Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

O TEOREMA DE VAGNER-PRESTON

Victor Farles Cavalcante Alves[1],

[1]Universidade Federal do Espírito Santo

victor.f.alves@edu.ufes.br

Palavras-chave: Álgebra; Semigrupos Inversos; Teorema de Vagner-Preston.

O objetivo deste trabalho é dar uma introdução aos semigrupos inversos, uma generalização de grupos, e provar o teorema de Vagner-Preston, análogo ao Teorema de Cayley.

1. Introdução

Semigrupos inversos foram descritos pela primeira vez por Vagner [3], em 1952. Nessa primeira descrição, tais estruturas foram chamadas de grupos generalizados. Outra abordagem (independente) foi feita por Preston [2], em 1954. Nos dois casos, a motivação para o estudo de semigrupos inversos foi a mesma, estudar injeções parciais de conjuntos. O que levou os dois a um teorema de representação (análogo ao teorema de Cayley), hoje, chamado de Teorema de Vagner-Preston.

2. Metodologia

Este trabalho vem de pesquisa teórica de natureza conceitual e bibliográfica, voltada ao estudo da estrutura dos semigrupos inversos e da formulação do Teorema de Vagner-Preston. A metodologia apoia-se na análise e sistematização de definições, proposições e demonstrações clássicas presentes na literatura de referência, como Howie (1995)

3. Resultados Principais

Um conjunto S com uma operação $\cdot$ é chamado de semigrupo se esta operação é associativa. Um subsemigrupo de S é um subconjunto de S que é fechado com a operação

herdada de S. Sendo a um elemento de S, definimos dois subsemigrupos importantes $Sa := \{xa : x \in S\}$ e $aS := \{ax : x \in S\}$.
O inverso generalizado de um elemento a de S é um elemento a^* de S tal que $a \cdot a^* \cdot a = a$ e $a^* \cdot a \cdot a^* = a^*$. Um semigrupo S é dito inverso se todo a em S possui um único inverso generalizado. Tal inverso será denotado por a^{-1}.
Seja X um conjunto qualquer, definimos $\mathcal{I}_X$ como o conjunto de todas as funções injetivas de subconjuntos de X em X. Não é difícil mostrar que $\mathcal{I}_X$, com a operação de composição de funções, é um semigrupo, na verdade temos o

Teorema 3.1. *$\mathcal{I}_X$, com a operação de composição de funções $\circ$, é um semigrupo inverso.*

Com esse resultado, chamaremos $\mathcal{I}_X$ de semigrupo inverso simétrico.

Lema 3.1 (1)**.** *Seja S um semigrupo contendo um semigrupo inverso I como subsemigrupo. Então:*

1. $Se = Sf \Rightarrow e = f$, $\forall e, f$ *idempotentes de* S;
2. $Se \cap Sf = Sef$ *e* $eS \cap fS = efS$, $\forall e, f$ *idempotentes de* S;
3. $Saa^{-1} = Sa^{-1}$, $Sa^{-1}a = Sa$, $aa^{-1}S = aS$ *e* $a^{-1}aS = a^{-1}S$, $\forall a \in I$.

Munido deste lema, será possível provar o

Teorema 3.2 (Vagner-Preston)**.** *Todo semigrupo inverso S é isomorfo a um subsemigrupo de um semigrupo inverso simétrico $\mathcal{I}_X$.*

4. Conclusão

O Teorema de Vagner-Preston nos permite ver todos os semigrupos inversos como subsemigrupos de semigrupos inversos simétricos. Dessa forma, teoremas que são verdadeiros para subsemigrupos de semigrupos inversos simétricos, são igualmente verdadeiros para semigrupos em geral.

5. Referências

[1] HOWIE, John M. *Fundamentals of semigroup theory.* Oxford University Press, 1995.

[2] PRESTON, Gordon B. *Inverse semi-groups.* Journal of the London Mathematical Society, 1954.

[3] VAGNER, Viktor V. *Generalized groups.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1952.