Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Sistemas Quase Lineares e Estabilidade via Lyapunov

Pedro Augusto de Oliveira Borges[1], Daniela Paula Demuner[2]

[1]Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFES

[2]Professora Associada do Departamento de Matemática - UFES

pedro.a.borges@edu.ufes.br, daniela.demuner@ufes.br

Palavras-chave: Sistemas Quase Lineares; Estabilidade; Modelo Predador-Presa.

1. Introdução

O estudo dos sistemas quase lineares está relacionado intimamente ao estudo das equações diferenciais ordinárias (EDOs), que descrevem processos nos quais a mudança em relação a uma medida ou dimensão é causada pelo próprio processo, surgiram no século XVII, com contribuições importantes de Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli.

A busca por soluções mais específicas para essas equações, frequentemente usadas para modelar sistemas dinâmicos, levou ao desenvolvimento de técnicas voltadas para dinâmicas populacionais. Os sistemas que são usados para modelar essas dinâmicas podem ser lineares, não-lineares ou a junção (os quase lineares). Como muitas dessas equações não têm soluções analíticas, é necessário estudar sua análise qualitativa, adentrando no problema da linearização e estabilidade desses sistemas. O objetivo desse trabalho é apresentar o conceito de sistemas quase lineares, e a sua relação com a teoria da estabilidade no sentido de Lyapunov, além do seu papel na modelagem matemática em sistemas dinâmicos, mas especificamente em dinâmicas populacionais, tendo como exemplo o modelo predador-presa.

2. Metodologia

Partindo do estudo dos textos da referência [1], inspirou o estudo mais aprofundado dos sistemas quase lineares, e procurou-se textos mais recentes para relacionar a modelagem e a teoria de estabilidade com esses sistemas. A teoria não é nova, mas há muitos trabalhos recentes aprofundando neste tema, relacionando mais ainda com a teoria de sistemas dinâmicos.

Portanto, a metodologia do pesquisa fora teórica com uma revisão bibliográfica simples. Outras referências estudadas foram [2] e [3].

3. Resultados Principais

Os sistemas lineares são expressos por $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, $b(t)$ é um vetor $n \times 1$ chamado forçante e $x(t)$ é o vetor de estado $n \times 1$. Nos sistemas não lineares, a dinâmica é descrita por $x'(t) = f(x)$, onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ não é linear em x. Além disso, se faz necessário a introdução da definição de um sistema dinâmico autônomo.

Definição 1. *Um sistema dinâmico autônomo é aquele cuja a evolução depende apenas do estado atual*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Definição 2. *Dizemos que* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *é um ponto crítico do sistema 1 se* $f(\overline{x}) = 0$.

Como a estabilidade de pontos críticos em sistemas não lineares geralmente não pode ser obtida de forma explícita, utiliza-se uma aproximação linear em torno do ponto crítico.

O sistema é então escrito como $x'(t) = A(t)x(t)+g(x)$ onde $g(0) = 0$ e $g(x)$ satisfaz

$$\frac{|g(x)|}{|x|} \to 0 \quad \text{quando } x \to 0.$$

Quando essa condição é válida, o sistema é dito **quase linear** na vizinhança do ponto crítico $\overline{x} = 0$.

Teorema 1. *Um sistema do tipo*

$$\begin{cases} x_1' &= F(x_1, x_2) \\ x_2' &= G(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2}$$

é dito quase linear em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ *de um ponto crítico* $\overline{x} \in U$ *se as funções* $F(x_1, x_2)$ *e* $G(x_1, x_2)$ *são duas vezes diferenciáveis e de classe* C^1 *em* U.

Teorema 2. ***(Critério de Estabilidade de Lyapunov)*** *Considere o PVI* $x'(t) = f(x)$ *com condição inicial* $x(t_0) = x_0$ *um sistema. Sejam* $\overline{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ *um ponto crítico e* $V : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1. *E, assuma que,*

- *$V(x)$ é localmente definida positiva em torno de $\overline{x}$.*
- *$V'(x)$ é localmente semi-definida negativa em torno de $\overline{x}$.*

Então $\overline{x}$ é ponto crítico estável.

Partindo do Teorema de Lyapunov, propõe o uso de uma função de energia (ou função de Lyapunov) $V(x)$, que deve ser positiva. A derivada negativa dessa função ao longo da trajetória do sistema garante que o sistema está se movendo em direção ao ponto crítico.

4. Conclusão

A estabilidade no sentido de Lyapunov é fundamental no estudo dos sistemas quase lineares, pois, por não possuírem solução explícita, sua análise deve ser feita de forma qualitativa. Dessa maneira, é possível caracterizar a estabilidade em uma vizinhança próxima aos pontos críticos e obter informações relevantes sobre o plano de fase do sistema. Outra ferramenta importante é a estabilidade por linearização, que estabelece uma relação entre as trajetórias e o comportamento do sistema quase linear e do sistema linear correspondente.

Modelos baseados nesse tipo de sistema aparecem em diversas áreas do conhecimento. Nas ciências biológicas e agrárias, são utilizados no controle biológico de pragas; nas ciências econômicas, na descrição de flutuações em bolsas de valores e na análise de competição entre mercados; e nas ciências ambientais, em estudos relacionados à captura e emissão de carbono, entre outros exemplos. Assim, observa-se que os sistemas quase lineares constituem uma estrutura matemática versátil, capaz de representar uma ampla variedade de fenômenos reais por meio de leis de formação semelhantes, variando apenas seus parâmetros.

5. Referências

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos; JUNIOR, Wilson C. Ferreira. *Equações Diferenciais com Aplicações.* São Paulo: HARBRA ltda., 1988.

[2] BESSA, Gislene R. *Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelo presa-predador e competição entre espécies.* Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2011.

[3] NATTI, Paulo Laerte; et al. *Modelagem Matemática e Estabilidade de Sistemas Predador-Presa.* LONDRINA — PR: Universidade Estadual de Londrina, 2019.