Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Dinâmica Discreta: O caos através da função logística

Luiza Chiabai dos Santos[1], Ginnara Mexia Souto[2]

[1,2]Universidade Federal do Espírito Santo

luiza.chibai@gmail.com, ginnara.souto@ufes.br

Palavras-chave: modelagem; sistemas discretos; funções caóticas.

1. Introdução

A dinâmica discreta permite analisar a estabilidade e modelar o comportamento de sistemas complexos e não lineares, como os regimes caóticos. Em especial, quando aplicada à Biologia na modelagem populacional, é crucial para entender e prever a dinâmica de populações, o que auxilia na tomada de descisões nas áreas da saúde, ecologia e economia, por exemplo.

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa teórica, realizada através de uma atividade desenvolvida no PET Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), intitulada Estudo Dirigido. O objetivo deste trabalho consiste em realizar uma introdução aos sistemas dinâmicos discretos a partir de algumas definições e teoremas da área e, com esses conhecimentos prévios, apresentar uma aplicação em um modelo de crescimento populacional.

2. Metodologia

O estudo apresentado a seguir foi baseado nos resultados do livro *A first course in discrete dynamical systems* de Richard A. Holmegren e teve como conteúdos prévios tópicos de análise real, como continuidade e derivação e também tópicos de topologia na reta, como ponto fixo. Para a melhor compreensão dos objetos estudados, foi utilizado o software Geogebra. A partir desses conteúdos foram trabalhados pontos periódicos, atratores e repulsores, órbitas e bifurcações, até a obtenção dos resultados adiante.

3. Resultados Principais

Um sistema dinâmico discreto pode ser caracterizado como uma função que é composta por ela mesma diversas vezes, o que chamamos de *iteração de funções*. Por exemplo, dada a função $f(x) = x^3$, a sua segunda iterada, é $f^2(x) = (x^3)^3 = x^9$. O comportamento dos pontos a partir das iterações da função é chamado de dinâmica da função, com isso, é possível modelar diversos problemas práticos, como o crescimento de uma população.

Em geral, modelos com uma função do tipo $f(x) = px$ são chamados de modelo exponencial. Esse tipo de função tem suas limitações para modelar problemas de crescimento populacional, visto que, dado um $x > 1$ real, $\lim_{n\to\infty} f(x)^n = 0$ se $|p| < 1$ e $\lim_{n\to\infty} f(x)^n = \infty$ se $|p| \geq 1$.

Um modelo mais sofisticado para este problema é feito utilizando a função logística, dada por $h(x) = rx(1-x)$. Analisando a dinâmica da função logística quando $r > 2+\sqrt{5}$ é possível obter os seguintes resultados:

I. O conjunto de pontos que permanecem no intervalo $[0, 1]$ com as iterações de h formam um conjunto de *Cantor*. Denotando esse conjunto por Λ, definimos $\Lambda = \{x|h^n(x) \in [0, 1]\}$. Prova-se que os pontos periódicos de Λ são densos em Λ. Assim, os pontos periódicos de h são densos em Λ.

II. $h : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ é *topologicamente transitiva* em Λ. O que significa que, para quaisquer intervalos abertos U e V que intersectam Λ, existem $z \in U \cap \Lambda$ e um natural n tal que $h^n(z) \in V$.

III. $h : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ exibe *sensibilidade às condições iniciais*. Ou seja, existe algum $\delta > 0$ tal quepara quaisquer $x \in \Lambda$ e $\epsilon > 0$, existem $y \in \lambda$ e um natural n tais que $|x - y| < \epsilon$ e $|h^n(x) - h^n(y)| > \delta$.

Com isso, conclui-se que função logística, $h(x) = rx(1-x)$, é *caótica* (DEVANEY, 1989). As funções caóticas possuem uma certa regularidade, evidenciada pelo fato de que sempre é possível encontrar uma órbita periódica em cada vizinhança de cada ponto do domínio. Por outro lado, o domínio é bem misturado a partir das iterações, pois ao escolher qualquer conjunto aberto do domínio, é possível encontrar um ponto em qualquer outro conjunto aberto que é levado ao primeiro conjunto através da iteração da função. Além disso, mesmo as pequenas mudanças na condição inicial podem surtir em resultados excessivamente diferentes sob a iteração da função.

Buscando exemplificar uma aplicação da função logística em um modelo de crescimento populacional, considera-se uma população de peixes que cresce segundo a função $h(x) = rx(1 - x/N)$, com $N = 1000$, $r = 4$ e x em anos. Tomando o número inicial de peixes como $a_1 = 200$, nos próximos 5 anos teremos:

- $a_2 = h(a_1) = 4 \cdot 200(1 - \frac{200}{1000}) = 640$
- $a_3 = h(a_2) = 4 \cdot 640(1 - \frac{640}{1000}) \approx 922$

  ...
- $a_6 = h(a_5) = 4 \cdot 585(1 - \frac{822}{1000}) \approx 585$

Agora, tomando $a_1 = 205$, nos próximos 5 anos teremos:

- $a_2 = h(a_1) = 4 \cdot 205(1 - \frac{200}{1000}) \approx 652$
- $a_3 = h(a_2) = 4 \cdot 562(1 - \frac{652}{1000}) \approx 908$

  ...
- $a_6 = h(a_5) = 4 \cdot 891(1 - \frac{891}{1000}) \approx 388$

Após 5 anos, é notável a diferença da população partindo de valores iniciais próximos. Isso ocorre porque h é caótica quando $r = 4$.

4. Conclusão

O estudo dos sistemas dinâmicos discretos, especialmente por meio da função logística, revela como equações aparentemente simples podem descrever comportamentos extremamente complexos.

Em complemento, a variação do parâmetro r na função logística desempenha um papel central na definição do comportamento do sistema. Quando o parâmetro de crescimento é pequeno, a sequência tende a estabilizar-se em um valor fixo, representando um equilíbrio populacional. À medida que esse parâmetro aumenta, surgem oscilações periódicas e, posteriormente, comportamentos caóticos. Essa transição entre estabilidade e caos evidencia sua relevância no estudo de sistemas dinâmicos.

5. Referências

[1] HOLMGREN, Richard A. *A first course in discrete dynamical systems.* Nova Iorque: Springer, 1996.

[2] DEVANEY, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd edition.* Addison-Wesley, 1989