



Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Aplicação dos grupos de tranças no estudo dos pontos fixos de aplicações n -valuadas

João Medeiros dos Santos Neves¹, Carolina de Miranda e Pereiro²

¹Universidade Federal do Espírito Santo

²Universidade Federal do Espírito Santo

joao.m.neves@edu.ufes.br, carolina.pereiro@ufes.br

Palavras-chave: Topologia algébrica; grupos de tranças; aplicações n -valuadas; pontos fixos.

1. Introdução

Funções multivaluadas são uma generalização do conceito de função onde a imagem de cada ponto do domínio consiste em um subconjunto do contradomínio. Para diferenciar de funções usuais, denotamos uma função multivaluada ϕ de X em Y por $\phi: X \multimap Y$. Neste trabalho, limitamos o nosso estudo à classe das funções n -valuadas, que são as funções multivaluadas cuja imagem de cada ponto do domínio consiste em exatamente n pontos do contradomínio.

Quando X e Y são espaços topológicos, podemos definir uma noção de continuidade para funções multivaluadas, e em particular para as n -valuadas. Usamos o termo *aplicação n -valuada* para nos referirmos a uma função n -valuada contínua. Podemos então tentar generalizar a teoria de pontos fixos de funções contínuas para este novo contexto, onde dizemos que $x \in X$ é um ponto fixo da aplicação n -valuada $\phi: X \multimap X$ se $x \in \phi(x)$, ou seja, se x é um dos elementos de sua imagem por ϕ .

Existe uma identificação natural entre funções n -valuadas $\phi: X \multimap Y$ e funções $\Phi: X \rightarrow D_n(Y)$ cujo contradomínio $D_n(Y)$ é o n -espaço de configuração não-ordenado de Y , que é o quociente do n -espaço ordenado

$$F_n(Y) := \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n; y_i \neq y_j \text{ se } i \neq j\}$$

pela ação livre de S_n que permuta os índices. É possível mostrar que essa identificação preserva a continuidade.

Por definição, o *grupo de tranças com n cordas* de um espaço X é o grupo fundamental de $D_n(X)$, enquanto que o *grupo de tranças puras com n cordas* de X é o grupo fundamental de $F_n(X)$. Com isso, é possível traduzir problemas topológicos de ponto fixo em problemas algébricos sobre os grupos de tranças do espaço considerado. Essa parece ser uma boa abordagem para estudar pontos fixos de aplicações n -valuadas em superfícies, cujos grupos de tranças são conhecidos.

2. Metodologia

Fazemos uma pesquisa teórica, lendo diversos livros e artigos relacionados ao assunto e reobtendo os resultados publicados em [2] com demonstrações mais simples e elementares sempre que possível, visando tornar a teoria acessível para um leitor com conhecimento básico de topologia, teoria de grupos e conceitos elementares de topologia algébrica como grupo fundamental e homologia.

3. Resultados Principais

Teorema 1. *Existe uma bijeção natural entre funções n -valuadas $\phi: X \multimap Y$ e funções $\Phi: X \rightarrow D_n(Y)$, que faz corresponder a ϕ a função Φ definida por $\Phi(x) = \pi(y_1, \dots, y_n)$, onde $\phi(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Além disso, se Y for Hausdorff, então ϕ é contínua se e somente se Φ o for.*

Teorema 2. *Sejam X um espaço Hausdorff simplesmente conexo com a propriedade do ponto fixo e $\phi: X \multimap X$ uma aplicação n -valuada. Então, ϕ possui pelo menos n pontos fixos. Em particular, segue do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que o disco fechado k -dimensional $\mathbb{D}^k$ possui a propriedade do ponto fixo para aplicações n -valuadas.*

Teorema 3. *Se $n \geq 2$, toda aplicação n -valuada $\phi: \mathbb{S}^{2k} \multimap \mathbb{S}^{2k}$ possui pelo menos n pontos fixos.*

Teorema 4. *Toda aplicação n -valuada $\phi: \mathbb{R}P^{2k} \multimap \mathbb{R}P^{2k}$ possui pelo menos n pontos fixos.*

Teorema 5. *Sejam X uma superfície compacta sem bordo diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}P^2$ e $\phi: X \multimap X$ uma aplicação n -valuada. Então,*

- (a) *ϕ é homotópica a uma aplicação n -valuada livre de pontos fixos se, e somente se, existe um homomorfismo $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow B_{1,n}(X)$ que completa o seguinte diagrama,*

onde $\iota_{1,n}: D_{1,n}(X) \rightarrow X \times D_n(X)$ é a inclusão:

$$\begin{array}{ccc} & & B_{1,n}(X) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow (\iota_{1,n})_* \\ \pi_1(X) & \xrightarrow{(\text{id}_X \times \Phi)_*} & \pi_1(X) \times B_n(X) \end{array}$$

(b) Se ϕ for split e $\widehat{\Phi}$ for um levantamento de ϕ , então ϕ é homotópica a uma aplicação n -valuada livre de pontos fixos se, e somente se, existe um homomorfismo $\widehat{\varphi}: \pi_1(X) \rightarrow P_{n+1}(X)$ que completa o seguinte diagrama, onde $\widehat{\iota}_{n+1}: F_{n+1}(X) \rightarrow X \times F_n(X)$ é a inclusão:

$$\begin{array}{ccc} & & P_{n+1}(X) \\ & \nearrow \widehat{\varphi} & \downarrow (\widehat{\iota}_{n+1})_* \\ \pi_1(X) & \xrightarrow{(\text{id}_X \times \widehat{\Phi})_*} & \pi_1(X) \times P_n(X) \end{array}$$

4. Referências

- [1] BIRMAN, J. S. *Braids, links and mapping class groups*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1975.
- [2] GONÇALVES, D.L.; GUASCHI, J. *Fixed points of n -valued maps, the fixed point property and the case of surfaces—A braid approach*. Indagationes Mathematicae, v. 29, n. 1, p. 91–124, 2018.
- [3] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2001.
- [4] MUNKRES, J. R. *Topology: Pearson New International Edition*. 2. ed. London, England: Pearson Education, 2013.