Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Equações Diferenciais lineares com Coeficientes Constantes de Ordem Fracionária

Gabriel da Silveira Cozzetti

Universidade Federal do Espírito Santo

gabrielcozzetti@gmail.com

Palavras-chave: Cálculo fracionário; Integral de Riemann–Liouville; Equações diferenciais fracionárias..

Este trabalho aborda o cálculo fracionário sob a formulação de Riemann–Liouville, enfatizando suas diferenças em relação ao cálculo clássico e sua aplicação na resolução de equações diferenciais fracionárias. Foram estudadas as propriedades fundamentais dos operadores integrais e diferenciais fracionários e analisadas quais delas se mantêm ou se modificam em comparação com os operadores de ordem inteira [2]. Também foi realizado o estudo do uso da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais fracionárias de coeficientes constantes [3], obtendo-se a quantidade de soluções linearmente independentes e a forma geral da solução no caso homogêneo. O projeto teve como objetivo introduzir o cálculo fracionário para alunos de graduação e contribuir para o desenvolvimento científico e profissional do estudante envolvido na pesquisa.

1. Introdução

O cálculo fracionário é um ramo da matemática que estende os conceitos de derivada e integral clássicos para ordens reais ou complexas, permitindo descrever fenômenos de forma mais precisa por meio de equações diferenciais fracionárias. Sua origem remonta ao século XVII, mas o interesse contemporâneo nessa teoria deve-se às aplicações em áreas como física, biologia e engenharia, onde modelos fracionários produzem resultados mais condizentes com observações experimentais.

Diferentemente do cálculo clássico, em que a derivada representa a inclinação de uma reta tangente e a integral a área sob uma curva, o cálculo fracionário não possui uma interpretação geométrica direta, mas oferece uma ferramenta poderosa para descrever processos com memória e efeitos não locais. Dentre as diversas formulações existentes, destaca-se a de Riemann–Liouville, amplamente utilizada por sua consistência teórica e relevância histórica. Este trabalho se concentra no estudo dessa formulação, abordando suas propriedades fundamentais e sua aplicação na resolução de equações diferenciais fracionárias de coeficientes constantes.

2. Metodologia

O objetivo geral do trabalho foi introduzir o cálculo fracionário, uma generalização do cálculo clássico que envolve derivadas e integrais de ordem real e positiva, de maneira acessível a alunos de graduação. Em seguida, é realizado o estudo de equações diferenciais fracionárias expressas em termos desses operadores.

A fim de tornar o conteúdo mais acessível, o espaço estudado foi simplificado e restrito a funções reais contínuas em um intervalo fechado da reta. Em geral, o cálculo fracionário é abordado em espaços de funções integráveis mais gerais como o espaço de funções contínuas por partes ou integráveis à Lebesgue.

Além dos objetivos teóricos, o projeto também visou o desenvolvimento da cultura científica do aluno. Com essa finalidade é criado um ambiente de discussão com o orientador, no qual o aluno é motivado a questionar as hipóteses e as demonstrações dos resultados apresentados nas referências bibliográficas. Com isso, o estudante pode tanto generalizar resultados quanto corrigir eventuais erros nas demonstrações.

3. Resultados Principais

Inicialmente foi realizado o estudo das funções especiais Beta e Gama [1], visto que a integral fracionária de Riemann-Liouville depende da função Gama em sua definição, e a função Beta permite simplificar expressões algébricas, uma vez que existe um teorema que possibilita escrevê-la em termos da função Gama.

Posteriormente, foram introduzidas as definições formais da integral e derivada fracionária de Riemann-Liouville [2]. Nesta etapa, estudaram suas propriedades, destacando aquelas que se mantêm ou se perdem em relação ao caso clássico de ordem inteira. Por exemplo, a derivada fracionária da função constante nem sempre é nula, e existe um análogo do Teorema Fundamental do Cálculo para as derivadas fracionárias Riemann-Liouville.

Em seguida, realizou-se o estudo da transformada de Laplace desses operadores ressaltando sob quais condições ela existe. Com isso, torna-se possível resolver equações diferenciais fracionárias de coeficientes constantes por meio da aplicação das transformadas de Laplace [3]. No caso homogêneo, existem N soluções linearmente independentes, onde N é o menor inteiro maior ou igual à maior ordem de derivação da equação. Além disso, foi obtida a expressão geral da solução no caso homogêneo, dada em termos de integrais e derivadas fracionárias da função exponencial.

4. Conclusão

O estudo permitiu compreender as principais propriedades dos operadores integrais e diferenciais fracionários de Riemann–Liouville, assim como sua aplicação na resolução de equações diferenciais fracionárias de coeficientes constantes. Uma continuação natural deste trabalho pode ser feita seguindo a referência [3], onde são apresentados diversos outros resultados sobre equações diferenciais fracionárias, incluindo casos não homogêneos e com coeficientes não-constantes.

Possíveis generalizações incluem o uso da extensão da função Gama para números complexos, permitindo definir integrais e derivadas fracionárias de ordem complexa. Ou ainda, a ampliação do espaço de funções estudado, considerando, por exemplo, funções contínuas por partes ou integráveis à Lebesgue.

5. Agradecimentos

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES), pelo apoio por meio da bolsa de Iniciação Científica Tecnológica (T.O. 951/2023), e ao meu orientador, Prof. Renato Fehlberg Júnior, pela orientação, dedicação e incentivo ao meu desenvolvimento científico e profissional.

6. Referências

[1] Nicoly Longaretti de Souza, Introdução ao cálculo de ordem não inteira, 2022, Trabalho de Conclusão de Curso. Orientador: Maicon José Benvenutti. 95 p.

[2] Kai Diethelm, The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of caputo type, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2004, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.

[3] Kenneth S. Miller and Bertram Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley-Interscience, New York, 1993.