

Implementação de simulador bifásico baseado na equação de Brinkman para reservatórios carstificados

Implementation of a two-phase simulator based on the Brinkman equation for karstified reservoirs

Daniel Metanias Carvalho Hallack^{1,2*}, José Sérgio de Araújo Cavalcante Filho², Paulo Couto¹

¹Depto. de Engenharia Civil, COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

²Petrobras S/A, Rio de Janeiro, RJ

* Autor para correspondência, E-mail: dhallack@gmail.com

Article history

Received: 21 February 2018

Accepted: 29 May 2018

Available online: 19 July 2018

Resumo: Apresenta-se, neste artigo, um estudo sobre a dinâmica do escoamento de fluidos em meios altamente porosos e com baixos números de Reynolds. A validade da equação de Darcy é questionável para estes meios, enquanto a equação de Brinkman, ainda pouco utilizada para escoamento de hidrocarbonetos, é proposta como uma alternativa. Neste trabalho se desenvolve um simulador de fluxo numérico, utilizando a linguagem Python, capaz de representar o escoamento monofásico (óleo) e bifásico (água - óleo) seguindo os dois equacionamentos distintamente. Para uma variedade de casos representativos os resultados destes equacionamentos são comparados. A aplicação deste estudo é para reservatórios de petróleo carstificados. Observa-se pequena ou nenhuma influência do termo viscoso de Brinkman em meios porosos convencionais até que altíssimas permeabilidades sejam atribuídas ao meio de alta porosidade, quando pode-se notar diferenças significativas nos campos de velocidades do escoamento e no avanço da frente de água.

Palavras chave: Reservatórios Carstificados, Equação de Brinkman, Bifásico.

Abstract: *This paper presents a study on the dynamics of fluid flow in highly porous media with low Reynolds numbers. The validity of the Darcy equation is questionable for these media, while the Brinkman equation, which is still little used for hydrocarbon flow, is proposed as an alternative. In this work we developed a numerical flow simulator, capable of representing single-phase (oil) and two-phase flow (water-oil) following both equations. For a variety of representative cases the results of these equations are compared. The application of this study is for karstified petroleum reservoirs. No influence of the Brinkman viscous term on conventional porous media is observed, but where high permeabilities values are attributed to the medium of high porosity significant differences can be observed in flow velocities and in water front advance.*

Keywords: *Karstified reservoir, Brinkman equation, two-phase flow.*

1. Introdução

O desenvolvimento computacional vivenciado nas últimas décadas vem permitindo a simulação de fluxo em reservatórios em escalas cada vez mais finas e a modelagem geológica de reservatórios representar as heterogeneidades de formas cada vez mais detalhadas, o que permite vislumbrar a possibilidade de refinar o modelo de simulação cada vez mais próximo da escala das heterogeneidades mais significativas. Porém para determinados reservatórios carbonáticos que possuem regiões altamente carstificadas e vulgares, surge o questionamento se a modelagem física do fluxo se manteria correta através da equação de Darcy

quando o refino for suficiente para representar com acurácia estas zonas, uma vez que a tendência ao se aproximar de um fluxo livre seria o escoamento passar a ser regido pelas equações de Navier-Stokes.

Devido a sua natureza química, nos reservatórios carbonáticos é comum ocorrer dissolução química. Este é um processo diagenético pelo qual minerais são dissolvidos e removidos, modificando o espaço poroso das rochas reservatórios. O fenômeno pode ocorrer em pequenas e médias proporções gerando os chamados vugs, os quais possuem tamanhos de ordens de grandeza superiores aos espaços intergranulares convencionais. As dissoluções também podem ocorrer de forma massiva gerando extensas redes de cavernas. Este fenômeno de dissolução, capaz de alterar significativamente a geometria do meio poroso desde a escala de microns até de quilômetros, é conhecido como formação de carstes ou carstificação do meio poroso (Ahr *et al.*, 2005). Reservatórios carbonáticos carstificados são facilmente encontrados em diversas partes do mundo, como na China (Peng *et al.*, 2009), Oriente Médio (Dabbouk *et al.*, 2002), Rússia (Khvatova *et al.*, 2012) e México (Casar-González *et al.*, 2000). Recentemente foram também identificadas formações altamente carstificadas em reservatórios no polo Pré-Sal da Bacia de Santos Brasileira. Estas descontinuidades do meio poroso, frequentemente de maior escala, podem alterar significativamente o fluxo no meio poroso e portanto devem ser consideradas corretamente no modelo de fluxo. Sobretudo quando a discretização do *grid* de simulação se aproxima do tamanho destas descontinuidades. A difícil modelagem deste tipo de reservatório, especialmente quando possui extensas regiões carstificadas, gerou um novo campo de interesse para a engenharia de reservatórios de petróleo com diversos trabalhos publicados recentemente nesta linha (Krotkiewski *et al.*, 2011, Arbogast e Lehr, 2006, Popov *et al.*, 2009, He *et al.*, 2015, Pal, 2012, Kanschat *et al.*, 2017).

Na simulação de fluxo convencional, a lei de Darcy é utilizada para modelar o fluxo de fluidos em todo o meio poroso, e para as regiões vugulares e carstificadas são estimadas altas porosidades e permeabilidades. Embora esta solução atenda frequentemente aos objetivos, em casos extremos o fluxo darcyano nestas regiões pode gerar questionamentos, pois para estas configurações a velocidade deixa de possuir uma relação linear com o gradiente de pressão e a grandeza permeabilidade perde então o seu sentido físico clássico. Muitos métodos têm sido desenvolvidos abordando este problema de acoplamento, dentre os mais comuns estão os modelos de múltiplo contínuo (dupla/tripla porosidade) (Wu *et al.*, 2004, 2007, Camacho-Velazquez *et al.*, 2002), fraturas discretas (*Embedded Discrete Fracture Models*) ou meio contínuo equivalente, que todavia se baseiam ainda na lei de Darcy. Os modelos mais indicados na literatura para este tipo de problema são os que tentam acoplar o fluxo livre dentro das cavidades com o fluxo em meio poroso no restante do reservatório. Estes modelos são caracterizados por uma mudança na equação que rege o escoamento em cada domínio. O domínio majoritariamente poroso é governado pela equação de Darcy e o domínio majoritariamente de fluxo livre é governado pela equação de Stokes (Peng *et al.*, 2007, Arbogast e Lehr, 2006, Yao *et al.*, 2010).

Uma forma mais prática e que tem sido utilizada mais recentemente para acoplar estes modelos tem sido a equação de Brinkman. Os modelos baseados na equação de Brinkman são capazes de representar corretamente os mecanismos físicos desenvolvidos tanto nestas regiões carstificadas, quanto no domínio poroso convencional (Popov *et al.*, 2009, He *et al.*, 2015, Pal, 2012, Krotkiewski *et al.*, 2011, Golfier *et al.*, 2015, Kanschat *et al.*, 2017, Srinivasan e Rajagopal, 2016).

O objetivo deste trabalho é comparar o equacionamento de Darcy ao de Brinkman para escoamentos monofásicos e bifásicos em meios de alta porosidade e altas permeabilidades. Para atingir tal objetivo foi desenvolvido um simulador capaz de representar as duas formulações. Quanto ao escoamento bifásico (água - óleo), embora seja crucial para o entendimento do escoamento em reservatórios carstificados submetidos a injeção de água, ainda se tem pouquíssimos trabalhos aplicando a equação de Brinkman ou comparando os dois equacionamentos (Coclite *et al.*, 2014).

2. Equacionamento

As equações que governam o escoamento se baseiam em dois princípios básicos de conservação: a de massa e a de momento linear, além de equações constitutivas que correlacionam os parâmetros de acordo com as características do fluido.

2.1. Conservação de massa

A partir da lei de conservação da massa aplicada a um volume de controle, pode-se desenvolver o seguinte equacionamento diferencial para um meio contínuo qualquer na presença de termo fonte (Batchelor, 2000):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_f) = q_m, \quad (1)$$

onde:

ρ é a densidade do fluido;

\mathbf{u}_f é o vetor de velocidade do fluido;

t é o tempo;

q_m é o termo fonte mássico por unidade de volume.

A equação diferencial Eq. (1) é uma das equações fundamentais da mecânica dos fluidos, e é classicamente chamada de **equação da continuidade**. Para um meio poroso qualquer a equação de conservação de massa Eq. (1) deve ser adaptada e pode ser expressa na forma da Eq. (2) (Ertekin *et al.*, 2001):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_a) = q_m, \quad (2)$$

onde $\mathbf{u}_a = \phi \cdot \mathbf{u}_f$ é a velocidade de Darcy ou velocidade aparente do fluxo, que é a velocidade real do fluido nos poros multiplicado pela porosidade, representando a velocidade média no meio poroso.

2.2. Conservação do momento linear

A lei de conservação do momento linear é baseada na segunda lei de Newton e portanto estabelece que a taxa de variação do momento de qualquer porção do fluido deve ser igual a soma de todas as forças atuando nesta mesma porção do fluido.

Aplicada a um volume de controle infinitesimal e utilizando-se o teorema de transporte de Reynolds, obtém-se a equação de momento de Cauchy Eq. (3) que é válida para qualquer meio contínuo, também conhecida como **equação de movimento** (Batchelor, 2000).

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \quad (3)$$

O tensor de tensões \mathbf{T} pode ser visto como a soma de dois tensores, uma parte isotrópica $-p\mathbf{1}$, representando as tensões normais, e uma parte não isotrópica \mathbf{D} , representando as tensões tangenciais e também desvios nos elementos da diagonal, conforme:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{D}. \quad (4)$$

O tensor não isotrópico \mathbf{D} é chamado de tensor de tensões deviatório ou também de tensor de tensões viscosas, que representa as tensões que distorcem o elemento de fluido e possui a propriedade de ser inteiramente devido a existência de movimento no fluido. Dando origem ao fenômeno de fricção interna do fluido. Para um fluido classificado como newtoniano e incompressível a equação de tensões viscosas se torna simplesmente:

$$\mathbf{D} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (5)$$

Resultando-se nas conhecidas equações de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (6)$$

Nota-se que a equação Eq. (6) é vetorial portanto corresponde a um número de equações igual ao número de dimensões do problema. Em conjunto com a equação de balanço de massa Eq. (1) obtém-se um sistema de 4 equações e 4 variáveis para um sistema 3D, com variáveis primárias: $\{p, u_x, u_y, u_z\}$.

A equação de conservação do momento linear pode ser simplificada ou mesma substituída em diversas situações dependendo do escoamento em estudo, os exemplos aqui tratados serão:

1. Equação de Stokes
2. Equação de Darcy
3. Equação de Brinkman

2.2.1. Equação de Stokes

Adimensionalizando a equação de Navier-Stokes e desconsiderando efeitos gravitacionais ela pode ser reescrita como:

$$Re \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* \right) = -\nabla p^* + \nabla^2 \mathbf{u}^*, \quad (7)$$

onde $Re = \frac{\rho U_c L_c}{\mu}$; $p^* = \frac{p L_c}{\mu U_c}$; $\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_c}$; $x^* = \frac{x}{L_c}$; $t^* = \frac{U_c t}{L_c}$.

Para escoamentos viscosos muito lentos o número de Reynolds torna-se muito baixo, $Re < 1$, significando que as forças inercias são desprezíveis em relação as forças viscosas. Quando as forças inercias de um escoamento podem ser negligenciadas, o lado esquerdo da equação Eq. (7) pode ser desconsiderado e a equação de Navier-Stokes pode ser simplificada para:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

Nestes casos o balanço dominante de momento ocorre entre as forças viscosas e as forças de pressão. A equação Eq. (8) é denominada como equação de Stokes, mas também é comumente chamada de “*creeping flow equation*”.

A equação de Stokes é aplicável para o caso do escoamento livre dentro das cavidades dos reservatórios carstificados, pois possui baixos valores de Re , uma vez que o fluido é viscoso e o fluxo ocorre em baixas velocidades.

Para o escoamento em um meio poroso de forma geral é muito difícil a aplicação da equação de Stokes, pois é necessário o conhecimento detalhado da geometria dos poros. E ainda que conhecida, a complexidade da geometria torna o problema impraticável computacionalmente para escalas maiores que centímetros. Este tipo de modelagem é chamado de modelagem em escala de poro (Soulaïne, 2015).

2.2.2. Equação de Darcy

A representação da física do meio poroso que permite tratar de grandes domínios utiliza o conceito de meio contínuo, ou seja, assume-se que cada ponto do domínio contém ambos rocha e poro, e é representado através de propriedades médias. Desta forma toda a informação proveniente da interação entre rocha e fluido deve estar implícita nas propriedades efetivas do meio (Soulaïne, 2015).

A lei de Darcy foi obtida de forma experimental (Darcy, 1856) para descrever o escoamento de água através de leitos de areia. Darcy constatou uma relação linear entre a velocidade aparente do fluxo e o gradiente de potencial do escoamento imposto ao meio poroso, e a constante de proporcionalidade foi separada em duas constantes, uma representando as propriedades da rocha (K) e outra do fluido (μ). Quando desconsiderada as forças gravitacionais se torna simplesmente:

$$\mathbf{u}_a = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p, \quad (9)$$

onde

\mathbf{K} é o tensor de permeabilidades absolutas do meio poroso;

\mathbf{u}_a é a velocidade aparente do fluxo;

A velocidade aparente \mathbf{u}_a , representa a velocidade média do fluxo passando por um seção do meio poroso. Toda vez que se tratar de meio poroso a variável velocidade será considerada como a velocidade aparente do meio.

A lei de Darcy Eq. (9) é válida para um meio equivalente poroso contínuo, onde a escala do problema é muito maior que a escala dos poros. A equação tem uma longa história de uso na área de mecânica dos

solos e é aplicável em uma grande variedade de meios porosos. Para a modelagem de escoamentos em reservatórios de petróleo em escala de campo, a lei de Darcy em conjunto com a equação de conservação da massa é normalmente utilizada.

2.2.3. Equação de Brinkman

Alguns casos específicos de meios porosos são caracterizados por possuírem muito baixo volume de sólidos, e portanto altas porosidades. Exemplos típicos são lãs minerais, espumas industriais e materiais fibrosos de forma geral que podem chegar a porosidades superiores a 99% (Nield e Kuznetsov, 2013).

Brinkman (1949a,b) modelou a força exercida por um escoamento em um enxame de partículas fixas e comparou com dados experimentais, similares ao experimento de Darcy, no entanto as partículas sólidas não estão em contato direto configurando uma proporção de espaços vazios bem superiores. Para isto Brinkman propõe um modelo de fluxo representado pela equação Eq. (10) que modifica a equação de Darcy Eq. (9) inserindo o termo de tensões viscosas da equação de Stokes Eq. (8) de forma semi-empírica:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{\mathbf{K}}\mathbf{u} + \mu'\nabla^2\mathbf{u}, \quad (10)$$

onde μ' é a viscosidade efetiva de Brinkman, a qual o autor propõe que seja igual ou da mesma ordem de grandeza da viscosidade convencional.

A objeção principal que Brinkman faz à equação de Darcy é que esta não utiliza o tensor de tensões viscosas no fluido, negligenciando assim tensões cisalhantes atuando entre um elemento volumétrico de fluido e seus vizinhos. Ou seja, para a equação de Darcy, somente as forças de arrasto, chamadas por ele de “*damping forces*”, de contato do fluido com a massa sólida são levadas em consideração, o que seria uma boa aproximação apenas para baixas permeabilidades.

Na literatura há bastante discussão sobre a viscosidade efetiva de Brinkman μ' , dependendo do autor, utiliza-se viscosidade efetiva maior (Martys *et al.*, 1994), menor (Koplik *et al.*, 1983) ou igual (Howells, 1974) à viscosidade convencional do fluido μ , contudo têm-se o consenso que ambas viscosidades tendem ao mesmo valor quando a porosidade tende à unidade (Auriault, 2009).

Comparando as três equações de Stokes Eq. (8), de Darcy Eq. (9) e de Brinkman Eq. (10), desconsiderando o termo das forças de campo, observa-se que a equação de Brinkman pode ser interpretada como uma interpolação entre a macroscópica lei de Darcy e a microscópica equação de Stokes, sendo considerada por alguns autores uma lei natural para meios de alta porosidade (Chemetov e Neves, 2014).

A equação de Brinkman pode ser vista como uma generalização das outras duas equações, pois dependendo da permeabilidade, a equação de Brinkman recai na de Darcy ou de Stokes.

- Para altíssimas permeabilidades recai na de equação Stokes:

$$|\mathbf{K}| \rightarrow \infty \begin{cases} \frac{\mu}{\mathbf{K}}\mathbf{u} \rightarrow 0 \\ \nabla p = \mu'\nabla^2\mathbf{u}, \end{cases} \quad (11)$$

válido para meios onde ocorre o fluxo livre de obstáculos.

- Para baixas permeabilidades recai na equação de Darcy:

$$|\mathbf{K}| \rightarrow 0 \begin{cases} \nabla p = -\frac{\mu}{\mathbf{K}}\mathbf{u} \\ \mu'\nabla^2\mathbf{u} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (12)$$

válido para meios porosos convencionais.

2.2.4. Domínio de validade das equações

Na literatura ainda se encontra bastante discussão sobre qual o domínio de validade e aplicação de cada uma das equações como modelos de fluxo para meios porosos de alta porosidade (Auriault, 2009, Durlfolsky e Brady, 1987). Para se compreender os domínios de aplicação das equações de Brinkman e Darcy, deve-se atentar a razão adimensional V entre os termo viscoso de Brinkman e o termo de Darcy Eq. (13):

$$V = \frac{|\mu' \nabla^2 \mathbf{u}|}{|\frac{\mu}{\mathbf{K}} \mathbf{u}|}. \quad (13)$$

Esta grandeza adimensional dá origem ao chamado número adimensional de Darcy (Da) que é definido na Eq. (14):

$$Da = \frac{K}{L^2}, \quad (14)$$

onde L é a escala característica do sistema macroscópico. Quanto maior o número de Darcy, maior a importância do termo de Brinkman e conseqüentemente maior o desvio entre as duas formulações.

Segundo (Auriault, 2009) a mudança de domínio não se trata de um limite na porosidade, mas sim da geometria do espaço poroso. Quando a superfície de contato entre o sólido e o fluido é caracterizado pelo raio do poro ($S_c \sim r_{poro}^2$), estaria dentro do domínio de Darcy, e quando a superfície passa a ser determinada pelo raio do sólido ou da partícula ($S_c \sim r_{grao}^2$) então o fluxo estaria no domínio de Brinkman.

2.3. Escoamento bifásico em meios porosos

As mesmas leis de conservação de massa e de momento linear apresentadas para o escoamento monofásico são também aplicadas ao escoamento bifásico, no entanto agora separadamente para cada fase, considerando que os fluidos são imiscíveis e não há transferência de massa entre os mesmos (Ertekin *et al.*, 2001).

$$\frac{\partial(\rho_f \phi S_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f) = q_{mf}, \quad (f = o, a) \quad (15)$$

onde f é a fase, óleo ou água.

A equação de conservação de momento linear é utilizada como a equação de Darcy, desconsiderando-se os efeitos gravitacionais e capilares ($p_o = p_a = p$) a equação se torna simplesmente:

$$\mathbf{u}_f = -\frac{\mathbf{k}_f}{\mu_f} (\nabla p), \quad (f = o, a) \quad (16)$$

onde $\mathbf{k}_f = \mathbf{K} \cdot k_{r_f}$ é o produto da permeabilidade absoluta do meio poroso com a permeabilidade relativa do fluido. Os efeitos capilares são desconsiderados pois o foco deste trabalho é investigar o escoamento em zonas na presença de grandes cavidades onde os esforços viscosos predominariam.

Finalizando o sistema, a soma das saturações dos fluidos deve respeitar a restrição Eq. (17):

$$S_o + S_a = 1. \quad (17)$$

Devem ainda se adicionar relações constitutivas dos fluidos capazes de descrever o comportamento da densidade e da viscosidade do fluido em função da pressão, $\rho_f(p_f)$ e $\mu_f(p_f)$, neste trabalho assumir-se compressibilidades e viscosidades constante para os fluidos. As equações descritas acima compõem um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) altamente não linear, sem soluções analíticas possíveis de serem obtidas.

Na formulação de Brinkman a equação de conservação de momento linear passa a ser substituída pela a equação de Brinkman Eq. (10) e não mais pela equação de Darcy Eq. (9), expressa para cada fase do sistema:

$$\nabla p = -\frac{\mu_f}{\mathbf{K}_f} \mathbf{u}_f + \mu'_f \nabla^2 \mathbf{u}_f, \quad (f = o, a) \quad (18)$$

na qual já foram desconsiderados efeitos gravitacionais e capilares.

Embora bastante difundido para escoamentos monofásicos, poucos trabalhos são encontrados quando se trata da equação de Brinkman para escoamento bifásico. A única referência encontrada durante este trabalho que aborda o tema é Coclite *et al.* (2014). Embora a abordagem seja com foco nas características matemáticas do problema, o autor discute a formulação bifásica usando a equação de Brinkman e uma possível solução numérica do problema.

3. Implementação do simulador

3.1. Modelo monofásico

Para compressibilidades constantes, o sistema de EDPs que regem o problema de Darcy pode ser escrito com o balanço de massa simplificado para seu formato volumétrico conforme a Eq. (19):

$$\begin{cases} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = q_v, \\ \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p, \end{cases} \quad (19)$$

onde

q_v é o termo fonte volumétrico em condições de reservatório;

c_t é a compressibilidade total do sistema (fluido + rocha).

Neste sistema as variáveis são a velocidade \mathbf{u} e a pressão p , enquanto os outros parâmetros são propriedades de fluido, rocha ou termo fonte. Logo o sistema é fechado pois tem-se o número de equações iguais ao de variáveis.

Devido a relação linear entre velocidade e gradiente de pressão estabelecida na equação de Darcy, o sistema pode ser reduzido a uma equação apenas (Eq. 20), eliminando-se a variável velocidade (\mathbf{u}) do sistema. A equação Eq. (20) é classicamente denominada equação da difusividade hidráulica, a qual é utilizada de forma generalizada na simulação de reservatórios.

$$\left\{ \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p \right) = q_v \right. \quad (20)$$

Para o escoamento regido pela lei de Brinkman o sistema é composto pela equação de conservação da massa para o meio poroso Eq. (2) e pela equação de Brinkman Eq. (10), sendo escrito como Eq. (21):

$$\begin{cases} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}) = q_v, \\ \nabla p = -\frac{\mu}{\mathbf{K}} \mathbf{u} + \mu' \nabla^2 \mathbf{u}. \end{cases} \quad (21)$$

Para este sistema não é mais possível reduzir o número de equações, uma vez que a velocidade na equação de Brinkman não pode ser isolada. Portanto a velocidade (\mathbf{u}) e a pressão (p) permanecem como variáveis primárias neste equacionamento.

3.1.1. Solução numérica de sistema monofásico

Utiliza-se um esquema regular de discretização espacial do domínio em células que possuem valores discretizados das variáveis pressão (p_i) e da velocidade (u_i). Objetivando-se uma maior simplicidade na discretização das equações opta-se por avaliar as pressões no centro das células e as velocidades nas interfaces entre as células.

O sistema de EDPs que regem o problema de Darcy Eq. (19) pode ser escrito de forma discretizada para 1D, conforme Eq. (22):

$$\begin{cases} \phi c_t \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x} = q_{vi}, \\ \frac{p_{i+1}^{n+\theta} - p_i^{n+\theta}}{\Delta x} = -\frac{\mu}{k} u_i^{n+\theta}, \end{cases} \quad (22)$$

onde o subíndice i indica a posição espacial do bloco e o sobreíndice n indica o passo de tempo ao qual as variáveis se referem. Optou-se pela formulação implícita, $\theta = 1$, ou seja todas as variáveis primárias serão sempre consideradas no passo de tempo seguinte ($n + 1$), onde seus valores são desconhecidos. Objetivando uma maior estabilidade da solução independente do passo de tempo Δt .

Utilizando a equação da difusividade Eq. (20), obtém-se uma única equação discretizada para todo o sistema, somente com a variável pressão (p):

$$\phi c_t \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{k}{\mu} \left(\frac{p_{i+1}^{n+\theta} - 2p_i^{n+\theta} + p_{i-1}^{n+\theta}}{(\Delta x)^2} \right) = q_{vi}. \quad (23)$$

O sistema de EDPs que regem o problema de Brinkman Eq. (21), pode ser escrito de forma discretizada para 1D, conforme Eq. (24):

$$\begin{cases} \phi c_t \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x} = q_{vi}, \\ \frac{p_{i+1}^{n+\theta} - p_i^{n+\theta}}{\Delta x} = -\frac{\mu}{k} u_i^{n+\theta} + \mu' \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}}{(\Delta x)^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Da mesma forma optou-se pela formulação implícita, logo considera-se $\theta = 1$.

Para uma malha regular a permeabilidade nas faces pode ser estimada através de uma média harmônica entre os valores da células, considerando outras propriedades constantes, resultando na Eq. (25):

$$k_{i+1/2} = \frac{2}{\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i+1}}}. \quad (25)$$

Supõe-se um sistema 1D monofásico de N_x blocos, desconsiderando efeitos gravitacionais, com um poço produtor no primeiro bloco e um injetor no último bloco conforme Fig. 1, ambos com a mesma vazão em condições de reservatório q_v .

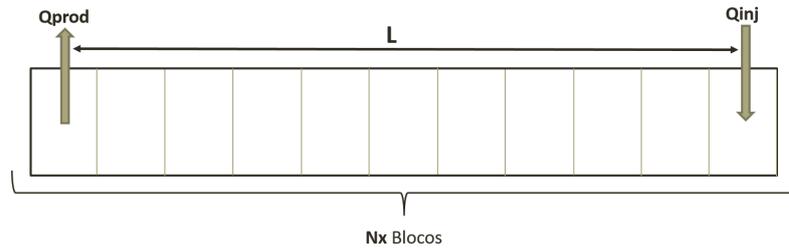


Figura 1: Sistema 1D

Aplicando-se a equação Eq. (23) para cada bloco e reunindo-as em formato matricial, obtém-se o seguinte sistema linear (no formato $Ax = b$):

$$\begin{pmatrix} C_1 & \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_1 & C_2 & \tau_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tau_{N-2} & C_{N-1} & \tau_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{N-1} & C_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_{N-1}^{n+1} \\ p_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot p_1^n + q_v \Delta x \\ c_2 \cdot p_2^n \\ \vdots \\ c_{N-1} \cdot p_{N-1}^n \\ c_N \cdot p_N^n + q_v \Delta x \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \phi_i c_t \Delta x / \Delta t, \quad C_i = c_i + (k_{i-1/2} + k_{i+1/2}) / (\mu \Delta x), \quad \tau_i = -k_{i+1/2} / (\mu \Delta x).$$

Este sistema linear, corresponde a solução convencional de Darcy, obtém as pressões no passo de tempo seguinte (p^{n+1}), a partir do qual é possível obter as velocidades (u^{n+1}) diretamente a partir da própria equação de Darcy discretizada em Eq. (22).

É possível montar um sistema linear equivalente, no entanto mantendo-se as velocidades (u^{n+1}) como variáveis primárias do sistema, ou seja, a partir da aplicação do sistema de equações Eq. (22) para os N_x blocos:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & | & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & | & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & 0 & | & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_N & | & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \hline \tau_1 & -\tau_1 & 0 & \dots & 0 & | & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & -\tau_2 & \dots & 0 & | & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{N-1} & -\tau_{N-1} & | & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_N & | & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_{N-1}^{n+1} \\ p_N^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot p_1^n + q_v \Delta x \\ c_2 \cdot p_2^n \\ \vdots \\ c_{N-1} \cdot p_{N-1}^n \\ c_N \cdot p_N^n + q_v \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \phi_i c_t \Delta x / \Delta t, \quad \tau_i = -k_{i+1/2} / (\mu \Delta x).$$

Sendo as primeiras N_x equações referentes ao balanço de massa de cada bloco e as N_x equações seguintes referentes a equação de Darcy de cada interface entre blocos. Embora, em termos práticos o resultado deste sistema seja igual ao do sistema anterior, o mesmo serve como um passo intermediário entre a solução numérica de Darcy e a de Brinkman, o qual chamaremos de solução de Darcy com velocidades. Observa-se portanto que para um sistema 1D a matriz da solução numérica de Darcy com velocidades ($2N_x \times 2N_x$) é 4 vezes maior que a de Darcy convencional ($N_x \times N_x$).

Para o mesmo sistema 1D de N_x blocos, aplicando o sistema de equações de Brinkman Eq. (24), é possível montar analogamente o seguinte sistema linear (no formato $Ax = b$):

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & | & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & | & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & 0 & | & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_N & | & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \hline \tau_1 & -\tau_1 & 0 & \dots & 0 & | & L_1 & l_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & -\tau_2 & \dots & 0 & | & l_2 & L_2 & l_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{N-1} & -\tau_{N-1} & | & 0 & \dots & l_{N-1} & L_{N-1} & l_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_N & | & 0 & \dots & \dots & l_N & L_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_{N-1}^{n+1} \\ p_N^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot p_1^n + q_v \Delta x \\ c_2 \cdot p_2^n \\ \vdots \\ c_{N-1} \cdot p_{N-1}^n \\ c_N \cdot p_N^n + q_v \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \phi_i c_t \Delta x / \Delta t, \quad \tau_i = -k_{i+1/2} / (\mu \Delta x), \quad l_i = \tau_i \mu' / \Delta x, \quad L_i = 1 - 2l_i.$$

Da mesma forma as primeiras N_x equações são referentes ao balanço de massa de cada bloco e as N_x equações seguintes referentes a equação de Brinkman de cada interface entre blocos. Observa-se que do ponto de vista da configuração do sistema linear que a única diferença entre o de Darcy com velocidades para o de Brinkman é que o quarto quadrante da matriz \mathbf{A} deixa de ser apenas uma diagonal unitária para passar a ser tridiagonal, a qual está relacionada a discretização do laplaciano da velocidade ($\nabla^2 u$).

Observa-se também que quando o coeficiente l_i tende a valores muito baixos os sistemas de Darcy e Brinkman passam a ser equivalentes numericamente ($l_i \rightarrow 0, L_i \rightarrow 1$). Adotando-se $\mu \sim \mu'$, este coeficiente equivale ao número de Darcy da Eq. (14), mas no lugar do comprimento característico L utiliza a dimensão de célula Δx de um sistema discretizado e é escrito como na Eq. (26):

$$Da = k/\Delta x^2, \quad (26)$$

o qual é chamado de número de Darcy numérico, sendo fundamental para delimitar numericamente em qual célula seria ou não importante utilizar a equação de Brinkman para o escoamento.

Adotando os mesmos equacionamentos foi desenvolvido também o simulador para um sistema 2D no plano. O número de variáveis primárias do problema passam a ser três: a pressão (p) e as velocidades na direção x (u) e na direção y (v). E as equações de fluxo de Darcy e de Brinkman se subdividem também nas direções x e y , fechando os sistemas de equações. Observa-se portanto que para o sistema 2D a matriz da solução numérica de Brinkman ($3(N_x N_y)^2 \times 3(N_x N_y)^2$) é 9 vezes maior que a de Darcy convencional ($(N_x N_y)^2 \times (N_x N_y)^2$). E para um sistema 3D seria 16 vezes maior, o que gera uma exigência muito maior de memória e processamento para resolver estes sistemas.

3.2. Modelo bifásico

As equações que regem o escoamento bifásico são as mesmas do monofásico, com a diferença que devem ser aplicadas agora separadamente para cada fase. A conservação de massa dada de forma genérica pela Eq. (15) pode ser simplificada considerando os fluidos e a rocha pouco compressíveis, e reescrita para a fase água conforme Eq. (27):

$$\phi \frac{\partial S_a}{\partial t} + \phi(c_r + c_a)S_a \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_a) = q_{v_a}, \quad (27)$$

onde o subíndice a se refere a fase água e r se refere a rocha.

Rescrevendo a equação de Darcy, Eq. (16), para cada fase, combinando com a equação de conservação de massa global e da fase água, e com a restrição de saturação é possível montar o sistema de EDPs que regem o problema bifásico de Darcy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_o) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_a) = q_{v_o} + q_{v_a}, \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_o = -\frac{\mathbf{K}kr_o}{\mu_o}(\nabla p), \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_a = -\frac{\mathbf{K}kr_a}{\mu_a}(\nabla p), \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{\partial S_a}{\partial t} + \phi(c_r + c_a)S_a \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_a) = q_{v_a}, \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_o + S_a = 1. \end{array} \right. \quad (32)$$

O sistema possui cinco variáveis primárias ($p, \mathbf{u}_o, \mathbf{u}_a, S_o$ e S_a) e cinco equações, e portanto pode ser resolvido através de um sistema linear único. O mesmo sistema poderia ser simplificado eliminando-se as velocidades da água e do óleo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}kr_o}{\mu_o}(\nabla p) \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}kr_a}{\mu_a}(\nabla p) \right) = q_{v_o} + q_{v_a} \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{\partial S_a}{\partial t} + \phi(c_r + c_a)S_a \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_a) = q_{v_a}, \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_o + S_a = 1. \end{array} \right. \quad (35)$$

onde ficariam restando apenas as variáveis primárias p , S_o e S_a . No entanto para se manter a mesma estrutura do sistema de Brinkman, foi considerado o sistema das Eqs 28 a 32.

Rescrevendo a equação de Brinkman Eq. (18) para cada fase, combinando com a equação de conservação de massa global e da fase água, e com a restrição de saturação é possível montar o sistema de EDPs que regem o problema bifásico de Brinkman:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_o) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_a) = q_{v_o} + q_{v_a}, \end{array} \right. \quad (36)$$

$$\nabla p = -\frac{\mu_o}{\mathbf{K}kr_o} \mathbf{u}_o + \mu'_f \nabla^2 \mathbf{u}_o, \quad (37)$$

$$\nabla p = -\frac{\mu_a}{\mathbf{K}kr_a} \mathbf{u}_a + \mu'_a \nabla^2 \mathbf{u}_a, \quad (38)$$

$$\phi \frac{\partial S_a}{\partial t} + \phi(c_r + c_a) S_a \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_a) = q_{v_a}, \quad (39)$$

$$S_o + S_a = 1. \quad (40)$$

As condições de contorno no bifásico são similares ao do monofásico, devendo ser imposta para as duas fases simultaneamente. A condição de barreira é utilizada, onde a fronteira é considerada selante e portanto a velocidade perpendicular a fronteira é nula:

$$\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n}_{\text{borda}} = \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{n}_{\text{borda}} = 0. \quad (41)$$

Quanto à saturação, o meio poroso é inicializado saturado apenas com a fase óleo para todo o domínio:

$$S_{a\text{inicial}} = 0 \text{ e } S_{o\text{inicial}} = 1. \quad (42)$$

3.2.1. Solução numérica de sistema bifásico

Para o desenvolvimento numérico das equações foi utilizado o método IMPES como referência, originalmente desenvolvido por (Sheldon *et al.*, 1959), cuja a idéia básica é desacoplar o cálculo das saturações do cálculo da pressão. Este método é mais simples de implementar e normalmente requer menos memória quando comparado a outros métodos, a desvantagem é que o método normalmente requer passos de tempo pequenos.

Para uma maior estabilidade da simulação utiliza-se a formulação implícita, portanto todas as variáveis primárias são consideradas no tempo $n + 1$ (p^{n+1} , u^{n+1} , S^{n+1}). Já os coeficientes dependentes de variáveis primárias são calculados baseados nas variáveis no tempo anterior, portanto a permeabilidade relativa, e as compressibilidades são calculadas em n (kr_f^n e c_t^n).

Para Darcy o sistema global de EDPs pode ser desacoplado resolvendo inicialmente as equações Eq. (28) a Eq. (30) para a pressão e velocidades, e posteriormente as equações Eq. (31) e Eq. (32) para as saturações. Discretizando as equações Eqs. 28 a Eq. (30) para um sistema 1D obtém-se o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi c_t \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{u_{oi}^{n+1} - u_{oi}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_{ai}^{n+1} - u_{ai}^{n+1}}{\Delta x} = q_{v_{oi}} + q_{v_{ai}}, \end{array} \right. \quad (43)$$

$$\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x} = -\frac{\mu_o}{Kkr_o} u_{oi}^{n+1}, \quad (44)$$

$$\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x} = -\frac{\mu_a}{Kkr_a} u_{ai}^{n+1}. \quad (45)$$

E na sua forma simplificada eliminando-se as velocidades da água e do óleo, a formulação convencional de Darcy discretizada é dada pela equação Eq. (46):

$$\phi c_t \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \left(\frac{Kkr_{i-1/2}}{\mu} \right)_o \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{Kkr_{i+1/2}}{\mu} \right)_o \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{Kkr_{i-1/2}}{\mu} \right)_a \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{Kkr_{i+1/2}}{\mu} \right)_a \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) = q_{voi} + q_{vai}. \quad (46)$$

Da mesma forma o sistema de EDPs de Brinkman pode ser desacoplado. As equações Eqs. 36 a 38 escritas de forma discretizada ficam:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi c_t \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{u_{oi}^{n+1} - u_{oi-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_{ai}^{n+1} - u_{ai-1}^{n+1}}{\Delta x} &= q_{voi} + q_{vai}, \end{aligned} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x} &= -\frac{\mu_o}{Kkr_o} u_{oi}^{n+1} + \mu'_o \frac{u_{oi+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{oi-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \end{aligned} \right. \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x} &= -\frac{\mu_a}{Kkr_a} u_{ai}^{n+1} + \mu'_a \frac{u_{ai+1}^{n+1} - 2u_{ai}^{n+1} + u_{ai-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \right. \quad (49)$$

Não é mais possível fazer a simplificação do sistema como realizado em Darcy, uma vez que as velocidades não podem ser isoladas e substituídas no balanço de massa.

A permeabilidade relativa(kr) deve ser avaliada nas interfaces dos blocos, enquanto que a saturação é avaliada nos centros dos blocos, da mesma forma que a pressão. A forma mais comum é utilizar a saturação do bloco a montante da direção do fluxo, o que é chamado de interpolação *Upwind*. Portanto é necessário identificar a direção do fluxo em determinada fronteira para determinar a saturação que deverá ser usada no cálculo da permeabilidade relativa:

$$kr_{ai+1/2} = \begin{cases} kr_a(S_{ai}) & \text{se } u_{ai} \geq 0, \\ kr_a(S_{ai+1}) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (50)$$

Supõe-se um sistema 1D bifásico de N blocos, desconsiderando efeitos gravitacionais e capilares, com um poço produtor no primeiro bloco e um injetor de água no último bloco conforme Eq. (1). Aplicando-se a equação Eq. (46) para cada bloco, obtém-se o seguinte sistema linear matricial no formato $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & \tau_{1+} & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{1-} & C_2 & \tau_{2+} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tau_{N-2-} & C_{N-1} & \tau_{N-1+} \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{N-1-} & C_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_{N-1}^{n+1} \\ p_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot p_1^n + q_v \Delta x \\ c_2 \cdot p_2^n \\ \vdots \\ c_{N-1} \cdot p_{N-1}^n \\ c_N \cdot p_N^n + q_v \Delta x \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \phi_i c_t \Delta x / \Delta t, \\ C_i = c_i + \frac{(Kkr_o)_{i-1/2} + (Kkr_o)_{i+1/2}}{\mu_o \Delta x} + \frac{(Kkr_a)_{i-1/2} + (Kkr_a)_{i+1/2}}{\mu_a \Delta x}, \\ \tau_{i+} = -\frac{(Kkr_o)_{i+1/2}}{\mu_o \Delta x} - \frac{(Kkr_a)_{i+1/2}}{\mu_a \Delta x}, \quad \tau_{i-} = -\frac{(Kkr_o)_{i-1/2}}{\mu_o \Delta x} - \frac{(Kkr_a)_{i-1/2}}{\mu_a \Delta x}.$$

A partir das pressões calculadas em $n + 1(p^{n+1})$ é possível calcular as velocidades(u_o^{n+1}, u_a^{n+1}) explicitamente através das equações de Darcy para cada fase Eq. (44) e Eq. (45).

Outra forma é montar o sistema mantendo-se as velocidades como variáveis primárias do sistema linear, ou seja, a partir da aplicação das equações Eqs. (43, 44 e 45) separadamente para todos os blocos:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_N & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \tau_{o1} - \tau_{o1} & 0 & \dots & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\ 0 & \tau_{o2} & -\tau_{o2} & \dots & 0 & 1 & & 0 & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \ddots & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{oN-1} - \tau_{oN-1} & 0 & 0 & & 1 & & & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_{oN} & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline \tau_{a1} - \tau_{a1} & 0 & \dots & 0 & & & & & & & 1 & & & & & \\ 0 & \tau_{a2} & -\tau_{a2} & \dots & 0 & & & & & & 1 & & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & 0 & & & & & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{aN-1} - \tau_{aN-1} & 0 & & & & & & 0 & & 1 & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_{aN} & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_{N-1}^{n+1} \\ p_N^{n+1} \\ u_{o1}^{n+1} \\ u_{o2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{oN-1}^{n+1} \\ u_{oN}^{n+1} \\ u_{a1}^{n+1} \\ u_{a2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{aN-1}^{n+1} \\ u_{aN}^{n+1} \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \phi_i c_t \Delta x / \Delta t, \quad \tau_{oi} = -(Kkr_o)_{i+1/2} / (\mu_o \Delta x), \quad \tau_{ai} = -(Kkr_a)_{i+1/2} / (\mu_a \Delta x).$$

Observa-se que para o sistema linear 1D bifásico a matriz da formulação de Darcy com velocidades (3N x 3N) é 9 vezes maior que a de Darcy convencional (N x N).

Aplicando as equações do sistema de Brinkman Eqs. (47, 48 e 49), é possível montar analogamente um sistema linear matricial:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_N & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \hline \tau_{o1} - \tau_{o1} & 0 & \dots & 0 & L_{o1} & l_{o1} & \dots & \dots & 0 & & & & & & & \\ 0 & \tau_{o2} & -\tau_{o2} & \dots & 0 & l_{o2} & L_{o2} & l_{o2} & \dots & 0 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{oN-1} - \tau_{oN-1} & 0 & \dots & l_{oN-1} & L_{oN-1} & l_{oN-1} & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_{oN} & 0 & \dots & \dots & l_{oN} & L_{oN} & & & & & & \\ \hline \tau_{a1} - \tau_{a1} & 0 & \dots & 0 & & & & & & & L_{a1} & l_{a1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \tau_{a2} & -\tau_{a2} & \dots & 0 & & & & & & l_{a2} & L_{a2} & l_{a2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & 0 & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{aN-1} - \tau_{aN-1} & 0 & & & & & & 0 & \dots & l_{aN-1} & L_{aN-1} & l_{aN-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_{aN} & & & & & & 0 & \dots & \dots & l_{aN} & L_{aN} \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \phi_i c_t \Delta x / \Delta t, \quad \tau_{oi} = -(Kkr_o)_{i+1/2} / (\mu_o \Delta x), \quad \tau_{ai} = -(Kkr_a)_{i+1/2} / (\mu_a \Delta x), \\ l_{oi} = \tau_{oi} \mu'_o / \Delta x, \quad l_{ai} = \tau_{ai} \mu'_a / \Delta x, \quad L_{oi} = 1 - 2l_{oi}, \quad L_{ai} = 1 - 2l_{ai}.$$

Observa-se que do ponto de vista da configuração do sistema linear para o 1D bifásico que a diferença entre o sistema de Darcy com velocidades e o de Brinkman aparecem na quinta e na nona secção da matriz A , que deixam de ser apenas diagonais unitárias em Darcy para passarem a ser tridiagonais em Brinkman. Quanto ao tamanho da matriz, possuem a mesma dimensão de $3N \times 3N$, sendo portanto 9 vezes maior que a solução convencional de Darcy.

Para melhor ilustrar o formato e tamanho da matriz A no caso bifásico, é apresentado na Fig. 2 um exemplo gerado pelo simulador das matrizes das formulações de Darcy com velocidades e de Brinkman para uma malha de 10 blocos. Ou seja, para as 3 variáveis primárias $\mathbf{x} = \{p, u_o, u_a\}$, gera-se um tamanho de matriz de 30×30 . Os quadrados vermelhos indicam valores com sinais negativos e os azuis indicam valores com sinais positivos. E o restante da matriz é preenchido com zeros.

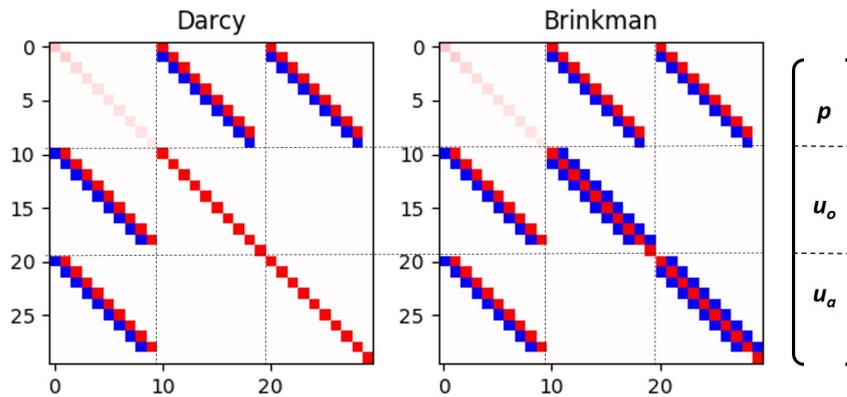


Figura 2: Matrizes bifásico 1D $Nx = 10$

Tendo obtido as pressões (p^{n+1}) e velocidades (u^{n+1}) através de qualquer dos sistemas lineares acima, seja por Brinkman ou por Darcy, ainda é necessário calcular as saturações. Reescrevendo a equação balanço de massa para água na sua forma discretizada:

$$\phi \frac{S_{ai}^{n+1} - S_{ai}^n}{\Delta t} + \phi(c_r + c_a) S_{ai}^n \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{u_{ai} - u_{ai-1}}{\Delta x} = q_{vai}. \quad (51)$$

Como a pressão e a velocidade já são conhecidas, a saturação de água no passo de tempo $n + 1$ aparece como a única variável da equação Eq. (51), portanto ela pode ser facilmente isolada e calculada explicitamente.

3.3. Estrutura geral do simulador

O simulador desenvolvido é baseado no método IMPES e portanto possui uma estrutura relativamente simples. O fluxograma da Fig. 3 expressa a sua estrutura resumidamente.

A inicialização das variáveis e entrada de parâmetros é feita através de mapas ou valores fixos para todo o *grid*. A permeabilidade absoluta (K) e porosidade (ϕ) por exemplo variam de acordo com a geometria dos carstes utilizada no caso 2D.

O laço principal do programa consiste no avanço do tempo em passos até o tempo final, sendo cada passo de tempo restrito ao número de Courant ($C = v \cdot \Delta t / \Delta x$) menor que 1 de forma a evitar instabilidades (Coats *et al.*, 2001). Dentro do laço principal a sequência é a seguinte:

1. Atualização dos coeficientes, sobretudo os dependentes da saturação (kr e c_t), e aplicação das condições de contorno (fronteiras selantes e termos fontes), baseados nas variáveis calculadas no passo de tempo anterior;
2. Montagem das matrizes dos sistemas lineares de Darcy e de Brinkman para resolver a pressão e as velocidades;
3. Resolve os sistemas lineares utilizando *solver* interno do pacote Numpy;
4. Calcula explicitamente as saturações para cada sistema independentemente;

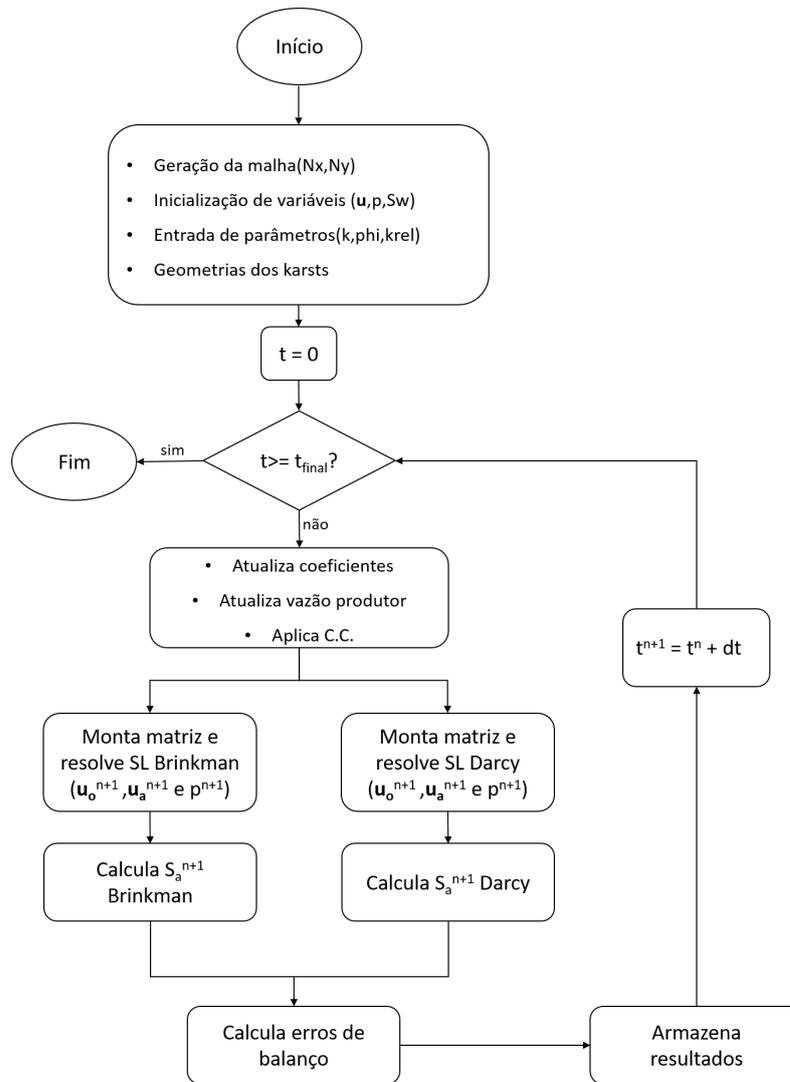


Figura 3: Estrutura resumida do programa

5. Armazena resultados e avança para o passo de tempo seguinte.

Em paralelo foram gerados gráficos de acompanhamento da simulação como erros de balanços de massa, vazão dos poços e corte de água no poço produtor. Mapas de saturação e velocidades são gerados em determinados tempos especificados.

4. Resultados

No escoamento monofásico serão discutidos apenas os resultados em 2D enquanto no bifásico será discutido os resultados em 1D.

4.1. Monofásico 2D

O modelo de reservatório 2D de referência é baseado na configuração 1/4 de *five-spot*. No qual temos um injetor em um canto e o produtor no canto oposto. Supõe-se adicionalmente uma região altamente carstificada concentrada entre os poços no formato aproximadamente quadrado conforme ilustra o desenho esquemático da Fig. 4. Dentro desta região chamada de domínio de carstes, considera-se que o espaço vazio predomina sobre o espaço ocupado por rocha ($\phi > 0.5$), que possui portanto o comportamento equivalente de um meio poroso com altíssimas porosidades e permeabilidades.

De forma resumida as propriedades de rocha e fluido, assim com valores dos termos fonte (poços), utilizados estão expressas na Tabela 1. O domínio de carstes é assumido como a metade das dimensões do domínio total e centralizado equidistante dos poços.

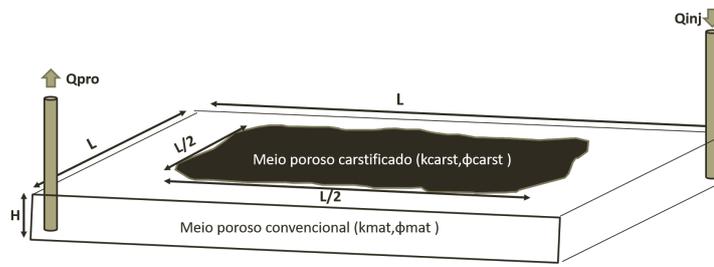


Figura 4: Esquema ilustrando modelo de reservatório

Tabela 1: Parâmetros utilizados

Parâmetros	Valores
Densidade fluido (kg/m^3)	700
Viscosidade (cp)	1
Pressão Inicial (Pa)	0
Vazão poço (m^3/s)	0.001
Porosidade domínio Matriz	0.10
Porosidade domínio Carstes	0.80
Permeabilidade domínio Matriz (m^2)	$2\text{e-}13$
Permeabilidade domínio Carstes (m^2)	200
Distância entre poços (m)	140

A malha de células foi gerada de forma simplificada considerando $N_x = N_y = 20$ e portanto com tamanhos de células de $\Delta x = \Delta y = 5\text{m}$. Os mapas de entrada de parâmetros de reservatório são mostrados na Fig. 5. No caso monofásico considera-se portanto que o fluido injetado é o mesmo produzido.

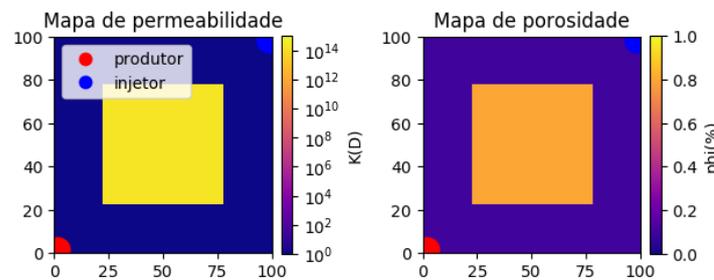


Figura 5: Parâmetros e Geometria do domínio de Carstes

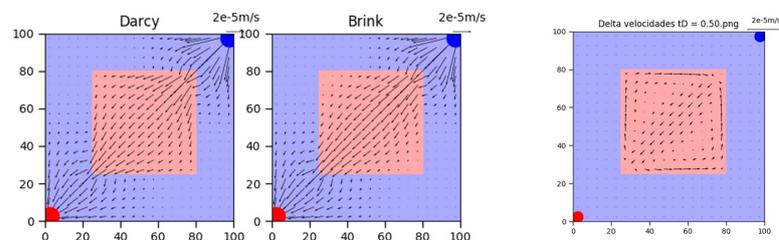


Figura 6: Campos de velocidades (a)Darcy (b)Brinkman (c)Brinkman - Darcy

Os principais resultados da simulação de referência pra $t_D = 0.5$ são mostrados nas Figs. 6 e 7. No campo de velocidades observa-se uma mudança na direção do fluxo dentro do domínio de carstes, o qual se alinha mais com a diagonal, mas não existem diferenças perceptíveis fora do domínio. Pelo campo de deltas fica claro um aumento da velocidade de Brinkman no centro e uma diminuição nas

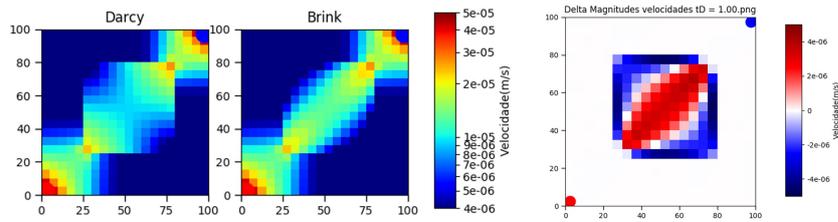


Figura 7: Magnitude velocidades (a)Darcy (b)Brinkman (c)Brinkman - Darcy

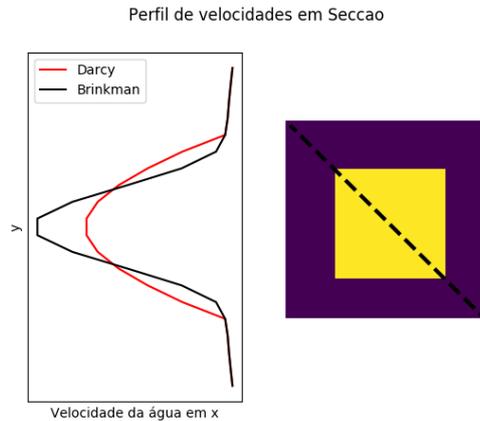


Figura 8: Perfil de velocidades em secção

bordas do domínio. O que pode ser também visualizado através do perfil de velocidades em uma secção diagonal mostrada na Fig. 8. A magnitude das velocidades, Fig. 7, demonstra o mesmo comportamento de aumento na intensidade do fluxo no meio do domínio e diminuição nas bordas.

Foi realizado uma análise de sensibilidade no parâmetro de permeabilidade dentro do domínio de carstes e os resultados na magnitude da velocidade são mostrados na Fig. 9. Observando os deltas pode-se dizer que para as menores permeabilidades o impacto é nulo, e a partir de determinados valores os resultados dos modelos começam a se distanciar dentro do domínio de carstes até um ponto em que se estabilizam. Para melhor quantificar esta transição foi gerado um parâmetro baseado no desvio entre as formulações denominado de grau de impacto(GI).

$$GI = \sum_{i,j}^{Nx,Ny} \frac{|\mathbf{u}^{Br} - \mathbf{u}^{Da}|}{|\bar{\mathbf{u}}^{Da}|} \quad (52)$$

O comportamento do GI para o conjunto de simulações realizadas em função do número de Darcy(Da) está mostrado na Fig. 10. Fica claro que existe uma zona de transição de $Da = 10^{-2}$ a $Da = 10^2$ de um regime de baixo impacto para um regime de alto impacto.

Esta transição ocorre quando as forças puramente viscosas ($\mu' \nabla^2 \mathbf{u}$), que existem apenas na formulação de Brinkman, se tornam importantes em relação as forças de arrasto ($\mu \mathbf{u}/k$). O número de Darcy reflete exatamente a razão destas forças e portanto é o parâmetro que determina a transição de um regime totalmente dominado por forças de arrasto, meio poroso convencional, para um regime totalmente dominado por forças viscosas, meio de fluido livre.

4.2. Bifásico 1D

A análise do sistema bifásico 1D é baseado na configuração da Fig. 1, com um injetor de água numa extremidade e um produtor na outra. Neste trabalho foi utilizada uma curva de permeabilidade relativa teórica de Corey, com os pontos terminais kr_{omax} e kr_{amax} igual a 1, e S_{or} e S_{air} igual a 0. Enquanto que os expoentes n_o e n_a foram utilizados igual a 3 como referência.

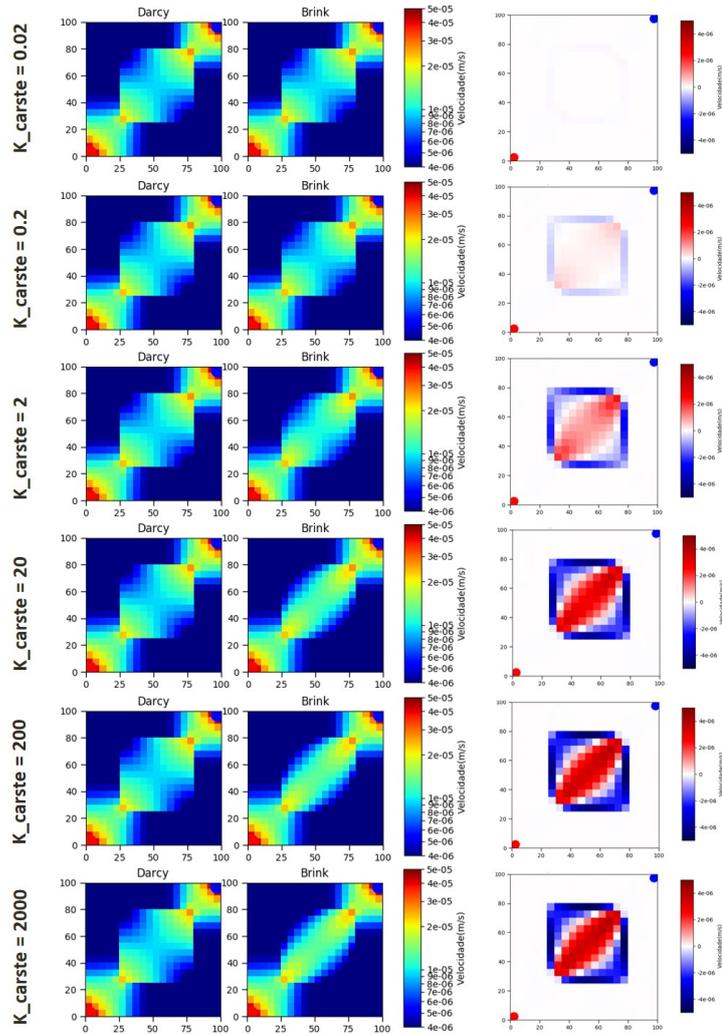


Figura 9: Sensibilidade da permeabilidade na região Carstificada

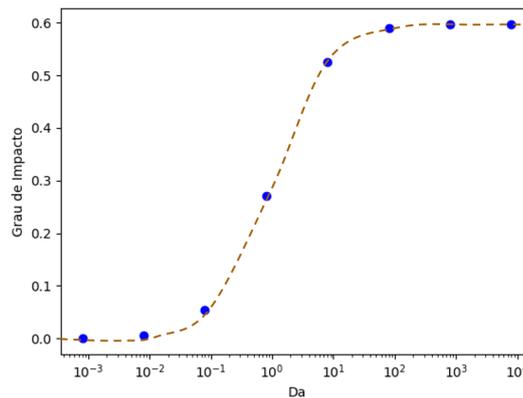


Figura 10: Grau de impacto da formulação de Brinkman

A simulação baseada na equação de Darcy Eq. 28 é comparada a simulação baseada na equação de Brinkman Eq. 36 para as configurações de um meio poroso convencional e portanto, baixas permeabilidades e porosidades. O comportamento se mostra equivalente entre as duas formulações, conforme mostra Fig. 11 ($K = 10^{-13} m^2(0.1D)$ e $\phi = 0.1$).

Para as configurações de um meio altamente carstificado, ou seja altíssimas permeabilidades e porosidades o comportamento se mostra bem diferente entre as duas formulações, conforme ilustrado na Fig.

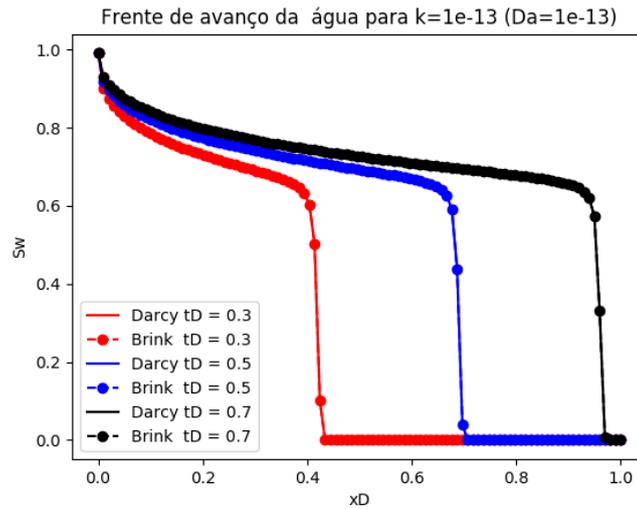


Figura 11: Solução de Brinkman equivalente a de Darcy (Da baixo).

12 (onde $k = 10m^2 = 10^{13}D$ e $\phi = 0.8$).

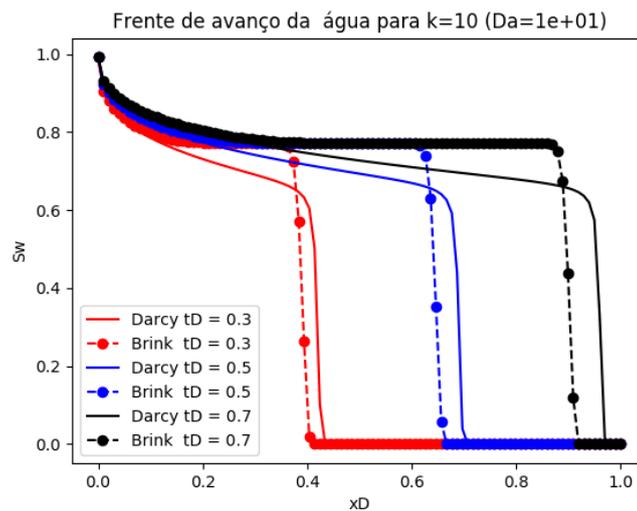


Figura 12: Solução de Brinkman diferente de Darcy (Da alto).

Para as configurações de um meio altamente carstificado, ou seja altíssimas permeabilidades e porosidades o comportamento se mostra bem diferente entre as duas formulações, conforme ilustrado na Fig. 11(b) ($K = 10m^2(10^{13}D)$ e $\phi = 0.8$). O comportamento da formulação de Brinkman mostra uma melhor eficiência de deslocamento, com uma saturação média atrás do choque bem superior a formulação de Darcy, levando a um consequente atraso na posição da frente do avanço do choque. O choque na formulação de Brinkman apresenta uma difusão da descontinuidade um pouco maior que a de Darcy.

A parcela presente na formulação de Brinkman que difere da da formulação de Darcy está associada as forças puramente viscosas representadas por $\mu' \nabla^2 u$, portanto é interessante verificar o comportamento desta parcela na frente de avanço da saturação. Escolhendo a fase água pode-se observar os perfis de velocidade e da sua derivada segunda na Fig. 13. O termo só difere de zero no choque, onde apresenta uma oscilação. Esta oscilação é responsável por gerar uma perturbação também no gradiente pressão (∇p) em Brinkman, o que não acontece em Darcy. Esta perturbação no gradiente de pressão se comporta como uma perda de carga localizada para o fluxo, que faz com que a velocidade da fase água seja reduzida fortemente neste ponto, diminuindo assim a velocidade de propagação da frente. A visualização da física do efeito viscoso é normalmente mais clara no caso 2D do que no 1D.

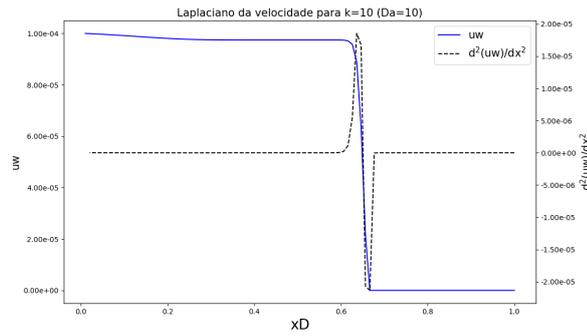


Figura 13: Análise do $\nabla^2 u$ na frente de avanço

4.2.1. Análise fluxo fracionário

A análise de fluxo fracionário como razão de mobilidades não se aplica a Brinkman, mas poderia ser vista apenas como razão de velocidades, de forma que poderia ser escrita como:

$$f_{DBr} = \frac{u_a}{u_a + u_o} \quad (53)$$

Utilizando as velocidades calculadas pelo próprio simulador em um determinado tempo, é possível construir as curvas de fluxo fracionário usando Eq. 53 para Brinkman e para Darcy, e compará-las com as curvas teóricas de Buckley-Leverett. A Fig. 14 mostra as curvas de fluxo fracionário geradas para quatro diferentes números de Da em $t_D = 0.5$:

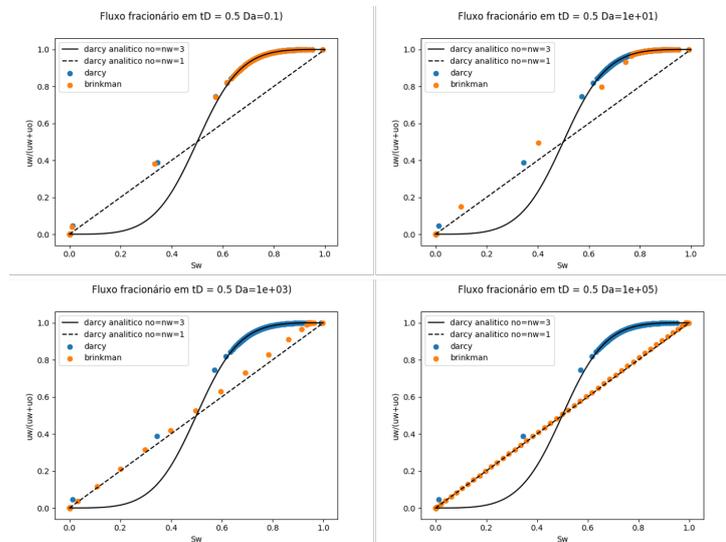


Figura 14: Análise do fluxo fracionário (a) $Da = 0.1$ (b) $Da = 10$ (c) $Da = 10^3$ (d) $Da = 10^5$

Observa-se que o fluxo fracionário de Darcy coincide com a curva teórica em todos os casos, ou seja independe do número Da . O fluxo fracionário de Brinkman tende para a de Darcy para baixos números Da , mas para altos número Da o fluxo fracionário tende para solução teórica de pistão, ou seja, de expoentes de Corey n_o e n_a iguais a 1.

4.2.2. Análises de sensibilidade

Conforme discutido anteriormente, o número adimensional que controla o impacto da formulação de Brinkman em relação a de Darcy é o número Darcy (Da), Eq. 26. O qual pode ser alterado via permeabilidade absoluta do meio (K) ou alteração do refinamento(Δx).

Realizando uma sensibilidade do número de blocos utilizados (N_x), o qual é equivalente a variar o refinamento ($\Delta x = L/N_x$), obtemos o comportamento mostrado na Fig. 15. Observa-se que para baixos refinamentos o número Da é baixo e a solução de Brinkman fica igual a de Darcy, ambas com baixa resolução do choque devido a malha grossa. Para altos refinamentos as soluções se distanciam, com a solução de Brinkman tendendo para um deslocamento ideal com 100% de eficiência. Enquanto a solução de Darcy tende para a solução teórica de Buckley-Leverett.

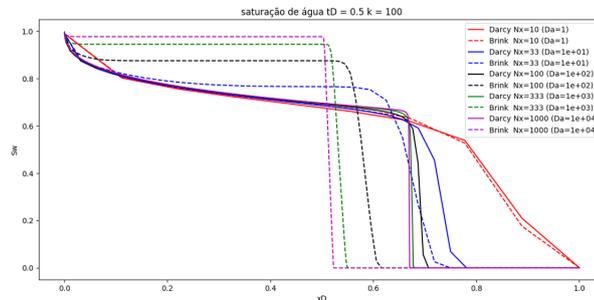


Figura 15: Análise de sensibilidade no refinamento

Realizando uma sensibilidade na permeabilidade absoluta (K), obtemos o comportamento mostrado na Fig. 16. Inicialmente nota-se que todas as simulações de Darcy são coincidentes pois a solução é independente da permeabilidade absoluta do meio, portanto observa-se apenas impactos na solução de Brinkman. A medida que a permeabilidade aumenta, afastando a solução de Brinkman da solução de Darcy, tende-se para um deslocamento perfeito. Para altíssimas permeabilidades ocorre um efeito secundário que é a difusão da frente de avanço do choque, potencializada em Brinkman pelo termo de segunda ordem na velocidade ($\nabla^2 u$), o qual é um termo difusivo.

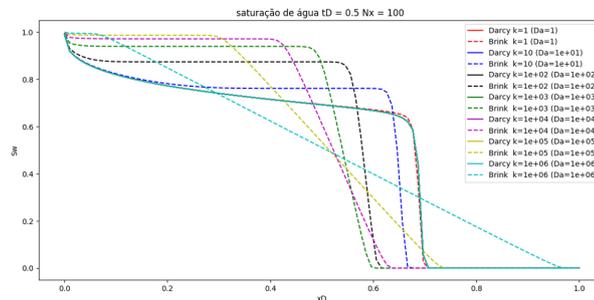


Figura 16: Análise de sensibilidade na permeabilidade absoluta ($N_x = 100$)

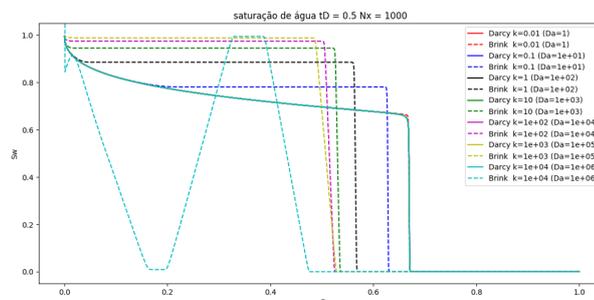


Figura 17: Análise de sensibilidade na permeabilidade absoluta com maior refinamento ($N_x = 1000$)

Esta difusão numérica pode ser reduzida se forem utilizados refinamentos maiores conforme ilustra a Fig. 17. Embora se consiga corrigir a difusão da frente de avanço do choque, altos refinamentos

associados a altas permeabilidades absolutas tendem a gerar instabilidades nas soluções. Logo, parece não ser adequada a simulação para números de Darcy (Da) superiores a 10^5 , por tenderem ou a uma difusão excessiva da frente ou à instabilidades nos resultados caso haja refinamento, e o impacto no resultado já não é mais significativo.

A análise do escoamento bifásico 1D deixa claro que ao se utilizar a formulação de Brinkman em cenários de altíssimas permeabilidades (e portanto altos números de Da) a eficiência de deslocamento tenderia a melhorar substancialmente e eventualmente chegar a próximo de 100%. O que já poderia ser esperado de um meio que seja predominantemente espaço vazio e portanto não tenha caminhos preferências predominantes ao fluxo, que geram as ineficiências no deslocamento.

5. Conclusões

Neste trabalho foi implementado um simulador de fluxo monofásico 2D e bifásico água-óleo 1D utilizando a equação de fluxo de Brinkman no lugar da clássica lei de Darcy. O trabalho teve como objetivo simular a injeção de água em um meio poroso que apresenta elevadas porosidades devido a presença de carstes ou cavernas no reservatório e comparar o resultado das duas formulações.

Foi avaliado o comportamento monofásico do simulador para um esquema de malha *Five-spot* para as duas formulações e avaliado o número adimensional de Darcy (Da) como parâmetro para determinar quando apresentariam resultados diferentes. Foi constatada a transição entre o regime de fluxo dominado pela forças de arrasto para números de Da inferiores a 10^{-2} e dominados por forças viscosas quando superiores a 10^2 .

No bifásico 1D foi avaliado a eficiência de deslocamento das duas formulações, na qual pode-se observar que a formulação de Brinkman tende para deslocamento tipo “pistão” para elevados números de Da , enquanto a formulação de Darcy é indiferente.

Quanto ao fator de recuperação não é possível concluir se deve aumentar ou diminuir utilizando a equação de Brinkman, uma vez que aumenta a eficiência de deslocamento 1D mas diminui a eficiência de varrido areal do reservatório no 2D, sendo esta última altamente dependente da geometria do domínio de alta porosidade.

O estudo indica que para elevados números de Da , ainda que o impacto seja muito dependente da geometria e dos parâmetros utilizados, o mais adequado seria utilizar a equação de Brinkman para o fluxo pois leva resultados diferentes e no entanto parecem mais coerentes fisicamente que a formulação de Darcy.

Embora o simulador seja operacional apenas para pequenas malhas e para geometrias muito simplificadas, permitiu uma compreensão física dos fenômenos envolvidos no escoamento bifásico nestes meios porosos não convencionais. E ainda poderá servir como base para um simulador de fluxo mais complexo e de maior escala utilizando a equação de Brinkman, o qual ainda não existe em simuladores comerciais, e até onde esta pesquisa alcançou tampouco em simuladores acadêmicos.

Referências bibliográficas

Wayne M Ahr, David Allen, Austin Boyd, H Nate Bachman, Tony Smithson, EA Clerke, KBM Gzara, JK Hassall, CRK Murty, H Zubari, *et al.* Confronting the carbonate conundrum. *Oilfield Review*, 17(1): 18–29, 2005.

Todd Arbogast e Heather L Lehr. Homogenization of a darcy–stokes system modeling vuggy porous media. *Computational Geosciences*, 10(3):291–302, 2006.

Jean-Louis Auriault. On the domain of validity of brinkman’s equation. *Transport in porous media*, 79 (2):215–223, 2009.

George Keith Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.

HC Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Scientific Research*, 1(1):27–34, 1949a.

- HC Brinkman. On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1(1):81, 1949b.
- Rodolfo Camacho-Velazquez, Mario Vasquez-Cruz, Rafael Castrejon-Aivar, Victor Arana-Ortiz, *et al.* Pressure transient and decline curve behaviors in naturally fractured vuggy carbonate reservoirs. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, 2002.
- Ricardo Casar-González, Vinicio Suro-Pérez, *et al.* Stochastic imaging of vuggy formations. In *SPE International Petroleum Conference and Exhibition in Mexico*. Society of Petroleum Engineers, 2000.
- Nikolai Chemetov e Wladimir Neves. On a generalized muskat-brinkman type problem. *Interfaces and Free Boundaries*, 16(3):339–357, 2014.
- KH Coats *et al.* Impes stability: the cfl limit. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2001.
- Giuseppe M Coclite, Siddhartha Mishra, Nils Henrik Risebro, e Franziska Weber. Analysis and numerical approximation of brinkman regularization of two-phase flows in porous media. *Computational Geosciences*, 18(5):637–659, 2014.
- C Dabbouk, A Liaqat, G Williams, e G Beattie. Waterflood in vuggy layer of a middle eastern reservoir–displacement physics understood. spe-78530. In *10th ADIPEC Conference, Abu Dhabi, UAE*, 2002.
- Henry Darcy. Les fontaines publique de la ville de dijon. *Dalmont, Paris*, 647, 1856.
- L Durlofsky e JF Brady. Analysis of the brinkman equation as a model for flow in porous media. *The Physics of fluids*, 30(11):3329–3341, 1987.
- Turgay Ertekin, Jamal H Abou-Kassen, e Gregory R King. *Basic Applied Reservoir Simulations*. Society of Petroleum Engineers, 2001.
- Fabrice Golfier, D Lasseux, e M Quintard. Investigation of the effective permeability of vuggy or fractured porous media from a darcy-brinkman approach. *Computational Geosciences*, 19(1):63–78, 2015.
- Jie He, John E Killough, F Fadlelmula, M Mohamed, Michael Fraim, *et al.* A unified finite difference model for the simulation of transient flow in naturally fractured carbonate karst reservoirs. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2015.
- ID Howells. Drag due to the motion of a newtonian fluid through a sparse random array of small fixed rigid objects. *Journal of Fluid Mechanics*, 64(3):449–476, 1974.
- Guido Kanschat, Raytcho Lazarov, e Youli Mao. Geometric multigrid for darcy and brinkman models of flows in highly heterogeneous porous media: A numerical study. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 310:174–185, 2017.
- Irina Evgenievna Khvatova, Antoine Renaud, Elena Golitsina, Galina Malutina, Gergiy Sansiev, Igor Kuzilov, *et al.* Simulation of complex carbonate field: Double media vs. single media kharyaga field case (russian). In *SPE Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, 2012.
- Joel Koplik, Herbert Levine, e A Zee. Viscosity renormalization in the brinkman equation. *The Physics of fluids*, 26(10):2864–2870, 1983.
- Marcin Krotkiewski, Ingeborg S Ligaarden, Knut-Andreas Lie, e Daniel W Schmid. On the importance of the stokes-brinkman equations for computing effective permeability in karst reservoirs. *Communications in Computational Physics*, 10(05):1315–1332, 2011.
- N Martys, Dale P Bentz, e Edward J Garboczi. Computer simulation study of the effective viscosity in brinkman’s equation. *Physics of Fluids*, 6(4):1434–1439, 1994.
- DA Nield e AV Kuznetsov. An historical and topical note on convection in porous media. *Journal of*

Heat Transfer, 135(6):061201, 2013.

Mayur Pal. A unified approach to simulation and upscaling of single-phase flow through vuggy carbonates. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69(6):1096–1123, 2012.

Xiaolong Peng, Zhilin Qi, Baosheng Liang, Xueli Liu, *et al.* A new darcy-stokes flow model for cavity-fractured reservoir. In *Production and Operations Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2007.

Xiaolong Peng, Zhimin Du, Baosheng Liang, Zhilin Qi, *et al.* Darcy-stokes streamline simulation for the tahe-fractured reservoir with cavities. *SPE Journal*, 14(03):543–552, 2009.

Peter Popov, Guan Qin, Linfeng Bi, Yalchin Efendiev, Richard E Ewing, Jianglong Li, *et al.* Multiphysics and multiscale methods for modeling fluid flow through naturally fractured carbonate karst reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 12(02):218–231, 2009.

JW Sheldon, WT Cardwell Jr, *et al.* One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. 1959.

Cyprien Soulaïn. On the origin of darcy's law, 2015. URL https://web.stanford.edu/~csoulain/PORE_SCALE/Chap1_Darcy.pdf.

Shriram Srinivasan e KR Rajagopal. On the flow of fluids through inhomogeneous porous media due to high pressure gradients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 78:112–120, 2016.

Yu-Shu Wu, HH Liu, e GS Bodvarsson. A triple-continuum approach for modeling flow and transport processes in fractured rock. *Journal of Contaminant Hydrology*, 73(1-4):145–179, 2004.

Yu-Shu Wu, Christine Ehlig-Economides, Guan Qin, Zhijiang Kang, Wangming Zhang, Babatunde Ajayi, e Qingfeng Tao. A triple-continuum pressure-transient model for a naturally fractured vuggy reservoir. 2007.

Jun Yao, Zhaoqin Huang, Yajun Li, Chenchen Wang, Xinrui Lv, *et al.* Discrete fracture-vug network model for modeling fluid flow in fractured vuggy porous media. In *International oil and gas conference and exhibition in China*. Society of Petroleum Engineers, 2010.