Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Topologia Compacto-Aberta e Propriedades

Tales da Silva Amaral[1], Maico Felipe Silva Ribeiro[2]

[1]Universidade Federal do Espírito Santo

[2]Universidade Federal do Espírito Santo

tales.amaral@edu.ufes.br, maico.ribeiro@ufes.br

Palavras-chave: Topologia, Topologia compacto-aberta

1. Introdução

Muitas vezes em topologia precisamos trabalhar com o espaço de funções X^Y, por exemplo quando queremos definir classes de homotopia $[X, Y]$. Uma forma de dar estrutura a esse conjunto é utilizando a topologia compacto aberta. Esse trabalho busca definir e apresentar algumas propriedades interessantes da topologia compacto aberta.

2. Metodologia

A metodologia foi uma Pesquisa Teórica que envolve análise de teorias e demonstrações. Também foi utilizada uma revisão bibliográfica, que consiste de análise de publicações, artigos ou livros sobre determinado tema.

3. Resultados Principais

Definição 3.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathfrak{S}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\mathfrak{S} \subset \tau$. Dizemos que $\mathfrak{S}$ é uma* ***sub-base*** *de τ se a coleção $\mathcal{B}$ de interseções finitas de elementos de $\mathfrak{S}$ é uma base de τ. Cada elemento do conjunto $\mathfrak{S}$ é chamado de* ***conjunto sub-básico em*** *X.*

Definição 3.2. *Sejam X e Y espaços topológicos. A* ***menor*** *topológia em $\mathcal{C}(X, Y)$ contendo todos os subconjuntos da forma*

$$N(K,U) = \{f \in \mathcal{C}\,(X,Y)\,; f\,(K) \subset U \; com \; K \subset X \; compacto, \; U \subset Y \; aberto\}$$

*é chamada **Topologia Compacto - Aberta** . Finalmente, vamos denotar a topologia Compacto - Aberta por τ_{ca}. A topologia usual para $\mathcal{C}(X,Y)$ será a Compacto - Aberta.*

Definição 3.3. *Sejam X, Y espaços topológicos, definimos a **função avaliação** :*

$$\begin{aligned} e : \mathcal{C}(X,Y) \times X &\to Y \\ (f,x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Proposição 3.4. *Sejam X, Y espaços topológicos e X Hausdorff e localmente compacto. Então a função avaliação é contínua*

Teorema 3.5 (A Lei Exponencial)**.** *Sejam X, Y e Z espaços topológicos arbitrários. Se X é Hausdorff localmente compacto, então a função exponencial θ é uma bijeção. Se além disso Z for Hausdorff, então a função exponencial será um homeomorfismo. Em outras palavras, temos que sob condições boas o homeomorfismo*

$$Y^{X \times Z} \cong \left(Y^X\right)^Z$$

Proposição 3.6. *Sejam X, Y, Z espaços topológicos com Y Hausdorff localmente compacto, então $\circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$ é contínua.*

Exemplo 3.7. *A topologia compacto aberta também nos permite definir os seguintes funtores*

$$\mathcal{C}(Z,-) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$$

$$X \longmapsto \mathcal{C}(Z,-)(X) \coloneqq \mathcal{C}(Z,X)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] \arrow[r, phantom, "f \longmapsto \varphi"] & \mathcal{C}(Z,X) \arrow[d, "\varphi"] & g \arrow[d, mapsto] \\
Y & \mathcal{C}(Z,Y) & f \circ g
\end{tikzcd}$$

e

$$\mathcal{C}(-,Z) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$$

$$X \longmapsto \mathcal{C}(-,Z)(X) := \mathcal{C}(X,Z)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & & \mathcal{C}(X,Z) \\
Y & & \mathcal{C}(Y,Z) \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad f \longmapsto \varphi$$

4. Conclusão

Dentre os resultados enunciados, sem dúvidas o mais poderoso é a Lei Exponencial. Com a Lei Exponencial, podemos por exemplo provar a equivalência $[SX, Y] \cong [X, \Omega Y]$. Também é possível demonstrar que duas funções $f, g : X \to Y$ são homotópicas se, e somente se, estão na mesma componente conexa por caminhos no espaço Y^X, visto que $I = [0,1]$ é Hausdorff localmente compacto.

5. Referências

[1] MUNKRES, James R. *Topology.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[2] SWITZER, Robert M. *Algebraic Topology - Homotopy and Homology.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2002.