Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Teoremas de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Fracionárias de Caputo

Débora Vieira Araújo Damasceno[1], Ginnara Mexia Souto[2]

[12]Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFES

debora.damasceno@edu.ufes.br, ginnara.souto@ufes.br

Palavras-chave: Cálculo Fracionário; Derivada de Caputo; Existência e Unicidade.

1. Introdução

O cálculo fracionário estende as operações de derivação e integração para ordens não inteiras, permitindo modelar fenômenos com memória e não-localidade em diversas áreas como física e engenharia. No âmbito desta teoria, destacam-se os operadores fundamentais: o operador integral fracionário de Riemann-Liouville J^α, definido para $\alpha > 0$ por $J_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$, e o operador diferencial fracionário de Riemann-Liouville D^α, dado por $D_a^\alpha f := D^m J_a^{m-\alpha} f$ com $m \in \mathbb{N}$, onde $m - 1 \leq \alpha < m$. Dentre os operadores fracionários, a derivada de Caputo destaca-se por permitir condições iniciais em termos de derivadas de ordem inteira, tornando-a adequada para problemas de valor inicial. Este trabalho apresenta os principais resultados de existência e unicidade para equações diferenciais envolvendo a derivada de Caputo, estabelecendo condições suficientes para garantir soluções únicas utilizando ferramentas da Análise.

2. Metodologia

A abordagem metodológica adotada neste trabalho é teórica, baseando-se em pesquisa bibliográfica especializada e demonstrações matemáticas. O objeto central de estudo é o problema de valor inicial para equações diferenciais fracionárias no sentido de Caputo, formalmente definido por,

$$ {}^{c}D_{t_0}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 $$

onde $m = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$, e $m = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N}$, e ${}^{c}D_{t_0}^{\alpha}$ denota o operador derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha > 0$, definido por

$$ {}^{c}D_{t_0}^{\alpha} f := D_{t_0}^{\alpha} \left[f - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x - t_0)^k}{k!} D^k f(t_0) \right]. $$

O ponto de partida consiste em estabelecer a equivalência fundamental entre a formulação diferencial acima e uma equação integral de Volterra. Especificamente, demonstra-se que o problema de valor inicial é equivalente à equação integral,

$$ y(t) = T(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau, $$

onde $T(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!} y_0^{(k)}$ representa o polinômio de Taylor que incorpora as condições iniciais do problema. Para estabelecer os resultados de existência e unicidade, a estratégia consiste em estudar o operador integral A definido por,

$$ (Ay)(t) = T(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau $$

e demonstrar que este operador possui um único ponto fixo no espaço de funções contínuas apropriado. A existência do ponto fixo é estabelecida mediante a aplicação do Teorema do ponto fixo de Schauder, que requer a compacidade relativa da imagem do operador, enquanto a unicidade é obtida através do Teorema do ponto fixo de Banach, que exibe que o operador é uma contração em um espaço métrico completo.

3. Resultados Principais

Os principais resultados deste trabalho consistem em teoremas de existência e unicidade que estabelecem condições suficientes para o problema de valor inicial envolvendo a derivada de Caputo.

Teorema 1 (Existência). Seja $f : G \to \mathbb{R}$ uma função contínua no domínio compacto $G \subset \mathbb{R}^2$, definido por:

$$ G = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [t_0, t_0 + h^*], \left| y - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!} y_0^{(k)} \right| \leq K \right\} $$

para constantes $h^* > 0$ e $K > 0$. Então, existe $h > 0$ e pelo menos uma função $y \in C[t_0, t_0 + h]$ que resolve o problema de valor inicial.

Teorema 2 (Unicidade). Sob a hipótese adicional de que f satisfaz uma condição de Lipschitz uniforme em relação à segunda variável, então a solução do problema de valor inicial é única no intervalo $[t_0, t_0 + h]$.

A demonstração destes resultados baseia-se em propriedades fundamentais do operador integral A. Para a existência, verifica-se que A aplica um conjunto fechado e convexo de funções contínuas em si mesmo e que sua imagem é relativamente compacta, condições que permitem a aplicação do Teorema de Schauder. Para a unicidade, estabelece-se a estimativa fundamental, onde

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_\infty \leq \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(1 + \alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todas as funções $y, \tilde{y}$ no domínio considerado. A convergência da série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)}$, que coincide com a função Mittag-Leffler $E_\alpha(Lh^\alpha)$, garante que iteradas suficientemente altas do operador A são contrações, assegurando assim a unicidade do ponto fixo. Vale destacar que a função Mittag-Leffler $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ desempenha um papel crucial na teoria, generalizando a função exponencial clássica e aparecendo naturalmente nas soluções de equações diferenciais fracionárias lineares. Suas propriedades de convergência são essenciais para garantir a validade das estimativas utilizadas na demonstração da unicidade.

4. Conclusão

Os resultados apresentados fornecem uma base sólida para o estudo de equações diferenciais fracionárias no sentido de Caputo. A abordagem baseada na formulação integral equivalente e na aplicação de teoremas de ponto fixo mostrou-se eficaz para estabelecer condições suficientes para existência e unicidade de soluções.

As condições obtidas revelam analogia com o caso clássico de equações diferenciais ordinárias, adaptadas às particularidades dos operadores fracionários. A teoria estabelecida abre perspectivas para investigações futuras, incluindo o estudo da dependência contínua das soluções e a extensão para sistemas de equações.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

5. Referências

[1] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Springer, 2010.

[2] SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach, 1993.