Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

A Generalização de Comprimento de Intervalos

Heloísa Benício Leles[1]

[1] Universidade Federal do Espírito Santo

heloisa.leles@edu.ufes.br

Palavras-chave: Conjuntos mensuráveis; Medida de Lebesgue; Conjunto de Cantor.

1. Introdução

Conhecemos do cálculo a integral de Riemann que nos permite medir conjuntos de funções definidas em intervalos. Essas técnicas de integração nos permitem achar a área ou o volume de uma região em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Porém, ao tentarmos medir conjuntos mais complicados, nos deparamos com um gigantesco universo cuja integral de Riemann não se aplica. Da necessidade de lidar com tais conjuntos surge a Teoria da Medida, que dá a base rigorosa e necessária para que seja possível medi-los. O objetivo deste pôster é dar uma breve introdução e apresentar os principais conceitos da Teoria da Medida, para que no final, seja possível responder às seguintes perguntas: Qual é o comprimento de um subconjunto de números reais? E nesse contexto, todo subconjunto tem um comprimento? Se o subconjunto for um intervalo o comprimento é conhecido, mas e se não for? Qual é o comprimento dos racionais entre 0 e 1? e dos irracionais?

2. Metodologia

Trata-se de uma pesquisa teórica onde o foco foi analisar a teoria e entender alguns conceitos. A bibliografia utilizada foi "FOLLAND, B. G. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. 2. ed. New York, 1999". Trata-se de um livro a nível de pós-graduação, muitos detalhes são deixado a cargo do leitor, e foi isso que influenciou a escolha do livro, pois o enfoque do projeto foi analisar cada teorema e expandir cada resultado, principalmente os que o autor deixava ocultos.

3. Resultados Principais

Este trabalho possui dois objetivos: o primeiro deles é definir uma medida em alguma σ-álgebra que contenha intervalos na reta tal que a medida em intervalos finitos seja igual ao seu comprimento. Para isso, primeiro será necessário entender o que é uma medida, daí segue a definição:
Uma medida é uma função $\mu : M \to [0, \infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Se $\{E_j\}_1^\infty$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em M, então $\mu(\cup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$.

A função μ é definida sobre uma σ-álgebra M que é uma coleção não-vazia de subconjuntos de um conjunto X que é fechada sob uniões enumeráveis e complementares, além disso, é sempre necessário que o conjunto vazio esteja nela. A importância de definir μ sobre uma σ-álgebra é que nem todos os conjuntos são mensuráveis. Para medir subconjuntos na reta baseada na ideia de que a medida de um intervalo é seu comprimento, é preciso construir uma medida μ partindo de uma função F **crescente** e **contínua à direita**. O caso especial $F(x) = x$ produzirá a medida de comprimento usual. Essa medida é conhecida como a **medida de Lebesgue**. Para construí-la, primeiro é necessário entender alguns conceitos:

- **Medida Completa**: Medida cujo domínio inclui todos os subconjuntos de conjuntos nulos. Ou seja, todos os subconjuntos de um conjunto de medida zero são também mensuráveis.

- **Medida exterior**: É uma função $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ que satisfaz:

  1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
  2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A \subset B$
  3. $\mu^*(\cup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$

- **Conjuntos μ^*-mensuráveis**: Um conjunto é μ^*- mensurável se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \forall E \in X$$

- **Pré-Medida**: É uma função $\mu_0 : A \to [0, \infty]$ que satisfaz:

  1. $\mu_0(\emptyset) = 0$
  2. Se $\{A_j\}_1^\infty$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em A tal que $\cup_1^\infty A_j \in A$, então $\mu_0(\cup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j)$.

Obs: μ_0 é definida sobre a álgebra A, que é uma coleção não-vazia de subconjuntos de um conjunto X que é fechada sob uniões finitas e complementares, contendo o vazio.

- **Família de h-intervalos**: Uma família de h-intervalos é a coleção dos intervalos em $\mathbb{R}$ do tipo $(a, b], (a, \infty)$ ou $\emptyset$, denotada por ϵ.
- **σ-álgebra de Borel**: σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos (ou fechados) em X. Em particular, a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ é a σ-álgebra gerada pelos intervalos abertos, semi-abertos, fechados, e semi-finitos.
- **Medida de Borel**: Medida cujo domínio é uma σ-álgebra de Borel na reta.

A partir destas definições, chegaremos na Medida de Lebesgue.
O segundo objetivo é analisar tal medida dando alguns exemplos de conjuntos e aplicando essa medida neles. Depois de responder às perguntas levantadas na introdução, restará espaço para mais uma: Existe algum conjunto não enumerável cuja medida é 0? Para responder a esta questão, será feita a construção do Conjunto de Cantor, que de fato é um conjunto não enumerável de medida nula.

4. Conclusão

Os exemplos de conjuntos em que aplicaremos a Teoria da Medida são só alguns exemplos legais para poder ilustrar uma teoria tão abstrata, porém, a relevância da Teoria da Medida na matemática moderna é gritante, tendo aplicações em teoria de probabilidade, fractais, e a principal delas, a integral de Lebesgue, que por si só já é um assunto bem extenso com inúmeras outras aplicações. Uma das eventuais dificuldades enfrentadas foi que durante todo o tempo de pesquisa, mostrou-se necessário o domínio de conceitos de análise, topologia, espaços métricos e outros, coisas que só seriam estudadas algum tempo depois na graduação.

5. Referências

[1] FOLLAND, B. G. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. 2. ed. New York, 1999.