Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

TEOREMA DO SANDUÍCHE DE PRESUNTO

Iane Martins Tavares Nascimento[1]

Wagner Carvalho Sgobbi[2]

[1]Universidade Federal do Espírito Santo

[2]Universidade Federal do Espírito Santo

ianne8822@gmail.com,wagner.sgobbi@ufes.br

Palavras-chave: Topologia. Teorema de Borsuk-Ulam. Teorema do Sanduíche de Presunto. Hiperplano.

Este trabalho apresenta uma introdução acessível ao Teorema do Sanduíche de Presunto, caso particular do teorema de Stone-Tukey, fundamentado no Teorema de Borsuk-Ulam. Inicialmente, são discutidos resultados topológicos preliminares, como a preservação da conexidade por funções contínuas, seguidos da demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam. A partir dele, derivam-se o Teorema da Panqueca para $n = 2$ e o Teorema do Sanduíche de Presunto para $n = 3$. Ressalta-se que, para a validade dos resultados, consideramos os conjuntos envolvidos como compactos, de modo a garantir que sejam mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. Por fim, aborda-se a generalização para dimensão n, que assegura que quaisquer n objetos mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ podem ser simultaneamente bipartidos por um único hiperplano $(n-1)$-dimensional. Além da motivação intuitiva, o resultado evidencia a profunda relação entre geometria, topologia e teoria da medida.

1. Introdução

Não é difícil acreditar que é possível cortar um sanduíche de presunto exatamente ao meio principalmente quando temos irmãos ou alguém para compartilhar o lanche. Esse exemplo simples motiva um resultado matemático profundo conhecido como Teorema do Sanduíche de Presunto (Stone-Tukey para o caso $n = 3$), que garante que é possível dividir igualmente, com um único plano, três objetos em $\mathbb{R}^3$, sendo este válido também para dimensões maiores.

O tema possui relevância tanto histórica quanto científica, pois conecta conceitos fundamentais da Topologia (como conexidade e compacidade) a aplicações em áreas da matemática mais ampla, como análise funcional, geometria e teoria da medida. A escolha desse tema se justifica pela sua combinação de simplicidade intuitiva com profundidade teórica.

2. Metodologia

A metodologia adotada será a **Pesquisa Teórica**, adequada por se tratar de um estudo voltado à sistematização e compreensão de resultados matemáticos clássicos em Topologia e Análise. O trabalho consiste na leitura e análise da literatura fundamental sobre o desenvolvimento histórico dos teoremas de Borsuk-Ulam e Stone-Tukey, com ênfase em suas demonstrações e implicações teóricas.
Serão apresentadas as definições e pré-requisitos necessários à compreensão dos teoremas, bem como suas demonstrações, compiladas e reescritas de forma didática e acessível. Seguiremos a abordagem de Kinsey (1997) [1] e Munkres (2000) [4] na exposição dos conceitos topológicos e demonstrações do Teorema de Borsuk-Ulam, o qual implica no Teorema de Stone-Tukey. Serão incluídos os casos particulares do Teorema de Stone-Tukey $n = 2$ e $n = 3$, conforme apresentados em [1] e [2], e, por fim, o caso geral conforme [3].

3. Resultados Principais

O principal resultado discutido é o Teorema de Stone-Tukey que garante a existência de um hiperplano $(n-1)$-dimensional, capaz de dividir simultaneamente, em duas partes iguais em medida, n objetos em $\mathbb{R}^n$. Um aspecto central é a exigência de que os objetos considerados sejam compactos, pois essa condição garante que sejam mensuráveis em $\mathbb{R}^n$, permitindo que a formulação do teorema seja válida sem se aprofundar na teoria da medida.

Neste trabalho apresentaremos uma demonstração do Teorema da Panqueca (caso $n = 2$), uma demonstracção do Teorema do Sanduíche de Presunto (caso $n = 3$) e uma demonstração do caso geral desse Teorema. Também ressaltaremos a importância dos resultados preliminares, como o Teorema de Borsuk-Ulam, que assegura que funções contínuas em esferas possuem pontos antípodas com a mesma imagem, e a demonstração de que funções contínuas preservam conjuntos conexos.

4. Conclusão

Encerramos a apresentação destacando que resultados intuitivos, como o ato de dividir um sanduíche ao meio, podem estar profundamente ligados a conceitos sofisticados da Topologia.

Uma dificuldade encontrada foi a questão da mensurabilidade dos objetos. Para contornar a necessidade de utilizar a teoria da medida em toda sua generalidade, optamos por trabalhar com conjuntos compactos, já que estes são mensuráveis na medida de Lebesgue e permitem formular o teorema de maneira mais acessível.

O Teorema de Stone–Tukey mostra, assim, que tais ideias se generalizam para qualquer dimensão, garantindo que é possível dividir igualmente n objetos mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ com um único hiperplano $(n-1)$-dimensional.

5. Referências

[1] KINSEY, L. Christine. *Topology of surfaces.* Springer Science & Business Media, 1997.

[2] KOSNIOWSKI, Czes. *A first course in algebraic topology.* Cambridge University Press, 1980.

[3] MATOUŠEK, Jiří; BJÖRNER, Anders; ZIEGLER, Günter M. *Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry.* Springer, 2003.

[4] MUNKRES, James. R. *Topology.* Prentice Hall, 2000.