

# Estruturas multiplicativas: investigações e indicativos para o processo de ensino e aprendizagem no 5° ano do ensino fundamental

Mariana Lemes de O. Zaran  
*Universidade Cruzeiro do Sul | mariana\_lemes@ig.com.br*

Cintia Ap. Bento dos Santos  
*Universidade Cruzeiro do Sul | cintia.santos@cruzeirodosul.edu.br*

Edda Curi  
*Universidade Cruzeiro do Sul | edda.curi@cruzeirodosul.edu.br*

## RESUMO

Este artigo apresenta a síntese de uma dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática que se desenvolveu no âmbito do projeto Observatório da Educação e teve como objetivo inicial investigar os procedimentos revelados por alunos de 5º ano do Ensino Fundamental em relação à resolução de problemas de estruturas multiplicativas. A pesquisa foi desenvolvida adotando um método qualitativo com técnica de análise documental, em que para pesquisa de campo foram utilizados quatro instrumentos contendo problemas dos grupos pertencentes às estruturas multiplicativas segundo o quadro teórico dos campos conceituais. Os sujeitos de pesquisa são alunos de uma escola pública da cidade de São Paulo participantes do projeto. Os resultados colocaram em evidência um cenário delicado em relação às interpretações dadas pelos educandos diante de situações propostas, em que, em alguns grupos de problemas, eles demonstraram fragilidades quanto à apropriação do raciocínio multiplicativo ou dos algoritmos que permeiam as operações. As considerações apresentadas ao final dos estudos propiciam a reflexão sobre intervenções que podem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem no campo multiplicativo.

**Palavras-chave:** Educação matemática. Estruturas multiplicativas. Campos conceituais. Anos iniciais do Ensino Fundamental.

## **ABSTRACT**

This article presents a summary of a dissertation in Teaching Science and Mathematics which developed under the project Centre of Education and aimed to start investigating the procedures disclosed by students in 5th year of elementary school in relation to problem solving multiplicative structures. The research was conducted by adopting a qualitative method with documental analysis technique, in which to field research were used four instruments containing problems of groups belonging to the multiplicative structures according to the theoretical framework of conceptual fields. The research subjects were students of a public school in the city of São Paulo project participants. The results have highlighted a scenario delicate compared to the interpretations given by the students in situations proposed, in which, in some groups of problems, they demonstrated weaknesses regarding the appropriation of multiplicative reasoning or algorithms that underlie operations. The considerations presented at the end of the studies provide reflection on interventions that can contribute to the process of teaching and learning in the field multiplicative.

**Keywords:** Mathematics education. Multiplicative structures. Conceptual fields. Early years of elementary school.

## **Considerações iniciais**

O presente artigo tem por objetivo apresentar uma síntese da pesquisa desenvolvida por Zaran (2013), que teve como foco central observar os procedimentos de resolução demonstrados por alunos de 5º ano do Ensino Fundamental em relação a problemas de estruturas multiplicativas.

O cenário desta investigação se deu em um grupo de pesquisa colaborativo, que se desenvolve no âmbito do Projeto Observatório da Educação, em uma instituição privada da cidade de São Paulo e tem financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Este grupo é constituído por atores de segmentos distintos, sendo pesquisadores, professoras da rede pública de ensino de São Paulo que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, alunos do curso de Pedagogia, mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da instituição em que ele se desenvolve.

A pesquisa teve como objetivo central analisar como os alunos de 5º ano do Ensino Fundamental demonstram seus conhecimentos em relação às operações que compõem o campo multiplicativo, buscando desta forma evidenciar os indícios de compreensão por eles revelados na resolução de problemas desse campo conceitual. Os sujeitos de nossa pesquisa são alunos de uma das escolas que participam do projeto e os instrumentos foram desenvolvidos com os alunos pela professora que é docente das turmas e participa também do projeto.

Para responder a nossas questões de pesquisa, adotamos como aporte teórico para elaboração dos quatro instrumentos utilizados na pesquisa de campo os estudos de Gerárd Vergnaud (1983, 1991, 1994) sobre os Campos Conceituais no que se referem às estruturas multiplicativas. Este referencial teórico foi escolhido porque possibilita uma visão articulada em relação ao ensino das operações de multiplicação e divisão, e também devido à construção de conceitos em relação às operações. Esta abordagem teórica na época da elaboração dos instrumentos estava sendo trabalhada no grupo de pesquisa, para ampliação dos conceitos sobre operações.

Os instrumentos foram desenvolvidos no grupo de pesquisa conjuntamente com as professoras envolvidas no projeto.

Na sequência passamos a apresentar uma síntese em relação à teoria dos campos conceituais das estruturas multiplicativas para melhor esclarecer o leitor em relação à elaboração dos instrumentos de pesquisa.

## **O campo conceitual das estruturas multiplicativas**

A Teoria dos Campos Conceituais tem como autor o pesquisador e psicólogo francês Gerárd Vergnaud, reconhecido especialista na Didática da Matemática e diretor de pesquisas didáticas do Centro Nacional de Pesquisa Científica do Instituto Nacional de Investigação Pedagógica, em Paris. Esta teoria traz em seu contexto importantes estudos que contribuem para o ensino das operações matemáticas, em que são estudadas as estruturas aditivas e multiplicativas para a investigação das dificuldades que os alunos encontram em tais operações. Neste artigo situaremos o leitor apenas em relação ao campo multiplicativo, uma vez que nossas análises encontram-se nas operações pertencentes a este campo.

Vergnaud (1983, 1991, 1994) define Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas como um conjunto ao qual pertencem todas as situações que

podem ser analisadas como problemas de proporções simples e múltiplas, nas quais podem ser necessárias para sua resolução uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação de ambas.

Outra possível definição para esse campo, segundo Vergnaud (1983), é a de um conjunto de situações, cujo tratamento envolve uma ou várias divisões ou multiplicações, e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem a análise dessas situações matemáticas.

As Estruturas Multiplicativas possuem uma dimensão de conceitos muito mais ampla do que os conceitos que compõem as Estruturas Aditivas. Ao campo multiplicativo pertencem os conceitos de proporção, fração, semelhança entre figuras geométricas, razão, números racionais, função linear e o raciocínio combinatório, além de conceitos relacionados à Física. Faz-se necessário destacar que, dentre os conceitos mencionados anteriormente, realizamos nesse estudo uma abordagem apenas dos que são adequados para o trabalho nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois este é o foco de nossa pesquisa.

Vergnaud (1994) afirma que a análise das relações multiplicativas mostra vários tipos de multiplicação e várias classes de problemas, em que é importante distinguir tais classes de problemas e analisá-las cuidadosamente, ajudando deste modo a criança a reconhecer as diferentes estruturas de problemas, encontrando assim procedimentos apropriados para sua solução.

Para Vergnaud (1991) pertencem a este campo conceitual um conjunto de problemas que envolvem duas grandes categorias de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

Ao grupo isomorfismo de medidas pertencem problemas elementares, que estabelecem relações proporcionais simples, entre conjuntos de mesma cardinalidade (objetos do mundo real), preço constante (mercadorias e relações comerciais das mesmas), velocidade média constante (duração e distância), entre outras situações. Vergnaud (1994) descreve nesse grupo um grande número de situações de vida cotidiana e algorítmica, dentre as quais se encontram os problemas de multiplicação, divisão e regra de três simples.

Já ao grupo produto de medidas pertencem as situações que requerem a utilização do raciocínio combinatório, onde todos os elementos de um dos grupos são relacionados com todos os elementos do outro grupo. Para Vergnaud (1991), a essa categoria pertence uma relação ternária entre

três quantidades, em que uma consiste no produto das outras duas ao mesmo tempo.

Dessa forma os instrumentos de pesquisa foram, conforme mencionamos anteriormente, elaborados segundo estes dois grupos em que Vergnaud (1991, 1994) classifica as estruturas multiplicativas.

## Procedimentos metodológicos

Utilizamos para a investigação uma organização de trabalho baseada em um método qualitativo de pesquisa. De acordo com Goldenberg (2007), os métodos qualitativos de pesquisa permitem enfatizar as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado. Ainda segundo a autora, essa metodologia permite enxergar a questão sob várias perspectivas, possibilitando uma melhor compreensão do significado e uma descrição densa dos fenômenos estudados em relação aos seus contextos, e não à sua expressividade numérica.

Nossa escolha pelo método qualitativo de pesquisa justifica-se pelo fato de que os dados coletados serão inicialmente categorizados de acordo com os procedimentos de resolução utilizados pelos alunos, seguidos de uma análise qualitativa, em que aprofundaremos dentro de cada categoria nossa observação acerca das particularidades observadas nos protocolos no que se refere à resolução dos problemas que compõem os instrumentos utilizados em nosso estudo.

Em Flick (2009) também é possível visualizar algumas características consideradas pelo autor como aspectos essenciais da pesquisa qualitativa:

[...] consistem na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos. (FLICK, 2009, p.23)

Tais aspectos ajudam a reforçar nossa escolha pela metodologia qualitativa, na qual utilizaremos como técnica de investigação a análise documental, definida por Lüdke e André (1986) como uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos. Os autores afirmam que os documentos são uma fonte de onde podem ser retiradas evidências que possam fundamentar

as afirmações e declarações do pesquisador, defendendo também que a análise documental indica problemas que devem ser mais bem explorados por meio de outros métodos.

Nossa pesquisa apresenta uma técnica de análise documental porque mergulhamos nos protocolos acerca dos procedimentos e resultados desenvolvidos pelos alunos, sendo estes considerados documentos, que são definidos segundo Philips (1974) como “quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano” (PHILIPS, 1974, p. 187).

Como já mencionado anteriormente, para a realização de nossa coleta de dados, elaboramos conjuntamente ao grupo colaborativo quatro instrumentos de investigação, abordando diferentes grupos de problemas de acordo com a categorização de Gerárd Vergnaud, em relação ao campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Nossa investigação ocorreu a partir da análise de uma única escola participante do grupo de pesquisa já mencionado. Nossa análise constou com duas turmas de 5° ano do Ensino Fundamental, com um efetivo de participação de 57 alunos.

Para a realização de nossa análise, elaboramos juntamente ao grupo quatro instrumentos, e obtivemos um total de 206 protocolos, resultando em um total de 722 problemas a serem analisados.

A tabela 1 apresenta a estrutura dos instrumentos elaborados no grupo e realizados com os alunos.

**Tabela 1 - Estrutura dos instrumentos de pesquisa**

<b>Instrumento</b>	<b>Ideia</b>	<b>Classe de problemas</b>	<b>n° de problemas</b>
Instrumento 1	um a muitos	Isomorfismo de medidas	3
Instrumento 2	muitos a muitos	Isomorfismo de medidas	4
Instrumento 3	configuração retangular	Produto de medidas	3
Instrumento 4	combinatória	Produto de medidas	2

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras

O objetivo desses instrumentos foi o de verificar os procedimentos utilizados pelos alunos para solucionar problemas referentes às estruturas multiplicativas, analisando se eles identificam ou não a ideia envolvida e como demonstram suas resoluções em cada um deles.

## Sobre as análises realizadas

Após observarmos minuciosamente os protocolos dos alunos, elaboramos categorias de análise, e, com base nessas categorias, realizamos uma análise qualitativa, com a finalidade de abranger todas as situações e peculiaridades apresentadas nos procedimentos de resolução utilizados pelos alunos.

Apresentamos no quadro 1 as categorias elaboradas, seguidas de suas respectivas descrições.

**Quadro 1 - Categorias elaboradas**

1. Identificam a ideia da operação que resolve o problema e acertam os procedimentos.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos de alunos que identificam a ideia da operação que resolve o problema e os resolvem corretamente, seja por meio de um algoritmo ou de procedimentos não convencionais, chegando ao resultado esperado.
2. Identificam a ideia da operação que resolve o problema, mas não utilizam os procedimentos corretamente.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que identificam a ideia da operação que resolve o problema, mas erram nos procedimentos de cálculo, seja por meio de um algoritmo ou de procedimentos não convencionais, não chegando ao resultado esperado.
3. Identificam a operação que resolve o problema, mas apenas indicam a operação, e não a desenvolvem.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que identificam a operação que resolve o problema, representam qual é essa operação, mas não desenvolvem a operação representada.
4. Não identificam a operação e acertam os procedimentos/ algoritmos utilizados.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que não indicam a operação de multiplicação ou divisão, mas conseguem resolver o problema por meio de uma ideia aditiva, fazendo adições sucessivas, seja por meio de um algoritmo ou de um procedimento não convencional, acertando os procedimentos utilizados e chegando ao resultado esperado.
5. Não identificam a operação e erram os procedimentos.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que não identificam a operação que resolve o problema e ainda erram os procedimentos de resolução e não chegam ao resultado esperado.

**Quadro 1 - Categorias elaboradas** (continuação)

6. Não identificam a operação que resolve o problema, apenas indicam uma operação, e não a desenvolvem.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que não identificam a operação que resolve o problema, representam outra operação, mas não a desenvolvem.
7. Indicam apenas o resultado e acertam.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que não realizaram registro de representação do procedimento para a resolução, apenas indicando o resultado do problema. Nesse caso, observamos que os alunos conseguem chegar ao resultado correto.
8. Não resolvem.	Nesta categoria, encontram-se os protocolos dos alunos que não resolveram o problema, e nem mesmo levantaram hipóteses para resolução do mesmo, deixando o exercício “em branco”.

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras após primeira análise dos protocolos

A tabela 2 apresenta um panorama geral em relação à participação dos alunos em cada instrumento realizado, considerando as duas salas de 5º ano do ensino fundamental, que foram nosso objeto de pesquisa.

**Tabela 2 - Levantamento dos dados da pesquisa de campo**

	Efetivo de Pesquisa	Problemas Analisados
Instrumento 1	54 alunos	162
Instrumento 2	53 alunos	212
Instrumento 3	50 alunos	150
Instrumento 4	49 alunos	198
Total de Problemas Analisados	722	

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras com base nos dados coletados

Para o primeiro instrumento do grupo isomorfismo de medidas que constava de problemas de correspondência um a muitos, obtivemos o levantamento apresentado na tabela 3.



**Tabela 3 - Resultados do instrumento 1**

Categorias encontradas	Número de protocolos por problema		
	P1	P2	P3
Identificam a ideia da operação que resolve o problema e acertam os procedimentos	51	24	31
Identificam a ideia operação que resolve o problema, mas não utilizam os procedimentos corretamente	2	6	9
Identificam a operação que resolve o problema, mas apenas indicam a operação, e não a desenvolvem	-	2	1
Não identificam a operação e acertam os procedimentos/ algoritmos utilizados	1	6	-
Não identificam a operação e erram os procedimentos	-	16	13

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras com base nos dados coletados

Em relação ao instrumento 1, pudemos constatar para cada problema que mais da metade do efetivo de pesquisa identificam a ideia da operação no problema e acertam os procedimentos. Ficou evidente também durante as análises que o problema 2 representa aquele no qual os alunos têm a maior dificuldade para identificar a operação e por consequência não realizam corretamente os procedimentos de cálculo. A figura 1 representa um procedimento de resolução comum adotado nesta categoria pela maioria dos alunos.

**Figura 1 - Protocolo do A51 (problema 3 do instrumento 1)**

3. PARA UMA FESTA FORAM LEVADAS 72 GARRAFAS DE REFRIGERANTE. CONSIDERANDO QUE CADA CONVIDADO LEVOU 3 GARRAFAS, QUANTAS PESSOAS FORAM CONVIDADAS?

R. Foram convidados 23 pessoas.

Handwritten calculations showing a sequence of additions: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72.

Handwritten notes: "Quanto cabem?"

Fonte: arquivo das pesquisadoras

Observando o protocolo do aluno A51, podemos verificar que ele identifica que a divisão é a operação que resolve o problema, mas utiliza como recurso uma adição de parcelas iguais. Ao utilizar a adição de parcelas iguais repetidas vezes até chegar ao total de garrafas, se confunde ao adicionar “63 + 3”, e acaba “pulando” uma repetição, o que o faz chegar ao resultado 23 pessoas, ao invés de 24 pessoas.

Segundo os níveis descritos por Mendes e Delgado (2008), com base nos estudos de Treffers e Buys (2001) e Fosnot e Dolk (2001), os autores acreditam na existência de três níveis de aprendizagem na multiplicação: cálculo por contagem, cálculo estruturado e cálculo formal. Podemos observar, então, que esse aluno encontra-se em um nível de cálculo por contagem, em que o uso da multiplicação ainda não é explícito. O procedimento utilizado pelo aluno pode nos indicar que ele ainda não compreendeu a relação existente entre as operações de multiplicação e de adição de parcelas iguais, entre as operações de multiplicação e divisão, e também não se apropriou dos procedimentos que envolvem o algoritmo dessas operações. Percebemos que ele representa o algoritmo da divisão, provavelmente por conseguir identificar a ideia de divisão presente no problema, mas não desenvolve a operação, utilizando a adição repetida de parcelas para verificar quantos grupos de 3 cabem em 72.

Pudemos perceber que o problema 2 é o que mais apresenta dificuldades para os alunos na identificação da operação e erro quanto aos procedimentos de cálculo. Neste problema a maioria dos alunos apresenta como procedimento de resolução a operação de adição ou de subtração, conforme exemplificamos na figura 2.

**Figura 2 - Protocolo do A9 (problema 2 do instrumento 1)**

2. PARA UMA FESTA DE ANIVERSÁRIO, 31 PESSOAS LEVARAM 93 GARRAFAS DE REFRIGERANTE. SE TODOS LEVARAM A MESMA QUANTIDADE, QUANTAS GARRAFAS LEVOU CADA PESSOA?

93  
- 31  
-----  
62

cada pessoa

Fonte: arquivo das pesquisadoras

Fica evidente no protocolo deste aluno que ele trabalha no campo aditivo. Ele realiza subtração do número de garrafas e do número de pessoas, o que também indica que não consegue compreender a ideia da operação envolvida no problema, não chegando ao resultado esperado. Alguns alunos, nesta categoria, apresentam procedimento aditivo para resolver o problema. Estas resoluções também podem nos indicar que estes alunos entendem que precisam utilizar os dados numéricos do enunciado, mas não sabem como operar com eles diante da ideia apresentada.

Para o segundo instrumento do grupo isomorfismo de medidas que constava de problemas de correspondência muitos a muitos, obtivemos o levantamento apresentado na tabela 4.

**Tabela 4 - Resultados do instrumento 2**

Categorias encontradas	Número de protocolos por problema			
	P1	P2	P3	P4
Identificam a ideia da operação que resolve o problema e acertam os procedimentos	24	16	22	14
Identificam a ideia da operação que resolve o problema, mas não utilizam os procedimentos corretamente	-	8	2	8
Não identificam a operação e acertam os procedimentos/ algoritmos usados	1	-	-	-
Não identificam a operação e erram os procedimentos	25	27	27	27
Não identificam a operação que resolve o problema, apenas indicam uma operação, e não a desenvolvem	2	-	-	-
Não resolvem	1	2	2	4

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras com base nos dados coletados

De acordo com nosso levantamento, ficou evidente que grande parcela dos alunos está concentrada na categoria “não identificam a operação e erram os procedimentos”, fato este que se aplica aos quatro problemas deste instrumento. Como exemplo de interpretação e resolução dos alunos para esta situação, apresentamos os protocolos das figuras 3 e 4.

**Figura 3 - Protocolo do A2 (problema 2 do instrumento 2)**

2. SABE-SE QUE 15 MENINOS COLECIONAM CHAVEIROS E QUE JUNTOS TÊM 75 CHAVEIROS. CONSIDERANDO QUE TODOS TENHAM A MESMA QUANTIDADE, QUANTOS MENINOS COLECIONARIAM CHAVEIROS SE JUNTOS TIVESSEM 90 CHAVEIROS?

$$\begin{array}{r} 1575 \quad 90 \\ + 62114 \quad 10 \\ \hline 77916 \end{array}$$

Fonte: arquivo das pesquisadoras

No protocolo do aluno A2, podemos observar que ele não compreende as operações necessárias para solucionar o problema, e possivelmente ainda não tem estruturado os procedimentos que envolvem o raciocínio multiplicativo. Percebemos também que o aluno pode não ter compreendido o objetivo do enunciado do problema, em que acaba “unindo” os valores 15 e 75 (1575) para dividi-lo por 90.

Saiz (1996) alerta para o fato de que muitas vezes os alunos não atribuem significados ao algoritmo que aplicam, em que este aparece apenas como um trabalho sobre os números, independentemente dos dados e da situação enunciada, não mobilizando seus esquemas intelectuais para solucionar os problemas.

**Figura 4 - Protocolo do A2 (problema 3 do instrumento 2)**

3. UM GRUPO DE 16 MENINOS TEM AO TODO 64 BOLINHAS DE GUDE. CONSIDERANDO QUE TODOS TÊM A MESMA QUANTIDADE, QUANTAS BOLINHAS HAVERIA SE ESTIVESSEM NESTE GRUPO?

$$\begin{array}{r} 16 \quad 64 \quad 112 \\ \hline = 701 \quad 26 \end{array}$$

Fonte: arquivo das pesquisadoras

Podemos observar novamente, no protocolo do aluno A2, que ele não identificou a ideia da operação solicitada no problema, errando os procedimentos de resolução da operação. Possivelmente o aluno entende o

problema como um meio de trabalhar as operações aprendidas em sala de aula, o que pode ser fruto das aulas em que o professor evidencia os números e o aluno acaba por acreditar que deve utilizá-los de qualquer forma. Com isso, o trabalho acaba no campo numérico, sem levar em conta o significado envolvido no contexto do problema.

Ambos os protocolos aqui apresentados nos transparecem a ideia de que o aluno conserva uma tendência em acreditar que deve utilizar todos os dados apresentados em um problema, sendo esta uma preocupação maior do que atribuir significado aos procedimentos necessários.

Para o terceiro instrumento do grupo produtos de medidas que constava de problemas com a ideia de configuração retangular, obtivemos o levantamento apresentado na tabela 5.

**Tabela 5 - Resultados do instrumento 3**

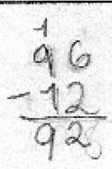
Categorias encontradas	Número de protocolos por problema		
	P1	P2	P3
Identificam a ideia da operação que resolve o problema e acertam os procedimentos	20	39	31
Identificam a ideia da operação que resolve o problema, mas não utilizam os procedimentos corretamente	7	5	-
Indicam apenas o resultado e acertam	-	3	-
Não identificam a operação e acertam os procedimentos/algoritmos usados	8	-	-
Não identificam a operação e erram os procedimentos	15	3	18
Não identificam a operação que resolve o problema, apenas indicam uma operação, e não a desenvolvem	-	-	-
Não resolvem	-	-	1

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras com base nos dados coletados

Verificamos com base em nosso levantamento que a maioria dos alunos identificam a ideia da operação e também acertam os procedimentos. Porém, observamos como fragilidades ainda que uma parcela de alunos inseridos na categoria “não identificam a operação e erram os procedimentos”, especialmente para os problemas 1 e 3. As figuras 5 e 6 apresentam exemplos de procedimentos adotados pela maioria dos alunos nesta categoria.

**Figura 5 - Protocolo do A2 (problema 1 do instrumento 3)**

1. EM UMA CAIXA COM FORMATO RETANGULAR CABEM 96 MAÇÃS. SABENDO QUE AS MAÇÃS ESTÃO ORGANIZADAS EM FILEIRAS E QUE EM CADA FILEIRA CABEM 12 MAÇÃS, QUANTAS FILEIRAS DE MAÇÃS HÁ NESSA CAIXA?


$$\begin{array}{r} 96 \\ -12 \\ \hline 84 \end{array}$$

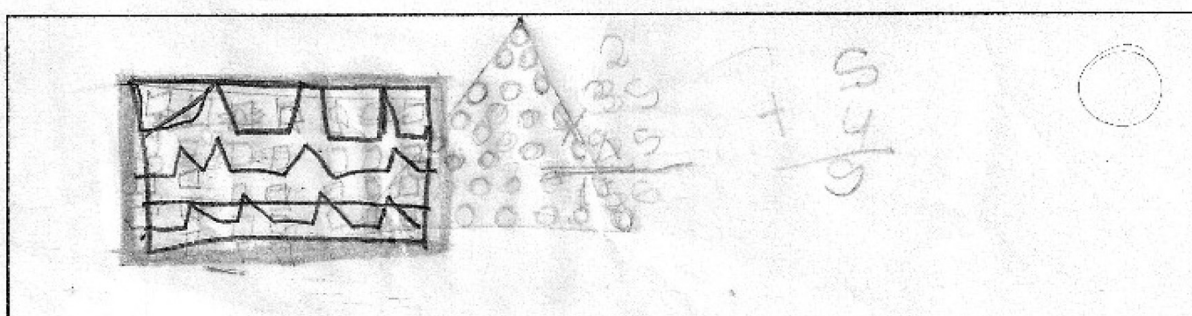
Fonte: arquivo das pesquisadoras

O problema 1 foi resolvido pela maioria dos alunos adotando a operação de subtração ou adição. Mais uma vez, verificamos que eles não identificam a ideia envolvida, apenas sabem que precisam utilizar todos os dados numéricos contidos no problema se utilizando do campo aditivo, sem atribuir significado (e sem reconhecer) às operações de multiplicação e divisão.

**Figura 6 - Protocolo do A13 (problema 3 do instrumento 3)**

3. NUMA FÁBRICA DE CHOCOLATES, OS BOMBONS SÃO ORGANIZADOS EM DIFERENTES TIPOS DE CAIXAS RETANGULARES. CADA CAIXA É ORGANIZADA EM FILEIRAS E COLUNAS. TODAS AS FILEIRAS TÊM A MESMA QUANTIDADE DE BOMBONS E TODAS AS COLUNAS TAMBÉM.

ORGANIZE ESSES BOMBONS EM DIFERENTES TIPOS DE CAIXAS.



em cada caixa tem 5

Fonte: arquivo das pesquisadoras

Em relação a este problema, percebemos que alguns alunos tentam partir da representação figural, mas não parecem conhecer o significado de objeto retangular, de fileiras e colunas, conforme apresentado na figura 6.

Para o quarto e último instrumento, também pertencente ao grupo produto de medidas, que constava de problemas com a ideia de combinação, obtivemos o levantamento apresentado na tabela 6.

**Tabela 6 - Resultados do instrumento 4**

Categorias encontradas	Número de protocolos por problema	
	P1	P2
Identificam a ideia da operação que resolve o problema e acertam os procedimentos	12	21
Indicam apenas o resultado e acertam	5	1
Não identificam a operação e acertam os procedimentos/algoritmos usados	20	10
Não identificam a operação e erram os procedimentos	11	16
Não resolvem	1	1

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras com base nos dados coletados

Fica evidente para este grupo de problemas que, para o problema 1, a maioria dos alunos tem dificuldade em identificar a ideia apresentada no problema, porém acertam os procedimentos. Já para o problema 2, uma parcela significativa de alunos não identificam a operação e erram os procedimentos. Observamos também que no problema 2 uma parcela significativa de alunos identificam a ideia da operação envolvida no problema e realizam os procedimentos de cálculo adequadamente. Nas figuras 7 e 8, apresentamos exemplos dos procedimentos mais utilizados pelos alunos para estas duas categorias.

**Figura 7 - Protocolo do A9 (problema 1 do instrumento 4)**

1. UMA LANCHONETE OFERECE AS SEGUINTE OPÇÕES DE SUCOS E LANCHES:

SUCOS	LANCHES
LARANJA -	MISTO QUENTE -
UVA -	X-SALADA -
ABACAXI	BAURU
MORANGO	

QUANTAS DIFERENTES COMBINAÇÕES DE SUCOS E LANCHES SÃO POSSÍVEIS?

*12 com 4 opções*

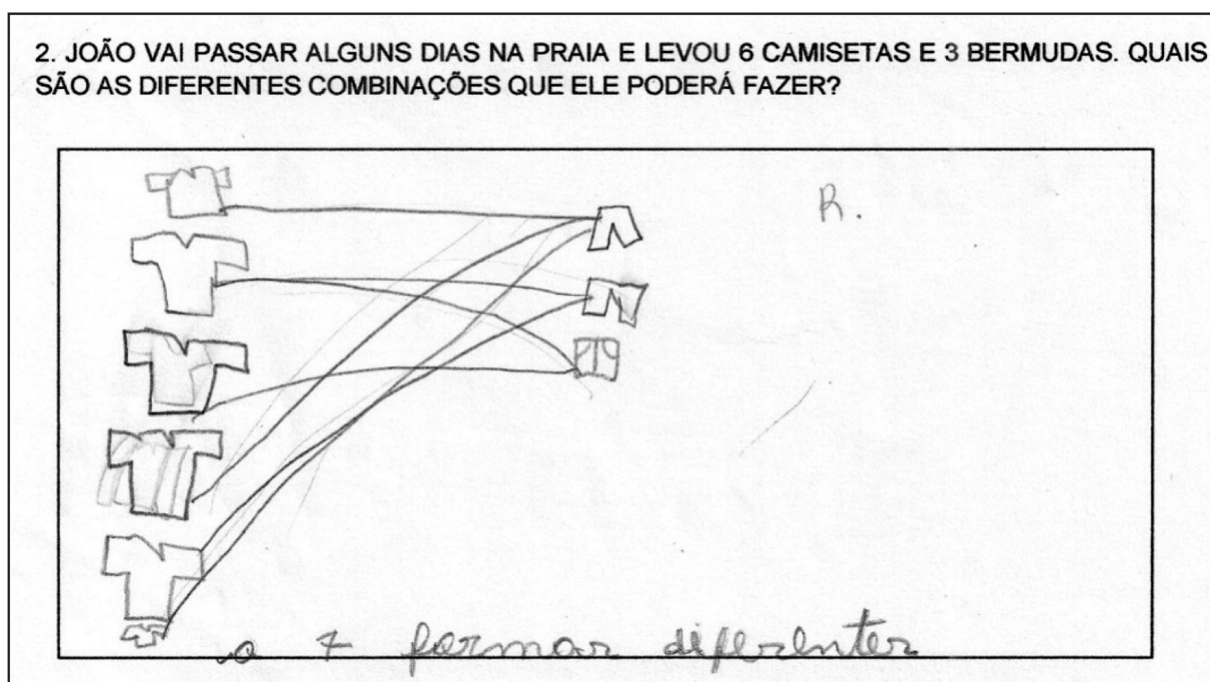
*Laranja misto quente*  
 $4 \times 3 = 12$

Fonte: arquivo das pesquisadoras

Este aluno realiza procedimentos de distribuição um a um, por meio de um esquema, descrevendo todas as possibilidades de combinações, conseguindo encontrar a solução a partir da contagem dessas representações. Analisando este tipo de procedimento podemos afirmar que os alunos ainda não conseguem identificar a operação necessária para solucionar o problema, o que pode indicar que provavelmente ainda não se estabeleceu a relação existente entre o raciocínio multiplicativo e a ideia de combinatoria. No entanto, ele usa procedimentos adequados, faltando apenas a apresentação da sentença matemática que permite resolver esse problema.

A figura 8 apresenta um protocolo que exemplifica a categoria “não identificam a operação e acertam os procedimentos/algoritmos usados” em se tratando do primeiro problema.

**Figura 8** - Protocolo do A22 (problema 2 do instrumento 4)



Fonte: arquivo da pesquisadora

Observando o protocolo do aluno A22, acreditamos que ele ainda não se utiliza de todas as combinações possíveis, mas realiza o procedimento de distribuição um a um, errando o resultado. Sabemos que é importante considerar os procedimentos próprios de resolução das crianças e certamente em uma situação como esta cabe que o professor verifique a dificuldade encontrada pelo aluno, o ajude a estruturar sua resolução com base em seus próprios procedimentos para que futuramente (em séries mais



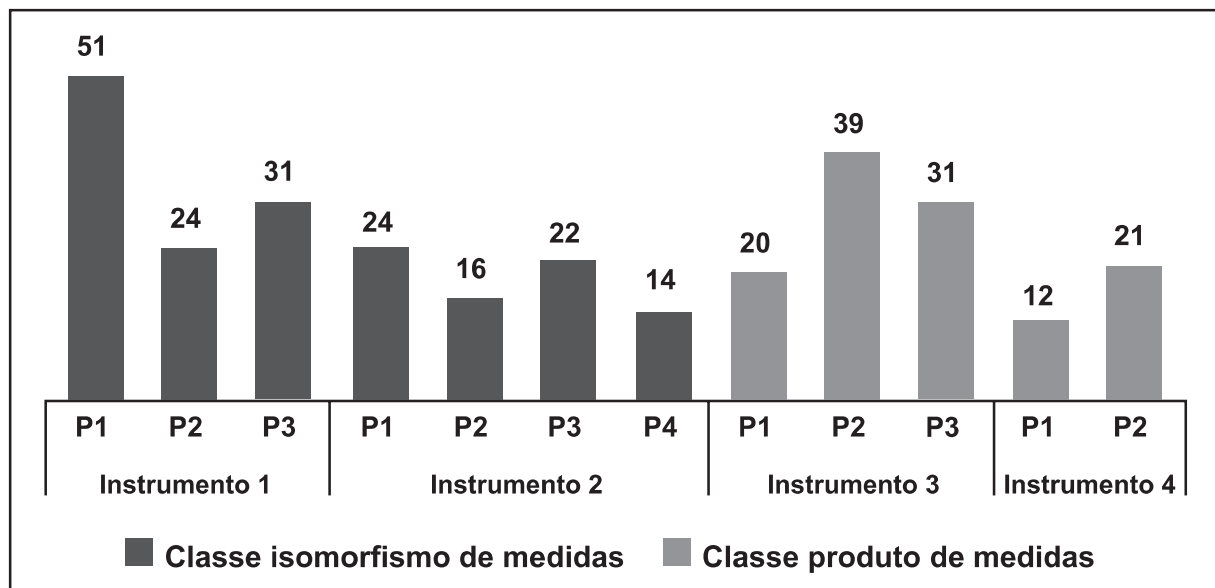
avançadas de escolarização) este aluno possa estabelecer conexões entre os conhecimentos que já tenha e uma matemática mais formal, desenvolvendo assim sua autonomia em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

## Algumas considerações sobre os resultados encontrados e indicativos para o trabalho com o campo multiplicativo

A partir das reflexões realizadas até o momento, pudemos constatar questões relativas às interpretações demonstradas por alunos de 5° ano ao resolverem problemas do Campo Multiplicativo, bem como revelam sua compreensão em relação às operações que envolvem este campo.

O gráfico 1 nos dá um panorama geral, sintetizando os dados, em relação aos problemas que os alunos melhor compreendem e utilizam adequadamente os procedimentos de cálculo.

**Gráfico 1** - Quantidade de alunos por problema que compreendem a ideia da operação e acertam os procedimentos de cálculo



Fonte: elaborada pelas pesquisadoras com base nos dados coletados

De acordo com os dados apresentados no gráfico, fica evidente que os alunos se saem melhor em problemas pertencentes à classe isomorfismo de medidas (aqueles que contemplam a ideia “um a muitos” - instrumento 1) e na classe produtos de medidas têm um melhor desempenho naqueles que apresentam a ideia de “configuração retangular” (instrumento 3).

Esta constatação nos leva a pensar que se faz necessário em sala de aula um trabalho que dê maior atenção aos problemas da classe isomorfismo de medidas para aqueles que apresentam a ideia “muitos a muitos” e na classe de problemas produtos de medidas àqueles que apresentam a ideia de “combinatória”, considerando ainda que nos problemas referentes a esta última ideia os alunos tiveram um menor desempenho.

Nos problemas que contemplavam a ideia muitos a muitos, ficaram evidentes em nossas análises as diversas interpretações equivocadas, em que a maior parte dos alunos utilizou operações e procedimentos ineficazes para a resolução dos problemas, demonstrando não compreender o significado dos mesmos.

Quanto aos problemas que envolviam a ideia de combinatória, pudemos encontrar interpretações distintas, em que os alunos muitas vezes utilizaram procedimentos e esquemas pessoais para a resolução dos problemas.

Essas observações nos dão indícios de que a interpretação dada pelos alunos a estes problemas por muitas vezes não revelou a percepção da relação entre as operações, e por algumas vezes demonstraram realizar um trabalho puramente numérico, sem levar em conta o significado do contexto, o que pode ter dificultado a compreensão de algumas situações apresentadas.

Sobre a compreensão revelada por alunos em relação às estruturas multiplicativas, percebemos em nossos estudos que grande parte dos alunos demonstrou compreender a ideia da operação que norteia cada uma dessas operações. Porém, também ficou evidente que, além de compreender a ideia norteadora de cada operação, é necessário que os alunos saibam identificá-las diante das mais variadas situações. Estas constatações nos fazem levantar a hipótese que não basta alunos aprenderem as operações (no caso multiplicação e divisão), mas é fundamental que alunos aprendam o significado que cada uma destas operações pode admitir quando apresentadas em contextos diversos. Este nos parece um passo para aprendizagem e para que alunos tenham autonomia em seus estudos.

Por outro lado, pudemos perceber também casos em que um mesmo aluno apresentou o mesmo tipo de raciocínio nos diferentes problemas. Isso é possível perceber claramente em nosso inventário de dados<sup>1</sup>, o que

---

<sup>1</sup> O inventário de dados pode ser observado na íntegra de nossa pesquisa, em Zaran (2013).

nos permite acompanhar melhor o desempenho do aluno. Esses tipos de casos demonstram uma regularidade de pensamento, em que os alunos que utilizam os mesmos procedimentos podem também contribuir para a validação de nossas observações e hipóteses levantadas por meio das análises dos protocolos.

Pudemos perceber também que em certos momentos alunos elaboram algoritmos, mas não conseguem resolvê-los. Isso nos indica que eles acabam utilizando-se deste procedimento, porque é aquele formalizado em sala de aula, porém não encontram significado no que estão desenvolvendo. Diante dessa situação, é possível levantarmos a hipótese de que o algoritmo formal é apresentado ao aluno, sem que seja estabelecida uma relação de compreensão dos procedimentos envolvidos em suas etapas de resolução. Com isso, o aluno não atribui significado aos procedimentos realizados, muitas vezes operando “mecanicamente”, como algo que lhe parece necessário.

Nossa investigação colocou em evidência um cenário delicado em relação às interpretações dadas aos alunos diante de situações que requerem a utilização de procedimentos multiplicativos, interpretações estas que muitas vezes podem desencadear em dificuldades já abordadas em estudos para a resolução de situações que envolvem estas operações.

Diante dessas observações, nossa preocupação torna-se relevante a partir do momento em que evidenciamos que esses alunos encontram-se no período de transição para os anos finais do Ensino Fundamental, e que a não apropriação do raciocínio multiplicativo, seja por meio de procedimentos informais ou algoritmos, pode resultar em futuras dificuldades de aprendizagem em relação a outros conteúdos matemáticos que irão requerer sua utilização. Sabemos que no 6º ano essas operações serão novamente abordadas nas aulas, porém seria adequado que estes alunos já se apropriassem dos conceitos, ideias, representações e relações existentes nas operações de multiplicação e divisão, para que essas dificuldades não se estendam e se agravem pelos demais anos de escolarização, em que os procedimentos pessoais utilizados poderão se tornar ineficazes diante de problemas que contenham um maior nível de complexidade. Percebemos por nossa prática docente que as dificuldades são evidenciadas com mais frequência entre a transição dessa fase entre o 5º e o 6º ano do Ensino Fundamental, transição esta que por muitas vezes pode propiciar uma

“lacuna” entre o que o aluno já sabe e o que virá a aprender, pois em muitos casos não há uma interação entre o trabalho realizado pelo professor polivalente dos anos iniciais e o trabalho a ser realizado pelo professor especialista do 6° ano.

Ao realizarmos uma observação geral em relação ao desempenho dos alunos quanto aos instrumentos utilizados em nossa pesquisa, pudemos constatar que existem dificuldades quanto à compreensão do raciocínio multiplicativo, a maior parte delas nos problemas que contemplam a operação de divisão ou que requerem a utilização do pensamento proporcional. Quanto aos procedimentos que envolvem a operação de multiplicação, apesar de encontrarmos um número significativo de êxitos, podemos destacar que esses êxitos por muitas vezes não foram obtidos por meio da utilização explícita do raciocínio multiplicativo.

Um grande facilitador em relação ao ensino destas operações se refere a um trabalho que possa ser realizado de forma articulada entre as mesmas, para que possam ser estabelecidas as devidas relações entre ambas, o que também poderá contribuir para a diminuição das dificuldades quanto aos procedimentos da divisão, de modo que, a partir do momento em que o aluno perceba sua relação com a multiplicação, tais procedimentos possam ser compreendidos mais claramente.

Consideramos importante a utilização de procedimentos próprios e intermediários para a resolução dos problemas. Por meio destes, o aluno poderá estabelecer conhecimentos que poderão facilitar a aprendizagem dos procedimentos formais que envolvem as operações de multiplicação e divisão. É necessário dar espaço ao aluno para que demonstre seus esquemas pessoais para o desenvolvimento da operação, e estes devem ser aproveitados pelo professor para estabelecer a relação entre esses esquemas e os algoritmos comumente utilizados, não como algo pré-estabelecido e determinado, mas como uma alternativa para facilitar e auxiliar o desenvolvimento da operação, em que o aluno poderá perceber as etapas envolvidas nesses procedimentos e evoluir em suas aprendizagens.

Esperamos que nossa investigação possa trazer reais contribuições ao cenário da Educação Matemática, no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem dos conceitos que norteiam o campo multiplicativo; ultrapassando o campo de uma simples constatação, em que a sala de aula não seja utilizada apenas para coletar dados, mas sim que os indícios e

sugestões apontados venham a servir como um possível caminho à prática docente, em que, por meio de um trabalho gradual, possam ser ampliados os olhares investigativos em sala de aula, na busca por oportunidades de intervenções que venham a auxiliar no processo de aprendizagem do aluno.

## Referências

- FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- FOSNOT, C.; DOLK, M. **Young mathematicians at work: constructing multiplication and division**. Portsmouth, N. H.: Heineman, 2001.
- GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais**. Rio de Janeiro: Record, 2007.
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- MENDES, M. F. C.; DELGADO, C. R. S. C. A. A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido do número. In: BROCADO, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. **O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática**. Lisboa: Escolar Editora, 2008, p. 159-182.
- PHILLIPS, B. S. **Pesquisa social: estratégias e táticas**. Rio de Janeiro: Livraria Agir Editora, 1974.
- SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (orgs). **Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p.156-185.
- TREFFERS, A.; BUYS, K. Grade 2 (and 3) - calculation up to 100. In: HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.). **Children learn mathematics. Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO)**, 2001. p. 61-88.
- VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc. 1983. p. 127-174.
- VERGNAUD, G. **El Niño, las Matemáticas y la Realidad**. México: Editorial Tril-las, 1991.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N. Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

ZARAN, M. L. O. **Uma análise dos procedimentos de resolução de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental em relação a problemas de Estruturas Multiplicativas**. 2012. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.