Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

INICIAÇÃO AOS MÓDULOS

Cecilya Lemos Nascimento[1], Thiago da Silva[2]

[1]Uniersidade Federal do Espírito Santo

[2]Uniersidade Federal do Espírito Santo

cecilya.nascimento@edu.ufes.br, thiago.silva@ufes.br

Palavras-chave: Módulos; Álgebra Comutativa; Teoria de Anéis.

Este trabalho apresenta uma introdução à teoria de módulos sobre anéis comutativos com unidade, explorando suas definições, propriedades e resultados fundamentais. Por meio de uma abordagem teórica e construtiva, são discutidos conceitos como submódulos, homomorfismos, módulos quocientes, soma direta, módulos livres e o Lema de Nakayama. O objetivo é oferecer uma base sólida para a compreensão dessa estrutura algébrica que generaliza espaços vetoriais e possui aplicações em diversas áreas da matemática, como álgebra homológica e geometria algébrica.

1. Introdução

A teoria de módulos sobre um anel comutativo com unidade generaliza de maneira natural o conceito de espaço vetorial, permitindo que técnicas lineares sejam aplicadas em contextos algébricos mais amplos. Este tema é central na álgebra moderna, não apenas para o entendimento da estrutura dos anéis, mas também como ferramenta essencial em áreas como topologia algébrica e geometria algébrica. Neste trabalho, apresentamos uma introdução aos conceitos fundamentais da teoria de módulos, com ênfase em definições, exemplos, propriedades e resultados clássicos, visando oferecer uma base sólida para estudos mais avançados.

2. Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido a partir do estudo de textos fundamentais em álgebra comutativa, com ênfase na construção lógica dos conceitos. Partimos da definição básica de módulos e fomos progressivamente explorando suas propriedades e aplicações. A organização do conteúdo segue uma linha natural de aprendizado, onde cada novo tópico se apoia nos anteriores, criando uma compreensão sólida e interligada dos temas.

3. Resultados Principais

Definição 3.1. *Sejam A um anel e M um conjunto não-vazio com operações:*

$$+ : M \times M \longrightarrow M, \quad \cdot : A \times M \longrightarrow M$$

Dizemos que $(M, +, \cdot)$ é um AA-módulo se satisfaz os oito axiomas de estrutura módulo, incluindo comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro e inversos, distributividade e compatibilidade com a unidade de A.

Proposição 3.1 (Propriedades Básicas)**.** *Seja M um A-módulo. Então:*

a) *O elemento neutro da soma em M é único;*

b) *O inverso aditivo de qualquer elemento em M é único;*

c) $0_A \cdot v = 0_M, \forall v \in M$;

d) $a \cdot 0_M = 0_M, \forall a \in A$;

e) $(-1_A) \cdot v = -v, \forall v \in M$.

Definição 3.2. *Seja M um A-módulo. Um subconjuto $N \subseteq M$ é chamado A-submódulo de M se:*

1. $0_M \in N$;
2. $u + v \in N, \forall u, v \in N$;
3. $av \in N, \forall a \in A$ *e* $v \in N$.

Proposição 3.2. *Seja M um A-módulo. Se $\{N_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de A-submódulos de M, então $\bigcap_{i \in I} N_i$ é um A-submódulo de M.*

Definição 3.3. *Sejam M e N A-módulos. Um morfismo de A-módulos (ou homomorfismo de A-módulos) é uma função $f : M \longrightarrow N$ que satisfaz:*

1. $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in M$;
2. $f(av) = af(v), \forall a \in A$ *e* $v \in M$.

Proposição 3.3. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de A-módulos. Então: f é injetiva se, e somente se,* $\ker f = \{0_M\}$.

Teorema 3.1 (1° Teorema de Isomorfismos de A-módulos)**.** *Seja $f : M \longrightarrow N$ um isomorfismo de A-módulos. Então*

$$\widetilde{f} : \frac{M}{\ker f} \longrightarrow \Im f$$

$$v + \ker f \mapsto f(v)$$

é um isomorfismo de A-módulos.

Definição 3.4. *A soma direta da coleção $\{M_i\}_{i\in I}$ de A-módulos é*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ v \in \prod_{i\in I} M_i \mid \mathrm{supp}(v) \text{ é finito} \right\}.$$

$$\text{Para cada } v = (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i, \mathrm{supp}(v) := \{i \in I \mid v_i \neq 0_{M_i}\}.$$

Teorema 3.2. *Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ uma coleção de A-módulos, N um A-módulo e seja $\{\psi_i : M_i \longrightarrow N\}_{i\in I}$ uma coleção de morfismos de A-módulos. Então, existe um único morfismo de A-módulos $\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ tal que $\psi \circ \delta_j = \psi_j, \forall j \in I$ (coproduto).*

Definição 3.5 (Módulo Livre)**.** *Um A-módulo M é livre se existe um conjunto I tal que $M \cong A^{(I)}$*

Proposição 3.4. *O conjunto $\{e_i \mid i \in I\}$, onde $e_i - \delta_i(1_A)$, forma uma base para $A^{(I)}$.*

Teorema 3.3. *Seja M um A-módulo. Então M é livre se, e somente se, M admite pelo menos uma A-base.*

Lema 3.1 (Lema de Nakayama)**.** *Sejam M um A-módulo finitamente gerado, $\mathfrak{a}$ um ideal de A tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{J}_A$ e $\mathfrak{a}M = M$. Então, $M = \{0_M\}$.*

Corolário 3.1. *Sejam M um A-módulo finitamente gerado, $\mathfrak{a}$ um ideal de $A, \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{J}_A, N$ um A-submódulo de M tal que $M = \mathfrak{a}M + N$. Então, $N = M$.*

Dentre os resultados demonstrados no estudo, destacam-se o Primeiro Teorema de Isomorfismo e o Lema de Nakayama, que possuem implicações profundas na estrutura de módulos e anéis.

4. Conclusão

O estudo realizado permitiu uma compreensão sólida dos conceitos iniciais da teoria de módulos, evidenciando sua importância como generalização de estruturas lineares e sua aplicabilidade em diversas áreas da matemática. Os resultados clássicos obtidos, como o Teorema de Isomorfismo e o Lema de Nakayama, não apenas ilustram a elegância da teoria, mas também abrem caminho para investigações futuras.

5. Referências

[1] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *An introduction to commutative algebra.* Reading: Addison-Wesley, 1969.