



SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO A METODOLOGIA IMERSPEC ACOPLADA AO MÉTODO DE FOURIER-GEGBAUER E A TÉCNICA DE FILTRAGEM ESPECTRAL

Numerical solutions of the Navier-Stokes equations using the Imerspec methodology coupled with the Fourier-Gegenbauer method and spectral filtering technique

Soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando la metodología Imerspec acoplada al método de Fourier-Gegenbauer y la técnica de filtrado espectral

Breno Vilela^{1*}, Mariana Villela², Felipe Mariano³, & Laura Albuquerque⁴

¹²⁴ Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste

³ Universidade Federal de Goiás, Campus Samambaia

^{1*} breno.vilela@ufpe.br ² mariana.villela@ufpe.br ³ fp.mariano@ufg.br ⁴ laura.vasconcelos@ufpe.br

ARTIGO INFO.

Recebido: 22.12.2024

Aprovado: 29.07.2025

Disponibilizado: 12.09.2025

PALAVRAS-CHAVE: Métodos Espectrais; Filtragem Espectral; IMERSPEC; Fourier-Gegenbauer.

KEYWORDS: Spectral Methods; Spectral Filtering; IMERSPEC; Fourier-Gegenbauer.

PALABRAS CLAVE: Métodos Espectrales; Filtrado Espectral; IMERSPEC; Fourier-Gegenbauer.

*Autor Correspondente: Vilela, B.

RESUMO

Na modelagem de rochas ricas em petróleo, é de grande interesse o uso ferramentas numéricas como a metodologia IMERSPEC: capaz de simular os escoamentos bifásicos em geometrias complexas e porosas. Sabe-se que o método Pseudoespectral de Fourier apresenta soluções não acuradas em problemas com descontinuidades e condições de contorno não periódicas devido ao fenômeno de Gibbs. A técnica de filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer são procedimentos de pós-processamento que minimizam essas oscilações. Dessa forma, o presente trabalho avalia a implementação da metodologia IMERSPEC acoplada à filtragem espectral e ao método de Fourier-Gegenbauer em três problemas associados às equações de Navier-Stokes: a equação de Burgers Inviscida, a equação de Burgers clássica em condições de contorno não periódicas e um escoamento em um canal plano em conjunto com o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A). Portanto, análises quantitativas do erro e da taxa de convergência são apresentadas.

ABSTRACT

When modeling oil-rich rocks, it is of great interest to use numerical tools such as the IMERSPEC methodology: capable of simulating two-phase flows in complex and porous geometries. It is known that the Pseudo-spectral Fourier method presents uncured solutions in problems with discontinuities and non-periodic boundary conditions due to Gibbs phenomenon. The spectral filtering technique and the Fourier-Gegenbauer method are post-processing procedures that minimize these oscillations. The present work evaluates the implementation of the IMERSPEC methodology coupled to spectral filtering and the Fourier-Gegenbauer method in three problems associated with the Navier-Stokes equations: the Inviscid Burgers innovation, the classical Burgers innovation in non-periodic boundary conditions and a flow in a flat channel in conjunction with the Sparlat-Allmaras (S-A) turbulence model. Therefore, quantitative analyzes of the error and convergence rate are presented.

RESUMEN

A la hora de modelar rocas ricas en petróleo, resulta de gran interés utilizar herramientas numéricas como la metodología IMERSPEC: capaz de simular flujos bifásicos en geometrias complejas y porosas. Se sabe que el método Pseudoespectral de Fourier presenta soluciones no precisas en problemas con discontinuidades y condiciones de contorno no periódicas debido al fenómeno de Gibbs. La técnica de filtrado espectral y el método de Fourier-Gegenbauer son procedimientos de posprocesamiento que minimizan estas oscilaciones. El presente trabajo evalúa la implementación de la metodología IMERSPEC acoplada al filtrado espectral y el método de Fourier-Gegenbauer en tres problemas asociados a las ecuaciones de Navier-Stokes: la ecuación de Inviscida Burgers, la ecuación clásica de Burgers en condiciones de frontera no periódicas y un flujo en un canal plano en conjunto con el modelo de turbulencia Sparlat-Allmaras (S-A). Por ello, se exponen análisis cuantitativos de la tasa de error y de convergencia.

INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes revolucionaram o campo da mecânica dos fluidos uma vez que apresentam um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) capazes de descrever o comportamento e movimento de substâncias fluidas para muitos problemas físicos (Wolfram, 2002). Contudo, devido à complexidade geométrica e as condições de temperatura e pressão que a maioria dos problemas físicos apresentam, as soluções para essas equações são impraticáveis de serem resolvidas analiticamente.

Villela (2015) explica que os métodos espectrais são considerados métodos de alta ordem e oferecem excelente acurácia. Estes proporcionam mais de 10 dígitos de acurácia, enquanto os métodos clássicos como diferenças finitas ou elementos finitos, alcançam dois ou três dígitos, podendo chegar a ordens superiores aumentando o tamanho do estêncil. No entanto, uma desvantagem enfrentada por essas técnicas numéricas ocorre quando são aplicadas em problemas com descontinuidades ou condições de contorno não periódicas: a ocorrência de oscilações espúrias nas soluções numéricas acaba por afetar a acurácia do método, o denominado fenômeno de Gibbs.

O fenômeno de Gibbs refere-se à ocorrência de oscilações nas soluções numéricas ao empregar, neste caso, uma série de Fourier finita para aproximar uma dada função que apresenta descontinuidades ou não periodicidade. Nesse contexto, o decaimento de primeira ordem dos coeficientes de Fourier não garante a convergência uniforme sobre toda a aproximação, causando a perda da precisão espectral alcançada pelos métodos espectrais (Tadmor, 2007). Essas oscilações numéricas são consideradas um obstáculo ainda maior, especialmente em equações não lineares, que podem induzir em mais instabilidade não linear (Kopriva, 1987).

As equações de Navier-Stokes, abordadas no presente trabalho, por vezes definem o comportamento de fenômenos físicos nos quais essas oscilações fortemente influenciariam, produzindo mais instabilidade não linear. Um exemplo disso são escoamentos compressíveis com fluidos que se movem em torno de objetos com geometrias complexas, nos quais os choques advindos de mudanças abruptas de pressão representam descontinuidades nas soluções (Toro, 2009). Outro exemplo são escoamentos bifásicos em meios porosos de rochas ricas em petróleo e escoamentos em regimes turbulentos regidos por alto número de Reynolds, que compõem grande parte da física prática observada na natureza.

Para lidar com as limitações impostas pelo MPEF, Mariano (2011) introduziu uma nova metodologia que combina o método Pseudoespectral de Fourier com o método da Fronteira Imersa (MFI), denominado IMERSPEC. Essa nova metodologia possibilitou a remoção da necessidade de condições de contorno periódica, sendo possível modelar problemas de variada complexidade geométrica. Até então, sua aplicação tem sido demonstrada e validada em diferentes problemas físicos.

Villela et al. (2017) aplicou a metodologia para escoamentos bifásicos incompressíveis com geometria móvel e flexível usando os métodos front-tracking (FT) e volume of fluid (VF) para simular interações fluido-fluido. Nascimento et al. (2020) trouxe uma análise comparativa do IMERSPEC com o método dos volumes finitos, estudando convergência e custo computacional da metodologia aplicada aos vórtices de Green-Taylor. Albuquerque et al. (2024) aplicou a

metodologia para escoamentos incompressíveis em baixo número de Reynolds para distintos perfis de aerofólios, avaliando a sua performance aerodinâmica.

No entanto, embora o IMERSPEC tenha se mostrado capaz de aliviar as restrições impostas pelo MPEF, a ocorrência do fenômeno de Gibbs ainda ocorre, afetando assim a precisão dessa metodologia promissora. A fim lidar com o obstáculo do fenômeno de Gibbs, técnicas foram desenvolvidas para resolver esse problema.

A técnica de filtragem espectral é prática e versátil, se destacando hoje na área de análise e processamento de sinais. Partindo da perspectiva escrita anteriormente, a proposta trazida pelos filtros espectrais é de aumentar a taxa de convergência da série de Fourier a partir da informação espectral contida em seus coeficientes, com o intuito de atenuar o fenômeno de Gibbs. Porém, os filtros espectrais apresentam resultados não tão satisfatórios quando usados em problemas com a presença de descontinuidades (Kopriva, 1987).

Reconhecendo as limitações encontradas em resolver as oscilações de Gibbs, Gottlieb et al. (1992) propuseram um método teoricamente capaz de resolver completamente esse fenômeno: o método de Fourier-Gegenbauer (MFG), publicando uma série de artigos sobre esse procedimento (Gottlieb & Shu, 1995a, 1995b, 1996).

Dessa maneira, o presente trabalho tem por objetivo geral resolver numericamente as equações de Navier-Stokes utilizando a metodologia IMERSPEC e acoplá-la ao método de Fourier-Gegenbauer e a técnica de filtragem espectral. Para tal, realizou-se a análise para três problemas que estão intrinsicamente associadas às Equações de Navier-Stokes. O primeiro se refere à equação de Burgers Inviscida, enquanto o segundo trata da equação de Burgers clássica em um domínio não periódico. Por fim, o terceiro problema trata do escoamento monofásico em um canal plano utilizando a metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A) como proposto por Albuquerque (2024). Desta forma, identificam-se os possíveis ganhos computacionais que venham tornar a metodologia IMERSPEC mais acurada e promissora.

METODOLOGIA

METODOLOGIA E MODELAGEM DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações governantes, abordadas no presente trabalho, para fluidos Newtonianos e escoamentos incompressíveis são denominadas Equações de Navier Stokes (Equação 1) e Equação de conservação de massa (Equação 2).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + f_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2)$$

onde $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i}$, sendo p^* a pressão estática, em $[N.m^{-2}]$, ρ é a massa específica, em $[kg.m^{-3}]$,

u_i é o campo de velocidades, em $[m.s^{-1}]$, ν é a viscosidade cinemática, em $[m^2.s^{-1}]$, $f_i = \frac{f_i^*}{\rho}$, com f_i^* sendo o termo fonte que representa as forças externas atuantes no escoamento, em $[N.m^{-3}]$, x é a variável espacial, em $[m]$, t é a variável temporal, em $[s]$ e i é índice que caracteriza em que dimensão se encontra o problema. Nas seções em diante, descreve-se todo o aparato metodológico para resolver Navier-Stokes.

MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA

O método da Fronteira Imersa, desenvolvido por Peskin (2002), tem como principal vantagem a sua capacidade de representar problemas de escoamento com geometrias complexas e flexíveis. O MFI opera empregando dois domínios independentes que se comunicam entre si: um é responsável por descrever o escoamento (euleriano), e o outro é responsável por representar a geometria imersa (lagrangiano).

O método possui abordagens diferentes quanto à imposição da força no sistema de equações a serem resolvidas. Neste estudo, foi utilizada a imposição direta das condições de contorno, desenvolvida por Uhlmann (2005), também conhecido como *direct-forcing*. Essa imposição baseia-se no uso das informações das soluções numéricas das equações governantes por meio de um termo fonte f_i^* . Assim, o termo fonte é responsável por conectar as informações entre os domínios lagrangiano e euleriano, ou seja, a interface sólido/fluido. Ele é definido em todo o domínio euleriano mas apresenta valores diferentes de zero apenas nos pontos que coincidem com a geometria imersa, permitindo que o campo euleriano perceba a presença da interface sólida (Enriquez-Remigio; Neto, 2007), conforme visto na Equações 3 e 4.

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (3)$$

$$u_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} U_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (4)$$

onde \vec{x} é a posição da partícula do fluido no domínio Ω e \vec{X} é a posição da partícula na interface sólida no domínio ψ . Tratando por essa metodologia, rearranjando-se a Equação 1,

$$\frac{du_i}{dt} = \text{RHS} + f_i^* \quad (5)$$

onde $\text{RHS} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}$ representa o lado direito da equação. Através do método do *direct-forcing* e usando da formulação explícita de Euler, a Equação 5 se torna a Equação 6.

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^* + u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = \text{RHS} + f_i^* \quad (6)$$

onde Δt é o passo de tempo, $u_i^{t+\Delta t}$ e u_i^t representam as soluções numéricas do campo de velocidades no domínio euleriano nos instantes t e $t + \Delta t$, u_i^* é uma variável temporária dentre os instantes t e $t + \Delta t$ que guarda a informação do campo de velocidades. Separando a Equação 6 em duas partes, obtém-se as Equações 7 e 8,

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^*}{\Delta t} = f_i^* \quad (7)$$

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = \text{RHS} \quad (8)$$

A Equação 7 nos permite obter u_i^* pelo método explícito de Euler. Contudo, no presente estudo optou por utilizar do método de Runge-Kutta de 4ª ordem devido a sua alta acurácia. Observando a Equação 3, pode-se obter explicitamente o termo fonte no domínio lagrangiano F_i . Para um domínio com pontos coincidentes, no domínio euleriano, a Equação 7 se torna a Equação 9.

$$\frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t} = F_i(\vec{X}, t) \quad (9)$$

onde U_i^* representam as soluções numéricas do campo de velocidades no domínio lagrangiano nos instantes. O termo $U_i^{t+\Delta t}$ é a velocidade estimada ou conhecida na interface lagrangiana. Finalmente, atualize os valores do campo de velocidade através da Equação 10.

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t f_i^* \quad (10)$$

MÉTODO PSEUDOSPECTRAL DE FOURIER

O método Pseudoespectral de Fourier consiste no uso numérico da transformada de Fourier, a Transformada Discreta de Fourier (Briggs & Henson, 1995), que transforma as variáveis discretas do espaço físico para o espaço espectral, vista na Equação 11.

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N f_n e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (11)$$

onde \hat{f}_k é a função transformada no domínio espectral, f_n é a função no domínio físico, k é o vetor de números onda, $i = \sqrt{-1}$ é o número imaginário, e N é o número de pontos de colocação da malha. O vetor k foi calculado na forma $k_\mu = \mu - 1$ para $1 < \mu < N/2 + 1$, e $k_\mu = \mu - 1 - N$ para $N/2 + 2 < \mu < N$. Similarmente, a Transformada Inversa Discreta de Fourier é vista na Equação 12.

$$f_n = \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^N \hat{f}_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (12)$$

Utilizando a transformada nas Equações 1 e 2, tem-se,

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + ik_j (\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{1}{\rho} ik_j \hat{p}^* + ik^2 v \hat{u}_i + \frac{f_i^*}{\rho} \quad (13)$$

$$ik_j \hat{u}_i = 0 \quad (14)$$

onde k^2 é o quadrado do vetor número onda, isto é, $k^2 = k_j k_j$. No espaço espectral, o Termo Não Linear (TNL) é dado pelo produto de duas funções transformadas $ik_j (\hat{u}_i \hat{u}_j)$. Formalmente, resolver este termo é um problema, uma vez que requer a resolução de uma integral de convolução de alto custo computacional, observada na Equação 15.

$$(\hat{u}_i \hat{u}_j)(\vec{k}) = \int \hat{u}_i(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \quad (15)$$

onde $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$, fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda \vec{k} , \vec{r} e \vec{s} .

A principal ideia do MPEF consiste em não calcular diretamente o TNL no espaço espectral para evitar esse custo oneroso (Villela et al., 2017). A fim de mitigar esse empecilho, as derivadas espaciais dos termos não lineares são então inicialmente computadas no espaço espectral e depois transformadas para o espaço físico, onde as multiplicações são corretamente calculadas. Com efeito, a manutenção da alta acurácia do método espectral de Fourier é garantida pela possibilidade de se realizar produtos no espaço físico e de se fazer os cálculos das derivadas no espaço espectral (Mariano, 2011). Além disso, uma característica do termo não linear é que ele pode ser tratado das diversas formas (Canuto et al., 2006):

- Forma não conservativa: $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$;
- Forma conservativa: $\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}$;
- Forma antissimétrica: $\frac{1}{2} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right)$;
- Forma rotacional: $\frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$;

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e $\omega_{ijk} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ representa a componente do vetor vorticidade, dado por $\omega = \nabla \times u$.

Um importante ponto a ser mencionado é que a forma antissimétrica é em si uma maneira de combater os erros numéricos provenientes do termo não linear. Geralmente, os erros gerados em termos quadráticos com o uso dos métodos espectrais são chamados de “Aliasing Error” (AE), e assim, essa abordagem do termo não linear se mostra como um método de “De-Aliasing” (DA). Em suma, o AE ocorre quando há uma incompatibilização na qual os altos números de onda se associam aos baixos números de onda. Esse fenômeno aparece como um acúmulo de ruído nos altos números de onda (Boyd, 2000).

No presente trabalho, o TNL foi tratado em sua forma antissimétrica, calculada pelos seguintes passos:

1. Dado \hat{u}_i , calcula-se a derivada espectral $ik\hat{u}_i$;
2. Faça a transformada inversa dos termos $ik\hat{u}_i$ e \hat{u}_i ;
3. No domínio físico, calcula-se o produto $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$;
4. Aplique a transformada de Fourier obtendo $\widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$, a forma advectiva do TNL.

Em seguida,

5. Dado u_j , calcula-se $u_j u_j$ no espaço físico;
6. Faça a transformada do produto das velocidades $\widehat{u_j u_j}$, passando-as para o espaço espectral;
7. No espaço espectral compute as derivadas $ik\widehat{u_j u_j}$, obtendo a forma divergente do TNL;
8. Finalmente, para a forma assimétrica, tome a média aritmética entre a forma advectiva e divergente, obtendo $\frac{1}{2} \left(\widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + ik\widehat{u_j u_j} \right)$.

MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Uma vez que o método Pseudoespectral de Fourier possui uma discretização espacial de alta ordem, é interessante que seja utilizado um método de discretização temporal que seja compatível com essa acurácia. Desse modo, o presente trabalho optou pelo uso do conhecido método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Tal método avalia a função em quatro pontos dentro de cada intervalo, permitindo uma aproximação mais precisa e com maior estabilidade. O passo de tempo foi determinado conforme as condições de Courant-Friedrichs-Lewis (1967), ou CFL, sendo determinado pela Equação 16.

$$dt = CFL * \min \left\{ \min \left[\frac{dx}{\max|u_i|}, \frac{dy}{\max|v_i|} \right], \frac{2}{v} \left(\frac{1}{dx^2}, \frac{1}{dy^2} \right) \right\} \quad (16)$$

ACOPLAMENTO DOS MÉTODOS PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER E DA FRONTEIRA IMERSA - IMERSPEC

Visto que a abordagem dos métodos Pseudoespectral de Fourier e da Fronteira Imersa foi descrita nas seções anteriores, faz-se então o acoplamento entre ambas para obter a metodologia IMERSPEC. O acoplamento se dá através do uso das Equações 3 e 4, para quando os nós são coincidentes, calculadas no espaço espectral. Para uma melhor compreensão do algoritmo da metodologia IMERSPEC utilizado no presente trabalho, pode-se verificar o passo a passo em Mariano (2011).

TÉCNICA DE FILTRAGEM ESPECTRAL

Os filtros espectrais utilizam da informação existente nos coeficientes de Fourier para aumentar convergência destes e tentar recuperar a acurácia espectral perdida em virtude do

fenômeno de Gibbs. Seja f_n a aproximação pela transformada inversa de Fourier da Equação 11, então a aproximação filtrada é dada pela Equação 17.

$$f_n^\sigma = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sigma_j(\eta) \hat{f}_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (17)$$

onde $\sigma_j(\eta)$ é o filtro utilizado, com $\eta = \frac{L \times k}{N}$, e L é o comprimento do domínio. Vandeven (1991) traz a definição geral de um filtro descrevendo que uma função real e suave $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser um filtro de ordem p se satisfaz,

1. $\sigma(0) = 1$, $\sigma^{(l)}(0) = 0$; $1 \leq l \leq p$;
2. $\sigma(\eta) = 0$, $1 \leq |\eta|$;
3. $\sigma \in \mathbb{C}^{p-1}$.

onde p é a ordem, e l é uma variável qualquer que representa a posição no intervalo. O presente trabalho implementou cinco diferentes filtros. Prosseguindo, o filtro de Féjer (FJR) é um filtro de primeira ordem (Kopriva, 1987). Este é definido pela Equação 18,

$$\sigma_1(\eta) = 1 - |\eta| \quad (18)$$

O filtro de Lanczos (LCZ) é um filtro de segunda ordem, expressado pela Equação 21. É equivalente a uma aproximação de diferenciação no espaço físico por diferenças centradas de segunda ordem (Kopriva, 1987).

$$\sigma_2(\eta) = \frac{\sin \pi \eta}{\pi \eta} \quad (19)$$

O filtro “Raised Cosine” (RC) também é um filtro de segunda ordem, Equação 20, equivalente à média comum no espaço físico denotada pela Equação 23 (Kopriva, 1987),

$$\sigma_3(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi \eta) \quad (20)$$

$$\frac{u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1}}{4} \quad (21)$$

O filtro “Raised Cosine” pode ser “afiado” por meio de técnicas padrões), resultando no chamado “Sharpened Raised Cosine” (SRC), vista na Equação 22 (Kopriva, 1987).

$$\sigma_4(\eta) = \sigma_3^4(\eta)[35 - 84\sigma_3(\eta) + 70\sigma_3^2(\eta) - 20\sigma_3^3(\eta)] \quad (22)$$

O filtro Exponencial de ordem p , onde p é par, é dado pela Equação 23 (Jiahong, 1998).

$$\sigma_5(\eta) = e^{-\alpha \eta p} \quad (23)$$

Jiahong (1998) esclarece que o filtro exponencial não se adequa formalmente na definição de filtro, pois $\sigma_5(1) = e^{-\alpha} \neq 0$. Dessa maneira, pode-se escolher $e^{-\alpha}$ igual ao erro de máquina, a fim de que o valor seja aproximado numericamente para zero. É um filtro comumente utilizado devido a sua simplicidade e bons resultados (Jiahong, 1998).

A aplicação da técnica de filtragem consiste em reproduzir a expressão antes demonstrada na Equação 18. Logo, o procedimento implementado em ambiente Matlab para os problemas abordados no presente trabalho está descrito a seguir:

1. Passa-se f_n para o espaço espectral aplicando a rotina FFT, gerando \hat{f}_k ;
2. Multiplica-se \hat{f}_k pelo filtro desejado, $\sigma_j(\eta)$;
3. Retorna-se para o espaço físico aplicando a rotina IFFT, obtendo a solução filtrada.

MÉTODO DE FOURIER-GEGBAUER

O método de Fourier-Gegenbauer utiliza informações dos coeficientes de Fourier de uma função para reconstruí-la em uma nova expansão rapidamente convergente com coeficientes de Gegenbauer no intervalo $[-1, 1]$. Ao contrário do que se é observado nos filtros espectrais, a expansão de Gegenbauer demonstra a capacidade de aproximar exponencialmente uma função até seus pontos de descontinuidade, uma região fortemente afetada por oscilações de Gibbs.

Os polinômios de Gegenbauer são polinômios ortogonais sobre o intervalo $[-1, 1]$. Esses polinômios podem ser expressos em termos dos polinômios de Jacobi $P_l^{(\alpha, \beta)}(x)$ com $\alpha = \beta = 0,5$, conforme mostrado na forma dada na Equação 24.

$$C_l^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(l+1+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(l+\lambda+1/2)} P_l^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) \quad (24)$$

O método tem como objetivo reconstruir uma aproximação de uma função dada $f(x)$ por meio de dois passos: calcular os coeficientes de Gegenbauer e expandi-los na nova série de Gegenbauer, como observado nas Equações 25, 26 e 27.

$$g_l^\lambda(x) = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(\lambda-\frac{1}{2})} f_n(x) C_l^\lambda(x) dx \quad 0 < l < m \quad (25)$$

$$h_l^\lambda = \pi^{1/2} C_l^\lambda(1) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)(l+\lambda)} \quad (26)$$

$$g(x) \approx \sum_{l=0}^m \hat{g}_l^\lambda(x) C_l^\lambda(x) \quad (27)$$

onde \hat{g}_l^λ representa os coeficientes de Gegenbauer, h_l^λ denota a constante de normalização, Γ é a função Gamma, $f_n(x)$ é a aproximação truncada da série de Fourier para a função $f(x)$, $g(x)$ é a função reconstruída, e λ e m são variáveis numéricas livremente escolhidas. No presente trabalho a integral da Equação 25 foi resolvida pela Regra do Trapézio.

Para o caso em que a função não é totalmente definida em $[-1, 1]$, se faz necessária uma assertividade do domínio, ou seja, analisar os subintervalos $[a, b] \subset [-1, 1]$ em que a função é analítica e contínua. Dessa forma, seja $f(x)$ uma função analítica num intervalo $[a, b]$, tomando-se uma variável local ξ onde $-1 \leq \xi \leq 1$, tem-se,

$$\xi(x) = \frac{x-\delta}{\epsilon} \Leftrightarrow x(\xi) = \epsilon\xi + \delta, \quad (28)$$

onde $\delta = \frac{b+a}{2}$ e $\epsilon = \frac{b-a}{2}$. Logo, substituindo na Equação 25 e 27, obtém-se,

$$g_l^\lambda = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{(\lambda-\frac{1}{2})} f_N(\epsilon\xi + \delta) C_l^\lambda(\xi) d\xi, \quad 0 \leq k \leq m \quad (29)$$

$$g(\epsilon\xi + \delta) \approx \sum_{k=0}^m \hat{g}_k^\lambda C_k^\lambda(\xi) \quad (30)$$

Esse processo é então repetido para cada subintervalo $[a, b] \subset [-1, 1]$, sendo posteriormente necessário juntar cada um dos resultados para observar um resultado global do problema proposto. O procedimento implementado em ambiente Matlab para o Método de Gegenbauer abordado no presente trabalho está descrito a seguir:

1. Com a solução no espaço físico, escolhe-se valores para λ e m e calcula-se a constante de normalização, h_l^λ , conforme a Equação 26;
2. Computa-se os coeficientes de Gegenbauer, g_l^λ , pela Equação 25;
3. Faz-se a reconstrução de Gegenbauer através da Equação 27.

Gottlieb et al. (1992, 1995a, 1995b, 1996) propõem que um bom chute inicial para tais variáveis seria $m = \lambda = \frac{1}{4}N$, de modo que tal relação minimizaria o erro de truncamento. Todavia, na prática, a escolha dessas variáveis acaba sendo tomada a depender do problema, existindo a necessidade de testes para obtenção de resultados otimizados.

Jiahong (1998) relembra que o fenômeno de Gibbs pode ser totalmente eliminado através do método. Contudo, isso apenas pode ser observado de um ponto de vista teórico, uma vez que o método é limitado pelas capacidades computacionais, de modo que o número de cálculos computacionais pode ser grande para algumas funções. Também, a série de Gegenbauer é limitada a $\lambda, m \sim 100$, em detrimento das funções Gama e Bessel e o cálculo dos termos para altas ordens permite que o método fique sujeito a erros de máquina.

MÉTODO DE ANÁLISE QUANTITATIVA

No presente trabalho, para avaliar quantitativamente os resultados obtidos, adotou-se como medida do erro a norma L_2 definida através da Equação 31,

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N |U_e - U_n|^2} \quad (31)$$

onde U_e é a solução exata e U_n é a solução numérica obtida. Além disso, uma análise para a taxa de convergência foi feita conforme a Equação 32 (Villar, 2007).

$$q = \frac{\log\left(\frac{\|\varphi_{2h} - \varphi_e\|}{\|\varphi_h - \varphi_e\|}\right)}{\log(2)} \quad (32)$$

onde φ_h representa a solução numérica em um espaçamento de malha h , φ_e é a solução exata e $\|\cdot\|$ é a norma L_2 calculada na Equação 31. De acordo com Kirby e Karniadakis (2003), serão considerados métodos de alta ordem aqueles que apresentam $q > 2$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

RESULTADOS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS INVISCIDA

A equação de Burgers, definida na Equação 33, é uma equação diferencial parcial de grande utilidade vide sua capacidade de formular o comportamento de ondas de choque.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} \quad (33)$$

Comparando com as equações de Navier-Stokes formuladas na Equação 1, é evidente que Burgers dispensa os termos do gradiente de pressão e do termo de fonte. Para Canuto et al. (1988), é uma expressão amplamente utilizada devido ao seu equilíbrio entre os termos de advectivo e difusivo, mostrando-se como um nível fundamental na hierarquia das equações de Navier-Stokes. Ao tratar a Equação 35 em uma situação de viscosidade zero, isto é, $\nu = 0$, obtém-se a Equação 34, a equação de Burgers Inviscida. Sua solução analítica é dada pela Equação 35.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (34)$$

$$u_i(x, t) = u_0(x - u_{i-1}t) \quad (35)$$

onde u_0 é a condição inicial. No presente trabalho, a solução exata vista na Equação 35 foi obtida numericamente de maneira explícita. O problema em questão foi simulado para a condição inicial disposta na Equação 36.

$$u_i(x, 0) = -\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \quad (36)$$

Frisa-se também que, no contexto deste trabalho, a equação de Burgers Inviscida foi resolvida usando apenas o método Pseudoespectral de Fourier, tratando o termo não linear em sua forma antissimétrica. Com efeito, a Tabela 1 resume os parâmetros adotados para as variáveis na simulação desse problema.

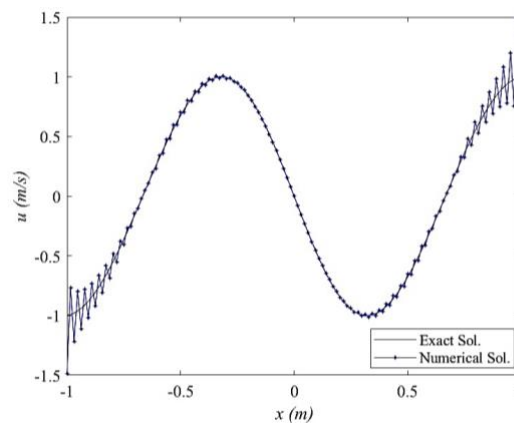
Tabela 1. Variáveis utilizadas para a simulação da equação de Burgers Inviscida

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Número de Pontos	N	32, 64, 128, 256	-
Courant-Friedrichs-Lewis	CFL	0,05	-
Discretização Temporal	Δt	Eq. 25	[s]
Comprimento do Domínio	L	4	[m]
Tempo Final	T	$0,04/\pi$	[s]
Variável MFG	λ	3; 3,5; 5,5; 5,5	-
Variável MFG	m	10, 11, 18 e 28	-

Fonte: Autores (2024).

O tempo final foi escolhido de forma que fosse possível observar o início da formação dos choques ao longo da onda. A partir da condição inicial escolhida, a formação de choques é observada bem rapidamente, em $T \cong 0,04/\pi$.

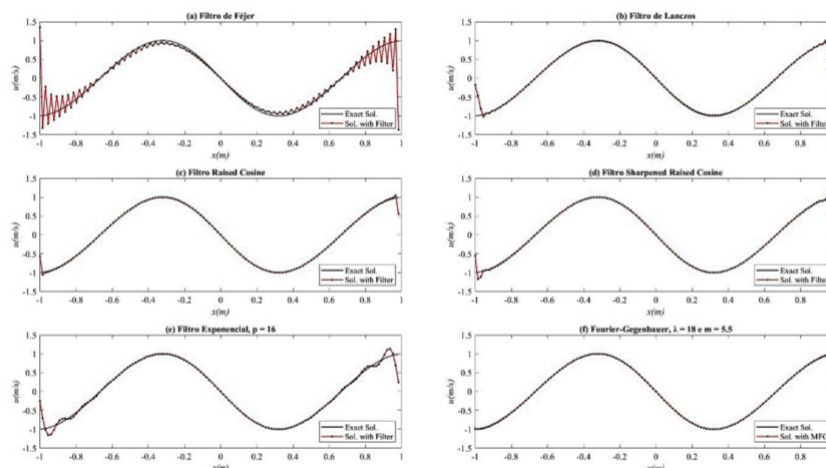
Figura 1. Solução numérica da equação de Burgers Inviscida para $N = 128$



Fonte: Autores (2024).

Na Figura 1, tem-se uma comparação da solução exata e numérica. Nota-se oscilações espúrias presentes na solução numérica, estas associadas a formação de choques e ao fenômeno de Gibbs. As oscilações surgem a partir das zonas de transição e se propagam de modo agravante ao longo do domínio até as extremidades. Aplicado a técnica de filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer, através do procedimento descrito nas seções 2.6 e 2.7, respectivamente, obteve-se a Figura 2.

Figura 2. Soluções para equação de Burgers Inviscida com $N = 128$



Fonte: Autores (2024).

Dentre os filtros, a Figura 2 nos permite observar que qualitativamente o filtro de Féjer apresenta os piores resultados, agravando as oscilações na solução numérica. O filtro de Lanczos tem resultados consistentes para sua ordem. O filtro Exponencial apresenta boa qualidade, mas retorna a oscilar quando se aproxima das extremidades do domínio. O destaque fica com os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine”, reduzindo significativamente as oscilações pela maior parte do domínio. Em contrapartida, o Método de Fourier-Gegenbauer demonstra o melhor resultado dentre todos. É excelente na resolução das oscilações numéricas atuando ao longo todo o domínio, até mesmo em suas extremidades.

Um fato que pode ser constatado na técnica de filtragem espectral está na incapacidade dos filtros não suavizarem as oscilações quando se aproxima das descontinuidades $x = -1$ e $x = 1$, como discutido por Kopriva (1987). Reiterando, isso acontece pois o fenômeno de Gibbs advindo do Método espectral de Fourier implica na limitação do decaimento dos coeficientes de Fourier ser de primeira ordem (Tadmor, 2007) (Tabelas 1 e 2).

Tabela 2. Norma L_2 encontradas para os diferentes casos simulados

N	Sem	FJR	LCZ	RC	SRC	Exp	FG
32	4.03E-02	4.91E-01	2.78E-01	1.20E-01	1.27E-01	2.19E-01	7.05E-02
64	5.98E-02	3.80E-01	1.81E-01	8.19E-02	8.90E-02	1.53E-01	1.85E-02
128	8.99E-02	3.34E-01	5.34E-02	5.49E-02	6.27E-02	1.08E-01	5.93E-03
256	1.29E-01	3.38E-01	8.66E-02	4.01E-02	4.98E-02	7.89E-02	1.77E-02

Fonte: Autores (2024).

Tabela 3. Taxas de convergência encontradas para os diferentes casos simulados

Comparação	q[Sem]	q [FJR]	q [LCZ]	q [RC]	q [SRC]	q [Exp]	q [FG]
32-64	0.58	0.37	0.63	0.56	0.52	0.52	1.93
64-128	0.59	0.19	1.76	0.58	0.51	0.51	1.64
128-256	0.52	0.02	0.7	0.46	0.34	0.45	1.57

Fonte: Autores (2024).

A princípio, identifica-se que conforme N aumenta, a solução numérica sem qualquer tratamento tende a piorar. Isso se dá em virtude de que os choques aumentam conforme N cresce. Do ponto de vista médio, o filtro de Féjer tem um erro máximo da ordem de 10^{-1} e o filtro Exponencial consegue alcançar a ordem 10^{-2} apenas para $N = 256$, oferecendo os resultados menos consistentes. Os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” alcançam 10^{-2} para valores menores de N em comparação com os outros filtros. Com o Método de Fourier-Gegenbauer obteve-se os melhores resultados, obtendo erros de 10^{-2} como $N = 32$ e atingiu erro de 10^{-3} para $N = 128$.

Ainda, é importante salientar que o resultado para $N = 256$ aparenta ser inconsistente com o que se é esperado uma vez que o erro volta a crescer mesmo que a malha esteja sendo refinada. Isso é explicado pois o MFG é fortemente dependente das variáveis λ e m , havendo a necessidade de escolher múltiplos valores conforme aumenta-se N .

Por meio da Tabela 3, que mede a velocidade ao passo que o erro decresce com o aumento de N , os filtros apresentaram uma taxa geral por volta de 0,5. Nesse contexto, identifica-se que o MFG apresenta maior taxa de convergência por uma boa margem.

RESULTADOS PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS EM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO PERIÓDICAS COM A METODOLOGIA IMERSPEC

Para esse problema, trabalhou-se com a equação de Burgers, já definida na Equação 45 com a presença do termo de viscosidade, isto é, $\nu \neq 0$. A condição inicial e solução analíticas, propostas por Canuto et al. (2006), são vistas na Equação 37 a 39.

$$u_i(x, 0) = c + u_b(x, 0) \quad (37)$$

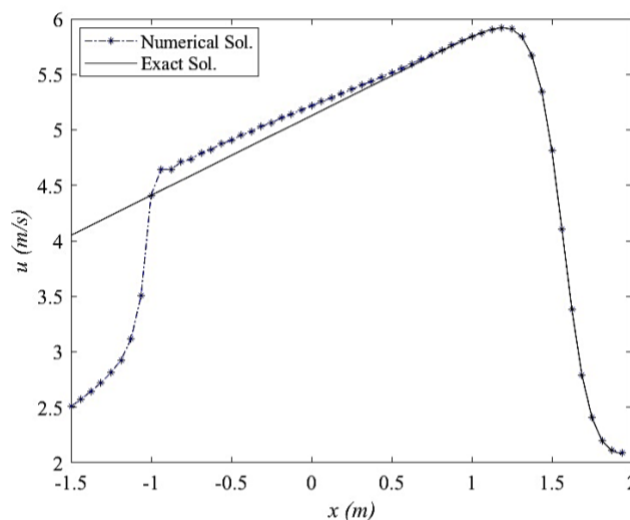
$$u_b(x, 0) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x-ct, t+1)}{\phi(x-ct, t+1)} \quad (38)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu t}} \quad (39)$$

onde c é a velocidade de advecção, em [m/s], e n é o contador do somatório. A aplicação do MPEF na equação de Burgers em um domínio não periódico naturalmente força periodicidade na solução numérica.

Assim, recorrendo ao IMERSPEC, consegue-se definir limites através de pontos de força que impõem a condição não periódica ao domínio, possibilitando garantir uma solução que tende a convergir para a solução analítica, observado na Figura 3. O domínio de interesse está compreendido entre $[-1, 1]$ e o domínio complementar é estabelecido entre $[-2, 1]$ e entre $1, 2]$. No entanto, apesar dessa convergência para o analítico após a imposição da força em $x = -1$ e $x = 1$, observa-se a presença do fenômeno de Gibbs. A Tabela 4 descreve as variáveis utilizadas para esta simulação.

Figura 3. Convergência para solução analítica recuperada pelo IMERSPEC para $N = 64$



Fonte: Autores (2024).

Tabela 4. Variáveis utilizadas para a simulação da equação de Burgers em domínio não periódico

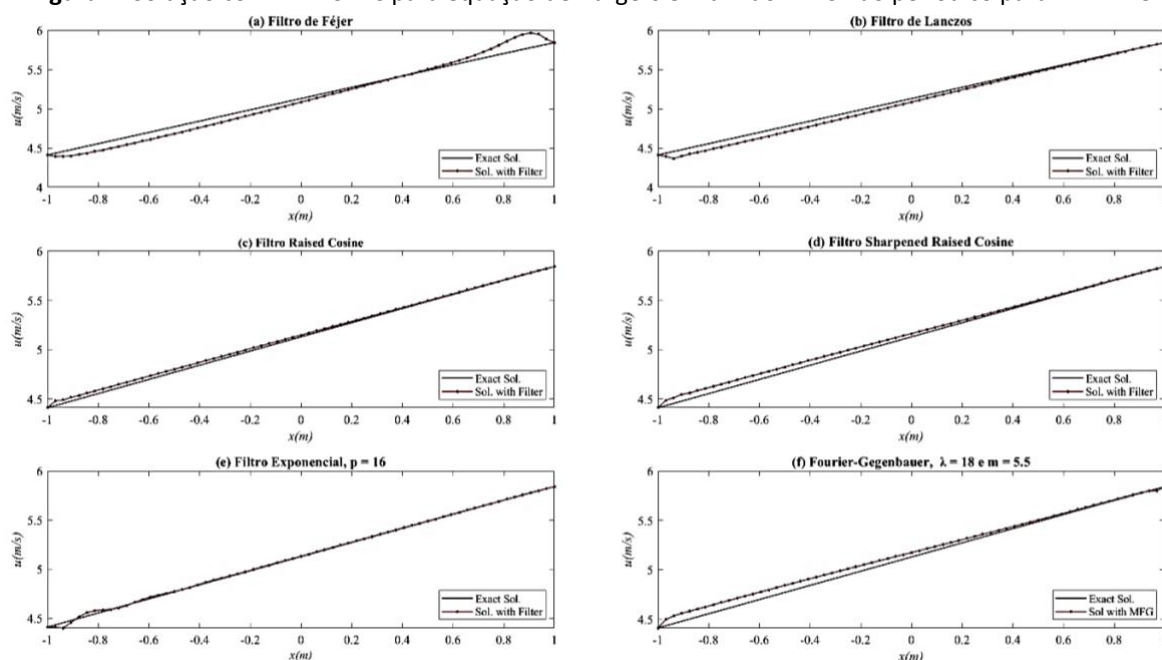
Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Número de Pontos	N	32, 64, 128, 256	-
Discretização Temporal	Δt	$1/N^2$	-
Comprimento do Domínio	L	4	[m]
Tempo Final	T	$\pi/8$	[s]
Velocidade de Advecção	c	4	[m/s]
Viscosidade Cinemática	ν	0,2	[m ² /s]
Intervalo do Somatório	n	-50 a 50	-
Variável MFG	λ	8, 5; 5,5; 6	-
Variável MFG	m	8, 10, 18 e 28	-

Fonte: Autores (2024).

A Figura 4 ilustra os resultados encontrados para o problema com a aplicação da técnica da filtragem espectral e o método de Fourier-Gegenbauer. Especificamente, para esse problema, a técnica de filtragem espectral foi aplicada diretamente no termo não linear, haja vista que testes mostraram que filtrar a cada passo de tempo com a presença do termo difusivo ocasiona numa forte perda de informação da solução numérica.

Similarmente para a equação de Burgers Inviscida, a Figura 4 nos permite observar que qualitativamente o filtro de Féjer apresenta os piores resultados, ao contrário dos filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine”, que melhor atuam no problema. No que concerne o método de Fourier-Gegenbauer, este apresentou resultados consistentes, mas que não foram melhores que os dois filtros anteriores.

Figura 4. Solução com IMERSPEC para equação de Burgers em um domínio não periódico para $N = 128$



Fonte: Autores (2024).

Com efeito, infere-se que o “Raised Cosine” teve um melhor resultado global e uniforme em comparação aos outros casos. A Tabela 5 resume os resultados encontrados para norma L_2 em todos os casos simulados, enquanto a Tabela 6 exibe a taxa de convergência associada a cada filtro por simulação.

Tabela 5. Norma L_2 encontradas para os diferentes casos simulados

N	Sem	FJR	LCZ	RC	SRC	Exp	FG
32	1.78E-01	4.78E-01	4.77E-01	1.41E-02	2.83E-02	3.34E-01	1.66E-01
64	9.95E-02	2.10E-01	1.18E-01	2.21E-02	4.51E-02	6.96E-02	9.81E-02
128	5.05E-02	7.80E-02	4.97E-02	2.20E-02	3.81E-02	1.09E-02	4.99E-02
256	2.51E-02	4.03E-02	1.45E-02	1.61E-02	2.30E-02	1.58E-02	2.50E-02

Fonte: Autores (2024).

Tabela 6. Taxas de convergência encontradas para os diferentes casos simulados

Comparação	q[Sem]	q [FJR]	q [LCZ]	q [RC]	q [SRC]	q [Exp]	q [FG]
32-64	0.83	1.2	2	0.64	0.67	2.26	0.76
64-128	0.98	1.42	1.25	0.006	0.24	2,7	0.98
128-256	1	0.95	1.78	0.45	0.72	0,53	1

Fonte: Autores (2024).

Em média, os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” entregam os resultados mais consistentes, alcançando ordem de 10^{-2} para valores menores de N em comparação com os outros filtros. Os filtros de Lanczos e Exponencial ganham um pouco de destaque para $N = 256$, pois traduzem os melhores erros obtidos. O método de Fourier-Gegenbauer apresentou pouca capacidade de melhoria na capacidade para esse caso. Ainda, ao se observar as convergências, os filtros Exponencial e Lanczos apresentaram taxas de convergência mais altas quando comparadas com os outros filtros nesse problema.

RESULTADOS PARA O ESCOAMENTO MONOFÁSICO COM A METODOLOGIA IMERSPEC E O MODELO DE TURBULÊNCIA DE SPARLAT-ALLMARAS (S-A)

O último problema estudado é escoamento monofásico em um canal plano utilizando a metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras (S-A). Considerando as Equações de Navier-Stokes na forma das Equações 40 e 41,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{f_i}{\rho} \quad (40)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (41)$$

onde p^* é a pressão estática, em $[N.m^{-2}]$, ρ é a massa específica, em $[kg.m^{-3}]$, u_i é o campo de velocidades, em $[m.s^{-1}]$, ν é a viscosidade cinemática, em $[m^2.s^{-1}]$, $f_i = \frac{f_i^*}{\rho}$, com f_i^* sendo o termo fonte que representa as forças externas atuantes no escoamento, em $[N.m^{-3}]$, x é a variável espacial, em $[m]$, e t é a variável temporal, em $[s]$.

Aplicando um operador de filtragem a Navier-Stokes, como proposto por (Smagorinsky, 1963), tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (43)$$

No entanto, o termo de transporte advectivo, $\bar{u}_i \bar{u}_j$, aparece como um produto filtrado e não pode ser resolvido desta forma. Introdz-se assim o tensor de Boussinesq-Reynolds,

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i' u_j'} \quad (44)$$

onde $\tau_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$. Esse termo possui uma natureza física semelhante a um tensor viscoso molecular, agrupando-o ao termo viscoso na Equação 40.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho} \quad (45)$$

Boussinesq (1877) propôs o fechamento do tensor de Boussinesq-Reynolds conforme a Equação 46.

$$\rho \bar{u}_i \bar{u}_j = u_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (46)$$

onde u_t é a viscosidade dinâmica turbulenta, que está relacionada à energia cinética turbulenta, k . Substituindo na Equação 45,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho} \quad (47)$$

onde $v_t = \frac{u_t}{\rho}$. O divergente do termo envolvendo κ e o delta de Kronecker, δ_{ij} , resulta no gradiente da energia cinética turbulenta,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \quad (48)$$

Essa energia pode ser incorporada no termo do gradiente de pressão com a Equação 49.

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3}\rho k \quad (49)$$

O modelo de turbulência utilizado, publicado em Spalart e Allmaras (1994), é amplamente empregado na modelagem de turbulência em virtude de ter significativa acurácia ao passo que possui um custo computacional consideravelmente baixo (Celic & Hirschel, 2006). Esse modelo não resolve diretamente v_t , mas sim uma viscosidade turbulenta modificada $\tilde{\nu}$. Esse modelo é descrito pela Equação 50.

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + \frac{c_{b2}}{\alpha} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \quad (50)$$

A viscosidade cinemática turbulenta pode ser expressa pela Equação 51,

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (51)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad (52)$$

onde,

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (53)$$

A magnitude da vorticidade S é ajustada para \tilde{S} para poder garantir que o comportamento logarítmico na camada intermediária se estenda até a parede,

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (54)$$

sendo a taxa média de deformação do fluxo definida em termos da magnitude do tensor de vorticidade Ω ,

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad (55)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (56)$$

Enquanto a função f_{v2} é dada pela Equação 57, a função f_w , responsável pela calibração do termo destrutivo, é definida pela Equação 58.

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (57)$$

$$f_w = g \left[\left(1 + \frac{C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} \right] \quad (58)$$

onde,

$$g = r + C_{w2}^6 (r^6 - r) \quad (59)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (60)$$

Os parâmetros utilizados para essa simulação podem ser observados nas Tabelas 7 e 8.

Tabela 7. Variáveis utilizadas para a simulação do Escoamento Turbulento

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Número de Pontos	N	64 × 128	-
Discretização Temporal	Δt	10 ⁻³	[s]
Comprimento na Direção x	L_x	10	[m]
Comprimento na Direção y	L_y	1	[m]
Tempo Final	T	25	[s]
Reynolds (Tensão de Cisalhamento)	Re_τ	1000	-
Reynolds	Re	40000	-
Velocidade de Entrada	U_∞	1	[m/s]
Velocidade na Direção y	v	0	[m/s]
Viscosidade Cinemática	ν	2,5 × 10 ⁻⁵	[m ² /s]
Massa Específica do Ar	ρ	1	[kg/m ³]
Variável MFG	λ	17	-
Variável MFG	m	21	-

Fonte: Autores (2024).

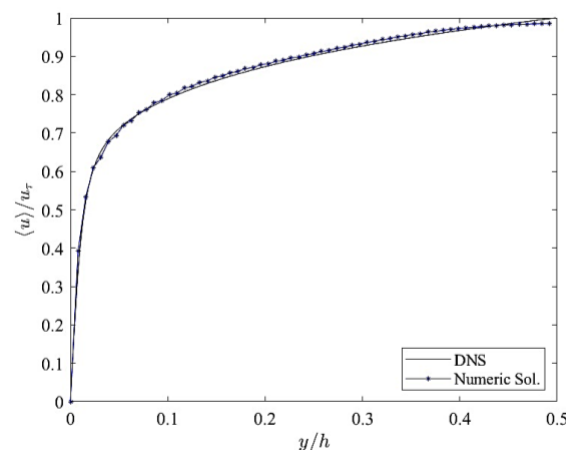
Tabela 8. Variáveis utilizadas para o modelo de turbulência de Sparlat-Allmaras

Parâmetro	Valor
c_{b1}	0,1355
c_{b2}	0,62
c_{w1}	$\frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\alpha}$
c_{w2}	0,3
c_{w3}	2,0
c_{v1}	7,1
α	$2/3$
κ	0,41

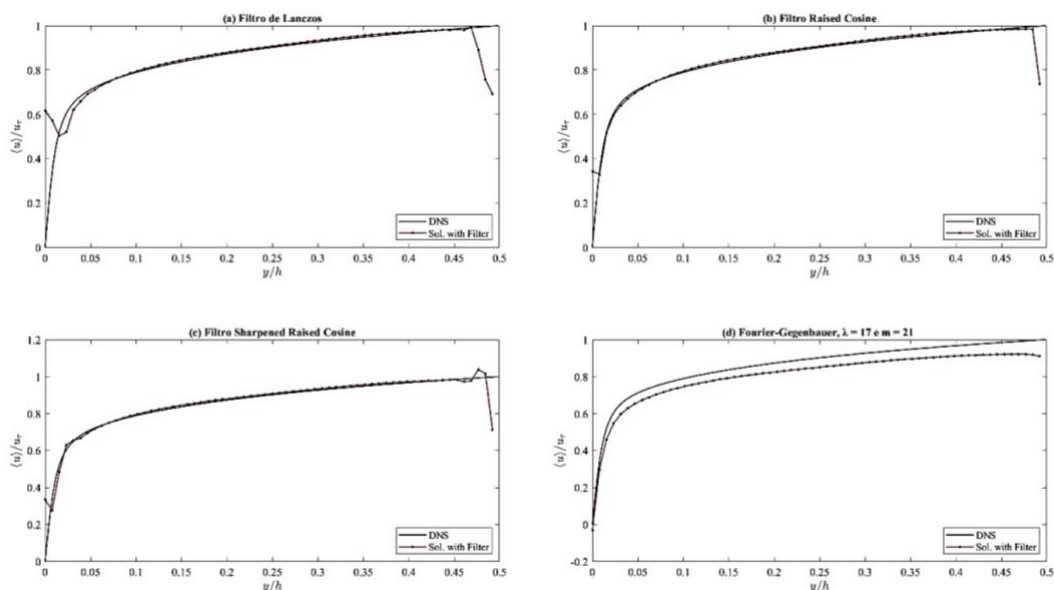
Fonte: Autores (2024).

Diversos estudos com resultado de Simulação Numérica Direta (DNS) oferecem uma ampla base de dados para a validação de modelos de turbulência, como RANS e LES. O presente estudo utiliza como referência os dados do DNS de Lee e Moser (2015).

A solução numérica obtida para a malha $N = 64 \times 128$ do perfil de velocidade média, normalizado pela velocidade no eixo central, em função da distância normalizada pela largura do canal, para um escoamento totalmente desenvolvido com $Re_\tau = 1000$, comparado aos dados do DNS pode ser observada na Figura 5. Dessa forma, as soluções filtradas e com o MFG são vistas na Figura 6.

Figura 5. Perfil de velocidade média para $N = 64 \times 128$, com $Re_\tau = 1000$ 

Fonte: Autores (2024).

Figura 6. Solução para o perfil de velocidade média com $N = 64 \times 128$ e $Re_\tau = 1000$ 

Fonte: Autores (2024).

Nesse contexto, nota-se que as oscilações são suavizadas com maior eficiência com o uso do filtro “Raised Cosine”. No que se refere ao método de Fourier-Gegenbauer observa-se a completa eliminação das oscilações e mantimento da forma da solução numérica. No entanto, enquanto os filtros encontram dificuldades de suavizar a solução nas extremidades da solução o método de Fourier-Gegenbauer não consegue alcançar totalmente a solução esperada.

Ao longo das simulações, buscou-se identificar qual melhor situação para a técnica de filtragem entregaria os melhores resultados. Diferentemente do segundo problema, a equação de Burgers em condições de contorno não periódicas, a filtragem a cada passo de tempo no termo não linear pouco afetou na mitigação das oscilações identificadas. Isso pode ser explicado devido à forte influência que os termos viscosos têm sobre esse escoamento turbulento, porém isso não permite aplicar a técnica de filtragem nestes termos. Com a experiência da aplicação dessa técnica em outras situações, filtrar o termo viscoso das Equações de Navier-Stokes apresentam um grande obstáculo visto que é uma parcela extremamente sensível do problema, e assim as soluções acabam por divergir numericamente.

Haja vista que o DNS disponível em literatura é dado em $N = 172$ pontos, comparação quantitativa dos resultados em norma L_2 não é possível de ser propriamente feita. Desse modo, com auxílio do Excel, pode-se interpolar os pontos de tal modo que fosse possível obter uma estimativa do erro encontrado. A Tabela 8 exhibe tais resultados estimados.

Tabela 8. Norma L_2 encontradas para os diferentes casos simulados

Malha	Sem	LCZ	RC	SRC	FG
64 x 128	7.25E-03	9.62E-02	5.46E-02	5.72E-02	5.36E-02

Fonte: Autores (2024).

Apesar do erro médio na norma estimado para o método de Fourier-Gegenbauer ser menor que para os outros filtros, nesse caso, isso não o garante uma posição privilegiada em qualidade, uma vez que a norma para os filtros é fortemente afetada pelos resultados nas extremidades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido no presente trabalho trouxe resultados significativos sobre o acoplamento da metodologia IMERSPEC ao método de Fourier-Gegenbauer e à técnica de filtragem espectral, a fim de lidar com as oscilações espúrias em problemas com descontinuidades, em condições de contorno não periódicas ou com formação de choques.

Com a equação de Burgers Inviscida, verificou-se que os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” foram os mais eficientes em reduzir as oscilações, oferecendo uma solução mais estável em comparação aos outros filtros, como o de Féjer, que apresentou os piores resultados. O MFG, por sua vez, destacou-se ao apresentar a melhor resolução para as oscilações, conseguindo suavizar as transições ao longo de todo o domínio. A norma L_2 calculada para os diferentes valores de N evidenciou a superioridade do MFG em termos de acurácia e convergência, embora seus resultados para 256 pontos de colocação tenham mostrado certa inconsistência.

No que concerne a equação de Burgers clássica em um domínio não periódico, o uso do método IMERSPEC permitiu a imposição de condições de fronteira não periódicas, possibilitando que a solução numérica convergisse para solução analítica, mesmo com a

presença do fenômeno de Gibbs, especialmente na extremidade esquerda da imposição da força. Nesse contexto, com a filtragem espectral localizada no termo não linear, obteve-se os resultados mais consistentes com o filtro “Raised Cosine” em contraste do método de Fourier-Gegenbauer, que pouco influenciou na acurácia da solução.

Por fim, o estudo do escoamento turbulento com o modelo de Spalart-Allmaras e a metodologia IMERSPEC proporcionou uma nova visão acerca da aplicabilidade dos filtros espectrais e do MFG em problemas mais complexos. Novamente, os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” apresentaram um bom desempenho em acurácia ponto a ponto, enquanto o MFG mostrou ser uma ferramenta promissora capaz de resolver as oscilações até as extremidades do domínio, mas não alcançar completamente a convergência para solução.

Dessa forma, afirma-se que a técnica de filtragem espectral é uma boa ferramenta em geral na suavização das oscilações numéricas, sendo práticas e pouco onerosas em custo computacional, mas que são pouco efetivas em problemas caracterizados por descontinuidades e de difícil compatibilização em problemas com termos dissipativos como a viscosidade turbulenta do modelo de Spalart-Allmaras. Em contrapartida, o método de Fourier-Gegenbauer se apresenta de modo extremamente promissor visto que consegue eliminar oscilações numéricas até mesmos nos pontos de descontinuidade. Contudo, possui um custo computacional mais oneroso, uma forte dependência das variáveis λ e m e é limitado ao domínio $[-1,1]$. Não obstante, julga-se que o potencial deste método ainda pode alcançar resultados ainda mais acurados. Isso se deve pois, no presente trabalho, a integral para o cálculo dos coeficientes de Gegenbauer é obtida por meio da Regra do Trapézio, e assim acredita-se que conforme uma integral de maior ordem seja implementada, menores serão os erros encontrados.

Conclui-se, que o acoplamento da metodologia IMERSPEC junto do método de Fourier-Gegenbauer e da técnica de filtragem espectral é uma combinação promissora na melhoria da qualidade das soluções numéricas em problemas não lineares e turbulentos. Em uma perspectiva futura, além de buscar melhores métodos de integração para calcular os coeficientes no MFG, também objetiva-se expandir a aplicação das técnicas de pós-processamento a problemas bifásicos e escoamentos com geometrias mais complexas utilizando do IMERSPEC.

REFERÊNCIAS

- Albuquerque, L., Villela, M., & Mariano, F. 2024. Numerical Simulation of Flows Using the Fourier Pseudospectral Method and the Immersed Boundary Method. *Axioms*, 13(4). <https://doi.org/10.3390/axioms13040228>
- Briggs, W. L., & Henson, V. E. (1995). *The DFT - An owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*. Pennsylvania: SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971514>
- Boussinesq, J. (1877). *Essai sur la théorie des aux courants*. Paris: Impr. nationale. Recuperado de <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076>
- Boyd, J. P. (2000). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. New York: DOVER.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. (1988). *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. New York: Springer Berlin. Recuperado de <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-84108-8>
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. (2006). *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. New York: Springer Berlin. Recuperado de <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-30728-0>
- Celic, A. & Hirschel, E. H. (2006). Comparison of eddy-viscosity turbulence models in flows with adverse pressure gradient. *AIAA Journal*, 44(10), 2156-2169. <https://doi.org/10.2514/1.14902>
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2), 215-234. <https://doi.org/10.1147/rd.112.0215>
- Gottlieb, D. & Shu. C. W. (1996). On the Gibbs Phenomenon III: Recovering exponential accuracy in a subinterval from a spectral partial sum of a piecewise analytic function, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1), 280-290, 1996. <https://doi.org/10.1137/0733015>
- Gottlieb, D. & Shu. C. W. (1995a). On the Gibbs Phenomenon IV: Recovering exponential accuracy in a sub-interval from a Gegenbauer partial sum of a piecewise analytic function. *Mathematics of Computation*, 64,1081-1095.

<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1995-1284667-0>
 Gottlieb, D. & Shu. C. W. (1995b). On the Gibbs Phenomenon V: Recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function. *Numerische Mathematik*, 71, 511-526. Recuperado de <https://link.springer.com/article/10.1007/s002110050155>
 Gottlieb, D., Shu. C. W., Solomonoff, A., & Vandevein, H. (1992). On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a nonperiodic analytic function. *J. Comput. Appl. Math.*, 43, 81-98. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(92\)90260-5](https://doi.org/10.1016/0377-0427(92)90260-5)
 Enriquez-Remigio, S. A. & Neto, A. S. (2007). A new modeling of fluid-structure interaction problems through immersed boundary method/virtual physical model (IBM/VPM). *Anais do International Congress of Mechanical Engineering*, Brasília, Brasil, 19. Recuperado de <https://abcm.org.br/anais/cobem/2007/pdf/COBEM2007-0811.pdf>
 Jiahong, Y. (1998). Reconstrução de funções a partir de coeficientes de Fourier e de Momentos Ortogonais: Novos Métodos (Dissertação de Doutorado). *Universidade Estadual de Campinas*, Campinas, SP, Brasil.
 Kirby, R. M. & Karniadakis, G. E. (2003). De-aliasing on non-uniform grids: algorithms and applications. *Journal of Computational Physics*, 91, 249-262. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00314-0](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00314-0)
 Kinoshita, D. (2015). Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier (Dissertação de Doutorado). *Universidade Federal de Uberlândia*, Uberlândia, MG, Brasil.
 Kopriva, D. A. (1987). A Practical Assessment of Spectral Accuracy for Hyperbolic Problems with Discontinuities. *J. Sci. Comput.*, 2, 249-262. <https://doi.org/10.1007/BF01061112>
 Lee, M. & Moser, R. D. (2015). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 5200$. *Journal of Fluid Mechanics*, 774, 395-415. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.268>
 Mariano, F. P (2011). Solução numérica das Equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias Fronteira Imersa e Pseudo-Espectral de Fourier (Dissertação de Doutorado). *Universidade Federal de Uberlândia*, Uberlândia, MG, Brasil.

Nascimento, A. A., Mariano, F. P., Padilla, E. L. M., & Silveira-Neto, A. (2020). Comparison of the convergence rates between Fourier pseudo-spectral and finite volume method using Taylor-Green vortex problem. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(491). <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02570-5>
 Peskin, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11, 479-517. <https://doi.org/10.1017/S0962492902000077>
 Tadmor, E. (2007). Filters, mollifiers and the computation of the Gibbs phenomenon. *Acta Numerica*, 16, 305-378. <https://doi.org/10.1017/S0962492906320016>
 Toro, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. New York: Springer.
 Uhlmann, M. (2005). An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *J. of Comput. Phys.*, 209, 448-476. <https://doi.org/10.1016/j.icp.2005.03.017>
 Villar, M. (2007). Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais (Dissertação em Doutorado). *Universidade Federal de Uberlândia*, Uberlândia, MG, Brasil.
 Villela, M. F. S. (2015). Modelagem matemática de escoamentos bifásicos usando a metodologia IMERSPEC combinada com os métodos VOF e Front-Tracking (Dissertação de Doutorado). *Universidade Federal de Uberlândia*, Uberlândia, MG, Brasil.
 Spalart, P. R. & Allmaras, S. R. (1994). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aerospaciale*, 1, 5-21.
 Villela, M. F. S., Villar, M. M., Serfaty, R., Mariano, F. P., & Silveira-Neto, A. (2017). Mathematical modeling and numerical simulation of two-phase flows using Fourier pseudospectral and front-tracking methods: The proposition of a new method. *Applied Mathematical Modelling*, 52, 241-254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.041>
 Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Illinois: Wolfram Media.