Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Cálculo fracionário e suas diferenças quanto ao caso clássico

Ana Clara Maier Schilive

Universidade Federal do Espírito Santo

ana.schilive@edu.ufes.br

Palavras-chave: cálculo fracionário; integral de Riemann Liouville; derivada fracionária.

O presente trabalho tem como objetivo introduzir os conceitos fundamentais do Cálculo Fracionário, apresentando suas principais definições, propriedades e resultados teóricos. São abordadas as funções especiais Gama e Beta, que desempenham papel essencial na generalização do operador integral e na definição de derivadas fracionárias.

A Integral Fracionária de Riemann-Liouville é apresentada como extensão natural da integral de ordem inteira, permitindo a formulação de operadores de integração de ordem real positiva. Posteriormente, define-se a Derivada Fracionária de Riemann-Liouville, discutindo suas propriedades, linearidade e comportamento em funções elementares. São demonstradas relações análogas ao Teorema Fundamental do Cálculo, além de resultados que evidenciam as diferenças entre o cálculo clássico e o fracionário, como o fato de a derivada fracionária de uma constante não ser necessariamente nula e a não comutatividade entre derivadas fracionárias de ordens diferentes.

1. Introdução

O estudo do Cálculo Fracionário surge como uma extensão do cálculo diferencial e integral clássico, buscando generalizar os operadores de derivação e integração para ordens não inteiras. A ideia de derivar ou integrar uma função uma "meia vez" origina-se na correspondência entre Leibniz e L'Hôpital, em 1695, sendo posteriormente desenvolvida por matemáticos como Euler, Riemann, Liouville, Fourier e Abel. Apesar de sua formulação teórica consolidar-se apenas no século XIX, o cálculo fracionário continua sendo objeto de estudos e aplicações em diversos campos da matemática e das ciências aplicadas. Neste trabalho, apresenta-se uma introdução aos conceitos fundamentais do cálculo de ordem real e positiva , é abordada a formulação da integral e derivada de Riemann-Liouville , e suas diferenças quanto ao caso clássico, por exemplo, o Teorema Fundamental do Cálculo em sua forma clássica não é diretamente aplicável.

2. Metodologia

A metodologia adotada neste trabalho é de caráter teórico e bibliográfico, fundamentando-se na análise e interpretação de conceitos, definições e propriedades do cálculo fracionário. O estudo foi conduzido por meio da revisão de uma dissertação e livros que tratam do tema, com destaque para a formulação de Riemann-Liouville. Buscou-se compreender a construção matemática dessa definição, a partir da integral de ordem não inteira, e suas implicações no contexto do cálculo diferencial e integral. Além disso, a pesquisa incluiu a aplicação de métodos analíticos para deduzir expressões e verificar propriedades dos operadores fracionários. Assim, o trabalho se caracteriza como uma investigação de natureza teórica, voltada à consolidação conceitual e à compreensão das bases matemáticas que sustentam o cálculo de ordem não inteira.

3. Resultados Principais

O desenvolvimento deste trabalho iniciou-se com o estudo das funções especiais Gama e Beta [1] e , que desempenham papel essencial na formulação do cálculo fracionário. A função Gama, ao generalizar a função fatorial para números reais e complexos, permite expressar integrais n-ésimas como uma única integral, o que conduz naturalmente à definição da integral fracionária de Riemann-Liouville. Já a função Beta aparece como ferramenta complementar, possibilitando simplificações algébricas e a demonstração de propriedades fundamentais da integral fracionária, como a lei dos expoentes para operadores integrais.

A partir dessas construções, definiu-se a Integral Fracionária de Riemann-Liouville [2], que estende o conceito de integração para ordens reais positivas, mantendo propriedades de linearidade e associatividade. Verificou-se que, para funções do tipo potência, a aplicação da integral fracionária conduz a expressões envolvendo a razão entre funções Gama, evidenciando a coerência da generalização proposta.

Posteriormente, foi introduzida a Derivada Fracionária de Riemann-Liouville [2], obtida pela combinação entre a derivada clássica e a integral fracionária. Essa formulação mantém a linearidade do operador, mas altera propriedades fundamentais do cálculo diferencial tradicional. Em particular, observou-se que a derivada fracionária de uma constante não é nula, e que, diferentemente das derivadas inteiras, as derivadas fracionárias não comutam entre si.

Também foram analisadas relações análogas ao Teorema Fundamental do Cálculo, mostrando que, embora o resultado clássico não se mantenha integralmente, é possível formular uma versão adaptada válida no contexto fracionário. Essa versão garante que a composição entre os operadores de derivação e integração fracionária reproduz a função original sob condições adequadas de regularidade.

4. Conclusão

A pesquisa possibilitou uma melhor compreensão das principais propriedades dos operadores integrais e diferenciais fracionários de Riemann–Liouville. Uma continuação natural deste estudo seria se aprofundar em outras formulações de integrais e derivadas , e também algumas aplicações.

Entre as possíveis extensões, destaca-se o uso da generalização da função Gama para números complexos, o que permite definir integrais e derivadas fracionárias de ordem complexa conforme a referência [3].

5. Agradecimentos

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) pelo apoio por meio da bolsa de Iniciação Científica Tecnológica (T.O. 951/2023), que tornou este trabalho possível.

Agradeço também a Profª. Drª. Ginnara Mexia Souto e ao Prof. Dr. Renato Fehlberg Júnior pela orientação, pela atenção ao longo do projeto e pelo incentivo constante ao meu aprendizado e crescimento acadêmico.

6. Referências

[1] Nicoly Longaretti de Souza. *Introdução ao cálculo de ordem não inteira.* 2022, Trabalho de Conclusão de Curso. Orientador: Maicon José Benvenutti. 95 p.

[2] Kai Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of caputo type.*Lecture Notes in Mathematics, vol. 2004, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.

[3] Kenneth S. Miller and Bertram Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.*Wiley-Interscience, New York, 1993.