerómetro y dos motores DC para la construcción del vehículo, junto con el desarrollo del código computacional. Las variaciones en los parámetros PID pueden provocar inestabilidad en el sistema si los valores son demasiado altos. El péndulo invertido se caracteriza por ser un sistema inestable a menos que una fuerza externa actúe sobre él, lo que lo convierte en un objeto de estudio en diversas áreas. El objetivo de este trabajo es construir un prototipo de péndulo invertido utilizando un controlador PID para lograr la estabilización. Se desarrolló un prototipo utilizando un Arduino, un acelerómetro y dos motores de corriente continua para la construcción del vehículo, así como el desarrollo del código computacional. Las variaciones en los parámetros PID pueden provocar la inestabilidad del sistema si los valores son demasiado altos. Sin embargo, los valores más bajos de PID resultaron en un control más estable de este sistema. Sin embargo, valores de PID más bajos dieron como resultado un control más estable de este sistema.



INTRODUÇÃO

A engenharia de controle está presente em inúmeras áreas da indústria, como por exemplo no controle de ferramentas, linhas de montagem, controle de qualidade, robótica *etc.* Seu principal objetivo é a busca pela maximização da eficiência de projetos (Alvarenga, 2013).

O pêndulo invertido é um sistema que se caracteriza por ser instável a menos que uma força aja sobre ele a fim de manter o equilíbrio. Essa característica o torna um importante objeto para o estudo de diversos mecanismos complexos. Para uma melhor compreensão fazemos uma analogia à brincadeira de equilibrar uma vassoura na palma da mão. Nesse jogo é necessário movermos a mão constantemente de modo que o eixo da vassoura permaneça na vertical (Ribeiro, 2007).

O problema do pêndulo invertido, apesar de se tratar um sistema mecânico bastante simples, representa várias situações práticas que podem ser analisadas a partir dos conceitos envolvidos em seu estudo. Por exemplo, modelos biomecânicos do modo de caminhar dos seres humanos, possibilitando aplicações em áreas como próteses e braços robóticos, uma vez que a posição ereta e estável de uma pessoa ao caminhar se aproxima muito do pêndulo invertido (Ribeiro, 2007).

Existem diversos modelos, configurações, controladores e lógicas utilizadas em um sistema de pêndulo invertido. O presente estudo é baseado em um exemplo clássico da engenharia no ensino da teoria de controle e integra conhecimentos de elétrica, eletrônica e mecânica. Este protótipo se trata de um pêndulo invertido sobre duas rodas.

O sistema consiste em uma estrutura de duas rodas presa a uma haste fixa, que pode se deslocar regularmente. A haste tende a cair sob efeito da gravidade, portanto é um sistema naturalmente instável. O sistema pode ser estabilizado aplicando uma força horizontal nas duas rodas, fazendo a haste ficar na vertical. O objetivo deste trabalho é utilizar um controlador PID (Proporcional, Integral, Derivativo) como solução para um problema da mecânica clássica: a estabilização de um pêndulo invertido.

REFERENCIAL TEÓRICO

Pêndulo invertido

O pêndulo invertido clássico é constituído por uma haste, geralmente metálica, fixada em apenas um ponto em uma base. Devido a isso este sistema se torna instável em termos de equilíbrio (Pedroso & Modesto, 2017). A haste do pêndulo é instável pois o centro de gravidade do mesmo se encontra acima do ponto de articulação, ilustrado no diagrama de corpo livre na Figura 1, dessa forma a haste tende a girar para uma das direções, a não ser que uma força seja exercida sobre a base móvel que sustenta a haste (Ogata, 2010). A velocidade do motor da base deve ser suficiente para equilibrar a haste, porém não é possível obter esse equilíbrio sem que se aplique uma força à base móvel. Por isso é necessário a utilização de um controle PID (Pedroso & Modesto, 2017).

A equação do movimento de um pêndulo simples, sem considerar nenhum tipo de atrito ou restrições de movimento, e supondo que o corpo possui uma haste rígida ideal, com a massa



concentrada em seu extremo e com o eixo de rotação fixo no espaço, é muito similar a equação do pêndulo clássico Equação 1 (Frutos, 2013).

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta \quad (1)$$

Onde $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular do pêndulo, g é a aceleração da gravidade, l o comprimento do pêndulo e θ o ângulo medido desde a posição de equilíbrio. É possível afirmar que o pêndulo se acelera mais rápido quanto mais distante está da posição de equilíbrio e que a aceleração é inversamente proporcional ao comprimento do pêndulo (Frutos, 2013).

Funcionamento do pêndulo invertido

O pêndulo é composto por dois motores de corrente contínua gerenciados por um *driver* de potência. Estes motores são encarregados de gerar o torque necessário nas rodas para manter a estrutura em deslocamento angular próximo a 0º, sendo que o ângulo de referência é igual a 90º (Frutos, 2013).

As variações nas grandezas físicas são medidas pelo giroscópio e pelo acelerômetro. O giroscópio é responsável por fornecer a medida da velocidade angular, integrando esta medida ao longo do tempo pode-se obter o valor do ângulo. O acelerômetro mede acelerações tanto estáticas quanto dinâmicas, o que gera um ruído no sistema. Utiliza-se então um filtro passa-baixa, que retorna a componente estática: gravidade, e um filtro passa-alta (aceleração dinâmica), porém o uso desses filtros ocasiona um atraso significativo na resposta do sistema, tornando-o instável (Frutos, 2013).

Depois de conhecido o erro, é necessário definir um controlador que atue de tal forma que após algumas iterações o erro seja minimizado. Um controlador PID possui uma entrada e uma saída. A entrada é o sinal de erro gerado e a saída é o número de rpm (rotações por minuto) em que os motores devem girar para compensar a perturbação. A saída do controlador PID é fornecida pela soma dos três componentes: uma resposta proporcional ao erro, uma ação integral que tende a anular o erro e uma ação derivativa, que antecipa a resposta do sistema (Frutos, 2013).

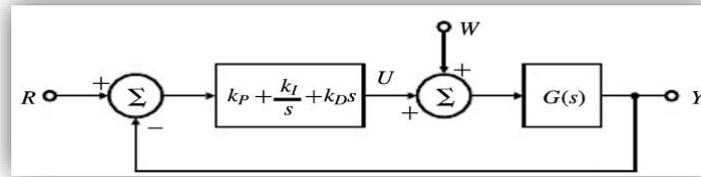
Controlador PID e o filtro de Kalman

O controlador PID (Proporcional, Integral, Derivativo) é descrito como um algoritmo de controle utilizado na indústria, sendo encontrado tanto em seu estado básico ou modificado. A facilidade e abrangência desse algoritmo o torna um dos mais populares no mercado. Essa técnica de controle possui um resultado satisfatório, apesar de em algumas situações eles não proporcionarem o melhor controle (Ogata, 2010).

Através da análise de um sistema genérico pode-se observar no diagrama de bloco, representado na Figura 1, uma representação de malha fechada. De forma geral o controlador tem como finalidade gerar um sinal de controle $u(t)$ que seja capaz de corrigir, se possível, anular o erro $e(t)$ gerado entre os sinais de referência $r(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ (Prado, 2011).



Figura 1. Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada



Fonte: Franklin (2013)

O cálculo do PID é dado pela seguinte fórmula observada na Equação 2:

$$u(t) = K_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (2)$$

Onde:

- $u(t)$ é a saída em relação ao tempo;
- $e(t)$ é a entrada menos o erro em relação ao tempo;
- K_p é a constante proporcional;
- K_i é a constante integral;
- K_d é a constante derivativa.

A função proporcional é responsável por gerar uma saída com valor proporcional ao erro presente na obtido na realimentação. Quanto maior o valor de K_p , maior será o ganho do erro, fazendo com que o sistema se torne instável. Entretanto, se K_p for muito pequeno, O tempo de resposta será menor (Laboratório de garagem, 2012).

A função integral soma todos os erros instantâneos, sendo essa soma multiplicada pela constante K_i . Ela acelera o movimento do processo até que o ponto onde o erro gerado pela função anterior seja eliminado. Contudo, como essa função soma dados instantâneos, o resultado pode ultrapassar o ponto de equilíbrio, esse fenômeno é chamado de *overshoot* (Laboratório de garagem, 2012).

Por último a função derivativa atrasa a taxa de variação da saída do controlador. A função reduz o *overshoot* da função anterior e melhora a estabilidade do controlador. No entanto, a função derivativa causa um atraso na resposta e é sensível a ruídos. Isso ocorre porque ela amplifica o ruído e se esse ruído e o ganho de K_d forem muito grandes, podem causar instabilidade no controlador (Laboratório de garagem, 2012).

O filtro de Kalman é um dos métodos mais utilizados quando há o objetivo de atenuar os efeitos de ruídos através de um *software*. Criado por Rudolf Kalman, esse método tem como objetivo utilizar outras medições de grandezas realizadas ao longo do tempo, que são contaminadas com ruídos e outras incertezas, e gerar resultados que tendem a se aproximar dos valores reais medidos (Welch & Bishop, 1995).

Aplicações e importância do estudo do pêndulo invertido

O pêndulo invertido é um sistema não linear que requer o uso de técnicas de controle que possam compensar essa não linearidade. Este tipo de problema é muito comum, sendo



utilizado em diversos estudos na área de controle o que o torna um benchmark para esta área (Silva, 2017).

Diversos trabalhos publicados demonstram a utilização de pêndulos aplicados na resolução de problemas relacionados a vários tipos de sistema físico como, por exemplo, a modelagem de um sistema constituído por helicóptero que transporta uma carga suspensa por um cabo e o comportamento dos navios devido às oscilações provocadas pelo movimento das ondas (Silva, 2013). Outra aplicação desse sistema pode ser vista durante o lançamento de foguetes ao espaço e também no equilíbrio de robôs (Paula, 2014).

Se tratando do pêndulo invertido sobre duas rodas se desenvolveram diversos produtos comerciais que podem ser utilizados como meios de transporte urbano. Esses novos produtos são bastante atrativos principalmente para o público mais jovem. A vantagem se dá ao fato de serem veículos movidos a eletricidade, além de não ocuparem muito espaço (Paula, 2014).

METODOLOGIA

O fluxograma na Figura 2 mostra as etapas que foram desenvolvidas durante a realização do projeto.

Figura 2. Fluxograma das etapas do projeto



Fonte: Autores (2022)

Conforme disposto na Figura 3 inicialmente realizou-se uma pesquisa bibliográfica acerca do desenvolvimento de pêndulos invertidos e da implementação do controle PID em sistemas instáveis. Após o embasamento teórico definiu-se o formato do pêndulo a ser trabalhado nesse projeto assim como os componentes mecânicos e eletrônicos. Esta é uma etapa de grande importância, o tamanho da estrutura mecânica e o peso dos componentes eletrônicos influenciam diretamente no controle do pêndulo. Para o projeto foram escolhidos um Arduino UNO®; um acelerômetro MPU6050, uma ponte h e dois motores de corrente contínua.



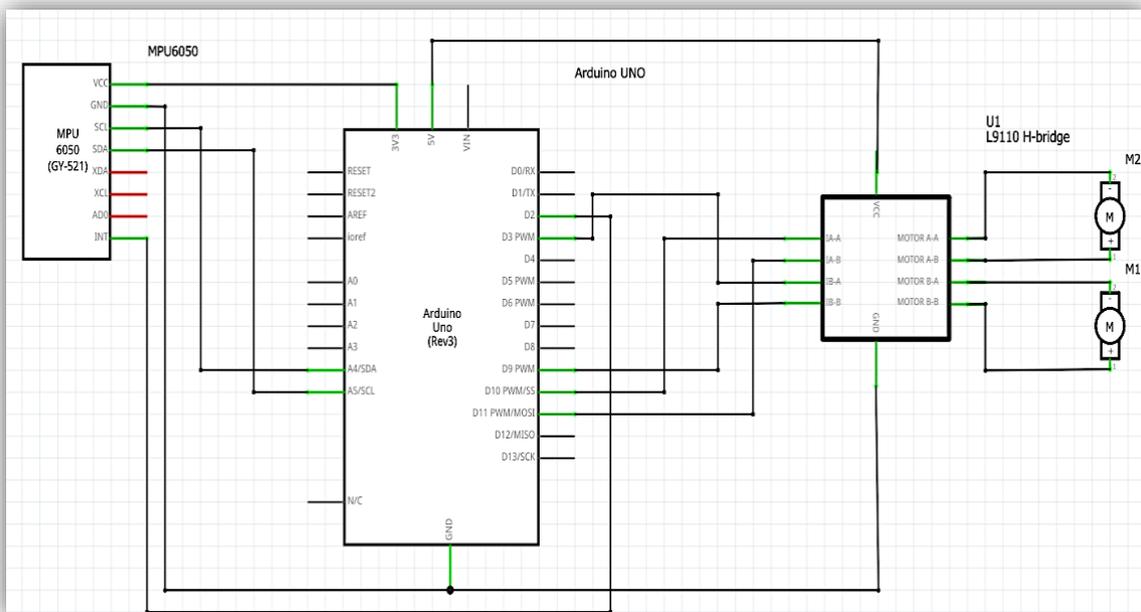
A etapa seguinte consistiu na confecção da estrutura mecânica (corpo e rodas) do protótipo. Para a construção optou-se por utilizar uma impressora 3D, pois ela oferece uma maior precisão, proporciona uma maior facilidade na produção das peças e seu material torna o protótipo mais leve. Para a construção do circuito elétrico do sistema utilizou-se o software *Fritizing*[®]. O software possui todos os módulos dos componentes eletrônicos utilizados no projeto, facilitando a visualização do esquema.

Posteriormente foram realizados testes com os componentes com o objetivo de identificar o mal funcionamento em algum deles. Constatado o bom funcionamento de todos os itens do projeto, foram então realizadas pesquisas a fim de desenvolver o código computacional adequado ao modelo definido. O código foi desenvolvido no software *Arduino*[®] IDE (*interface development environment*). Em seguida foram realizados diversos testes alterando-se os valores das constantes PID afim de observar as diferentes reações que podem ocorrer. Por último realizou-se a análise dos dados obtidos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os primeiros testes apontaram dificuldade de comunicação entre o acelerômetro ADXL345 e o conversor Analógico Digital - AD (ADS1115), o que impediu o funcionamento do primeiro protótipo. Foi definido então um outro modelo que utiliza um acelerômetro MPU6050, que já possui um conversor AD integrado. Após constatar o funcionamento dos componentes foi elaborado o circuito elétrico utilizando o software *Fritizing*[®], como mostrado na Figura 3. O programa é capaz de mostrar as ligações elétricas necessárias para o modelo e proporciona melhor compreensão do funcionamento do circuito.

Figura 3. Circuito elétrico do projeto



Fonte: Autores (2022)

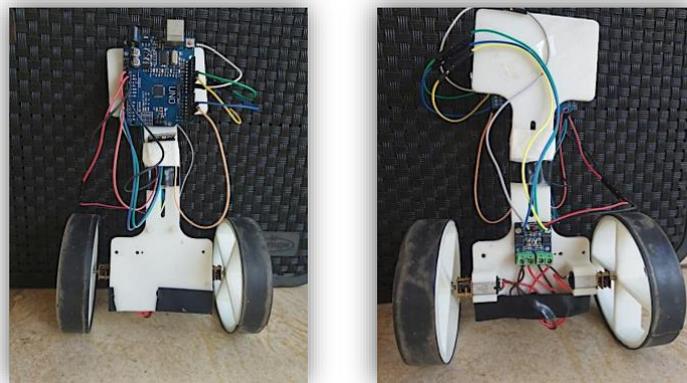
O modelo previa um conjunto de baterias integradas ao corpo do protótipo, todavia o peso das baterias associado ao restante dos itens acoplados passou a exigir um torque maior do



que o fornecido pelo conjunto de motores instalados. Para contornar esse problema a alimentação do protótipo foi feita pela porta de comunicação do Arduino, utilizando um cabo USB (Universal Serial Bus). Dessa forma, a alimentação do robô é feita inteiramente por conexão USB em um computador, o que também facilita a leitura dos dados em tempo real pela interface IDE. O uso da alimentação do sistema pelo cabo USB pode influenciar no desempenho do protótipo, uma vez que a tensão fornecida é de 5,0 Volts (no projeto inicial o banco de baterias previa 8,0 Volts), quando o motor é acionado essa tensão sofre uma pequena variação. Em testes de bancada a oscilação da tensão variou entre 4,4 e 5,0 Volts.

A montagem do protótipo foi feita acoplando a placa Arduino UNO® na parte superior da estrutura, de forma que o cabo USB possa ficar suspenso por uma linha, evitando o máximo de interferência da massa do cabo no conjunto do pêndulo. O acelerômetro MPU6050 foi fixado no meio do protótipo, sendo importante que esse componente não se mova para que a leitura seja precisa. Na Figura 4 está o protótipo do pêndulo invertido utilizado neste trabalho.

Figura 4. Protótipo do pêndulo invertido



Fonte: Autores (2022)

O controle PID foi feito por meio de um código escrito no software Ide do Arduino®, disponível gratuitamente no site da empresa. Feita a verificação do código computacional iniciou-se os novos testes. Em um primeiro momento foi utilizado os seguintes parâmetros para as variáveis K_p , K_d e K_i , utilizadas no controle PID.

Tabela 1. Parâmetros iniciais K_p , K_d e K_i

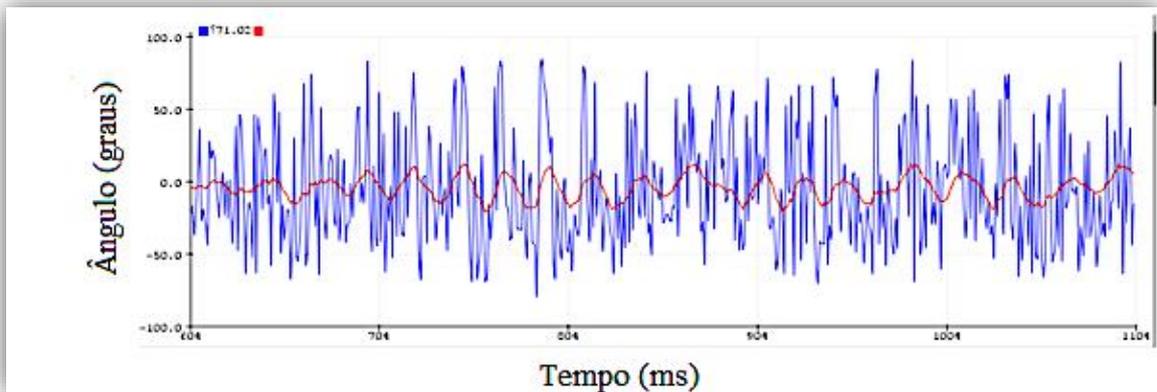
Parâmetro	Valor
K_p	25
K_d	0.9
K_i	0.9

Fonte: Autores (2022)

Nesta primeira simulação foi verificada a leitura dos ângulos medidos pela MPU6050 com e sem a utilização do filtro de Kalman, responsável por diminuir os ruídos no modelo aproximando os valores medidos dos reais valores. O Gráfico 1 abaixo mostra a discrepância entre as medidas, ficando evidente a importância da utilização do filtro. Em vermelho mostra a medida do ângulo com o filtro de Kalman aplicado, e em azul a medida sem o uso do filtro.



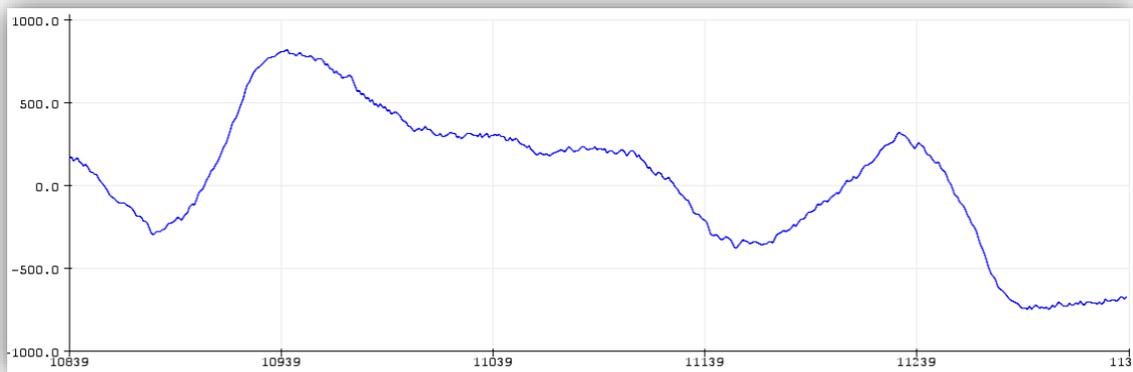
Gráfico 1. Gráfico de comparação entre o uso do filtro (vermelho) e o não uso dele (azul)



Fonte: Autores (2022)

O Gráfico 2 mostra a saída do PID, pode-se notar que a resposta do protótipo é grande em relação ao tempo, ou seja, nesses parâmetros o protótipo apresenta uma maior instabilidade, sendo necessário um maior espaço de movimentação. Neste exemplo, o protótipo não conseguia se manter equilibrado por muito tempo e, ao menor sinal de perturbação, ele perdia o controle sem conseguir se recuperar posteriormente.

Gráfico 2. Gráfico de saída do PID



Fonte: Autores (2022)

Após o primeiro teste foram então definidos novos parâmetros para PID a fim de observar quais alterações o modelo sofreria. Como o robô estava apresentando uma grande movimentação, decidiu-se diminuir os parâmetros para realizar a nova leitura, como pode ser observado na Tabela 2.

Tabela 2. Novos parâmetros iniciais K_p , K_d e K_i

Parâmetro	Valor
K_p	8.5
K_d	0.3
K_i	0.3

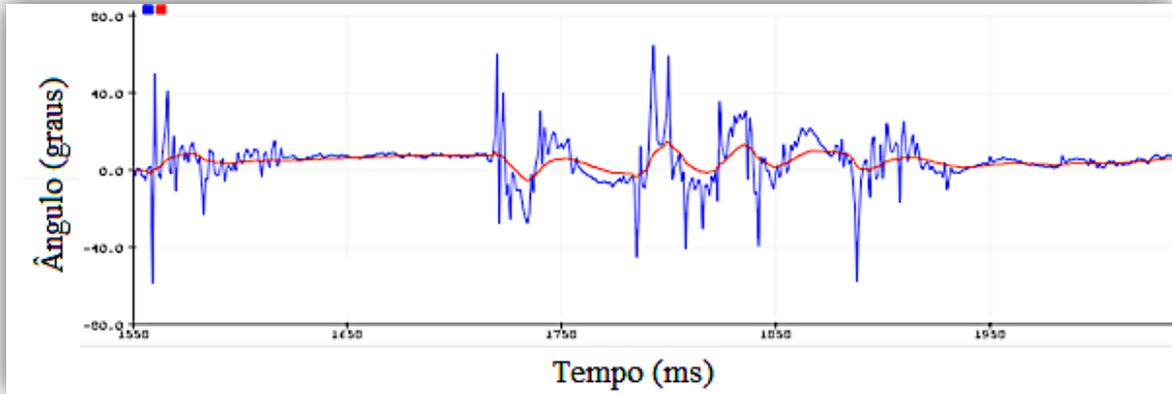
Fonte: Autores (2022)

A primeira análise realizada com os novos parâmetros foi a resposta na medição do ângulo. O Gráfico 3 mostra que os ângulos calculados pela aceleração da MPU6050 e o ângulo estimado pelo filtro de Kalman ficaram bem próximos após a alteração dos parâmetros.



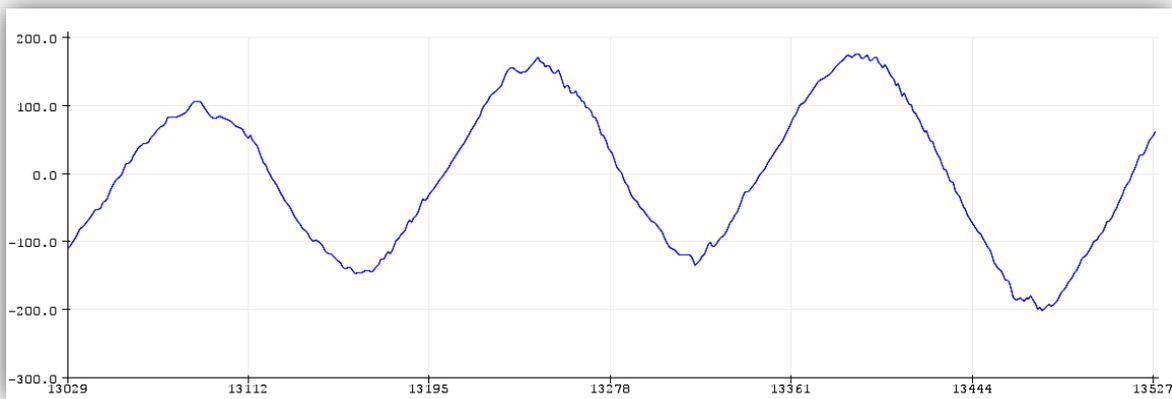
Percebe-se que inicialmente os ângulos possuem uma diferença considerável e logo depois ele começa a estabilizar, isso pode acontecer devido ao tempo de estabilização do modelo. O Gráfico 4 mostra a evolução da resposta do PID.

Gráfico 3. Gráfico de comparação da medida dos ângulos



Fonte: Autores (2022)

Gráfico 4. Gráfico de saída PID após alterações



Fonte: Autores (2022)

Percebe-se que apesar de apresentar alguns picos, o Gráfico 4 se mantém constante. Com esses parâmetros o protótipo apresentou uma melhor resposta aos estímulos externos, mas ainda assim após algum tempo o protótipo se desestabiliza e faz movimentos mais bruscos prejudicando o controle.

A constante K_p é responsável por ajustar o valor de saída corresponde ao erro obtido. Quanto maior a constante mais instável será o sistema, porém se esta for muito pequena o tempo de resposta será menor. Pode-se observar esse fenômeno nos Gráfico 2 e Gráfico 4, o primeiro apresenta um grande ganho na constante K_p e conseqüentemente se torna instável, já no segundo o K_p menor gera mais estabilidade com tempo de resposta maior.

A constante K_i realiza a soma dos erros do sistema, a sua alteração não apresenta diferença significativa no controle do pêndulo. A constante K_d é responsável por melhorar a estabilidade do controlador, todavia ela causa um atraso na resposta, tornando-o suscetível a ruídos. Nota-se no Gráfico 1, que o ruído absorvido no sistema é muito maior que o valor



real medido através do filtro de Kalman. Quando o parâmetro Kd foi reduzido, obteve-se menos ruídos e um melhor controle do sistema como observado no Gráfico 3.

CONCLUSÃO

O pêndulo invertido se caracteriza por ser um problema clássico na Engenharia. Sua aplicação possui inúmeras variedades, como por exemplo os *hoverboards* e até mesmo o lançamento de foguetes. Neste trabalho desenvolveu-se um protótipo de um pêndulo invertido utilizando um controlador PID. A impressão 3D da estrutura mecânica facilitou a construção do protótipo. O objetivo de realizar o controle do modelo utilizando o PID foi atingido, pode-se observar os efeitos da variação das constantes. Para trabalhos futuros pode-se simular novos parâmetros a fim de alcançar uma maior estabilidade no controle do pêndulo.

REFERÊNCIAS

- Alvarenga, V. L. (2013). Identificação de uma plataforma de um pêndulo invertido e simulação de técnicas de controle. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, Brasil. Recuperado de <http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/35325/1/DISSERTAÇÃO%20de%20uma%20plataforma%20de%20um%20p%C3%AAndulo%20invertido%20e%20simula%C3%A7%C3%A3o%20de%20t%C3%A9cnicas%20de%20controle.pdf>
- Laboratório de garagem. (2012). Controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) - Parte 1- Introdução. Recuperado de <https://labdegaragem.com/m/blogpost?id=6223006%3ABlogPost%3A154959>
- Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emani-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia*. 6a ed. Porto Alegre: Bookman.
- Frutos, M. A. de. (2013). VertiBOT. Recuperado de <https://madebyfrutos.wordpress.com/2013/05/02/vertibot/>
- Ogata, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*. 5a ed. São Paulo: Pearson.
- Paula, A. R. de. (2014). Modelagem e controle do pêndulo invertido sobre duas rodas. (Dissertação de graduação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil. Recuperado de <http://www.dee.ufc.br/anexos/TCCs/2014.2/ADRIANO%20RODRIGUES%20DE%20PAULA.pdf>
- Pedroso, C. C. de S. & Modesto, E. L. P. (2017). Sistema de controle de pêndulo invertido. (Dissertação de graduação). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil. Recuperado de http://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/9505/1/CT_COMET_2017_2_06.pdf
- Prado, I. F., do. (2011) Construção e Controle do Sistema Pêndulo invertido. (Dissertação de graduação). Instituto Federal da Bahia, Vitória da Conquista, BA, Brasil. Recuperado de <https://physika.info/site/documents/Prado2011.pdf>
- Ribeiro, R. (2007). Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil. Recuperado de <https://silo.tips/download/implementacao-de-um-sistema-de-controle-de-um-pendulo-invertido>
- Silva, E. A., de. (2013) Construção, modelagem e controle de um pêndulo invertido com CLP e software scada. (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, Brasil. Recuperado de https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87080/silva_ea_me_ilha.pdf?sequence=1
- Silva, G. D. (2017). Projeto, modelagem, simulação, construção e controle de um veículo de duas rodas pêndulo invertido. (Monografia de graduação). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. Recuperado de <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25442/3/ProjetoModelagemSimula%C3%A7%C3%A3o.pdf>
- Welch, G. & Bishop, G. (1995). *An Introduction to the Kalman Filter*. University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC, USA. Recuperado de https://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf

