



Simpósio de Matemática em Comemoração aos 60 anos do Curso de Matemática da UFES

Complexos Simpliciais e Processamento de Sinal em Estruturas Topológicas

Giovana de Oliveira Zeni, Alcebíades Dal Col Júnior

Universidade Federal do Espírito Santo

`giovana.zeni@edu.ufes.br`, `alcebiades.col@ufes.br`

Palavras-chave: complexos simpliciais, matrizes laplacianas de alta ordem, processamento de sinal.

1. Introdução

A análise de redes complexas, que abrange de sistemas biológicos a redes de comunicação, tradicionalmente utiliza grafos para modelar a conectividade. No entanto, essa abordagem é limitada, pois muitas interações no mundo real ocorrem entre múltiplos elementos, e não apenas em pares. Para resolver isso, a topologia algébrica introduziu os complexos simpliciais como uma estrutura abrangente.

Um complexo simplicial é um conjunto de simplexos de diferentes dimensões, como vértices (0-simplexo), arestas (1-simplexo) e triângulos (2-simplexo). A propriedade de inclusão garante que se um simplexo de alta dimensão está em um complexo simplicial, todas as suas “faces” de dimensão inferior também devem estar nele.

A representação e o estudo dessas estruturas são feitos por meio de matrizes de incidência e matrizes laplacianas de alta ordem. A decomposição espectral dessas matrizes gera bases de autovetores para os espaços dos vértices, arestas, triângulos e outros. O processamento de sinais em estruturas topológicas é uma área que utiliza essas bases para analisar sinais em redes com interações de ordem superior.

2. Metodologia

O tema é abordado através de uma pesquisa teórica. A metodologia envolve a definição de um k -simplexo, que é um conjunto não ordenado de $k + 1$ vértices. Dessa

forma, um complexo simplicial é um conjunto finito de simplexes que é fechado sob a inserção de faces. A estrutura do complexo é representada por matrizes de incidência B_k , no qual a entrada $B_k(i, j)$ pode ser 0, 1, -1 dependendo se um $(k - 1)$ -simplexo é ou não um face de um k -simplexo e se suas orientações são coerentes ou opostas. A partir dessas matrizes, as matrizes laplacianas de alta ordem L_k são construídas, por exemplo $L_k = B_k^T B_k + B_{k+1} B_{k+1}^T$ para $k = 1, \dots, K - 1$. A pesquisa também explora a aplicação da decomposição espectral ($L_k = U_k \Lambda_k U_k^T$) para definir a transformada de Fourier de ordem k em complexos simpliciais.

3. Resultados Principais

Nesta seção, detalhamos os conceitos fundamentais para o processamento de sinais em estruturas topológicas:

- **Definição de Complexos Simpliciais:** Um k -simplexo σ_i^k é um conjunto não ordenado $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\}$ de $k + 1$ vértices. A face de um k -simplexo é um $(k - 1)$ -simplexo. Um *complexo simplicial* $\mathcal{X}$ é um conjunto finito de simplexes que é fechado sob a inserção de faces, ou seja, se $\sigma \in \mathcal{X}$, então todas as faces de σ também pertencem a $\mathcal{X}$.
- **Representação Matricial:** A estrutura de um complexo simplicial $\mathcal{X}$ de dimensão K (K -complexo simplicial) é totalmente descrita pelo conjunto de suas *matrizes de incidência* $\mathbf{B}_k$, $k = 1, \dots, K$. Dada uma orientação do complexo simplicial $\mathcal{X}$, as entradas da matriz de incidência $\mathbf{B}_k$ são definidas como:

$$B_k(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sigma_i^{k-1} \not\subset \sigma_j^k \\ 1, & \text{se } \sigma_i^{k-1} \subset \sigma_j^k \text{ e } \sigma_i^{k-1} \sim \sigma_j^k \\ -1, & \text{se } \sigma_i^{k-1} \subset \sigma_j^k \text{ e } \sigma_i^{k-1} \not\sim \sigma_j^k \end{cases}, \quad (1)$$

onde $\sigma_i^{k-1} \subset \sigma_j^k$ indica que σ_i^{k-1} é uma face de σ_j^k e $\sim$ que os simplexes têm a mesma orientação. As matrizes laplacianas de alta ordem são construídas a partir das matrizes de incidência. Para $k = 1, \dots, K - 1$, a matriz Laplaciana L_k é dada por $L_k = B_k^T B_k + B_{k+1} B_{k+1}^T$, onde $B_k^T B_k$ é o Laplaciano inferior e $B_{k+1} B_{k+1}^T$ é o Laplaciano superior. Além disso, temos as matrizes Laplacianas L_0 e L_K que são dadas por $L_0 = B_1 B_1^T$ e $L_K = B_K^T B_K$.

- **Análise Espectral e Processamento de Sinais:** Um sinal é definido como um mapeamento de valor real sobre os elementos de um conjunto de simplexes de cardinalidade $k + 1$, da forma $f_k : \mathcal{S}_k \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{S}_k|}$. Esses sinais podem ser representados usando a decomposição espectral das matrizes Laplacianas, $L_k = U_k \Lambda_k U_k^T$. Logo, a

transformada de Fourier de ordem k de um sinal s^k é a sua projeção nos autovetores de L_k dada por $\hat{s}^k = U_k^T s^k$.

- **Exemplo:** Considere o complexo simplicial $\mathcal{X} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T}\}$, onde $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_6\}$ e $\mathcal{T} = \{T_1\}$, ilustrado na Figura 1.

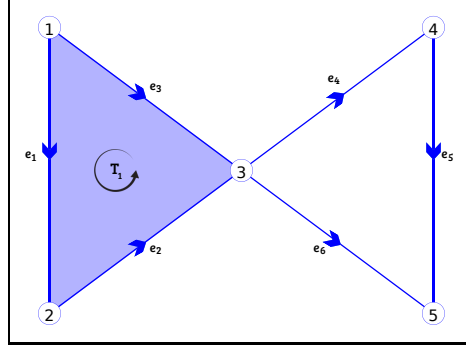


Figura 1: Exemplo de complexo simplicial.

Considere a aresta $e_3 = \{v_1, v_3\}$. As suas arestas vizinhas inferiores (lower) de ordem 1 são $\mathcal{N}_{3,l}^1 = \{e_1, e_2, e_4, e_6\}$, que são as arestas conectadas a ela por um vértice comum, e suas arestas vizinhas superiores (upper) de ordem 1 são $\mathcal{N}_{3,u}^1 = \{e_1, e_2\}$, visto que elas compartilham um 2-simplexo $T_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$. Essas relações são levadas em conta na construção das matrizes de incidência $B_1 \in \mathbb{R}^{V \times E}$ e $B_2 \in \mathbb{R}^{E \times T}$ de $\mathcal{X}$.

4. Conclusão

Neste trabalho, apresentamos os conceitos essenciais para o processamento de sinais em complexos simpliciais. A abordagem permite uma análise mais rica de dados em redes, considerando interações de ordem superior que são ignoradas pelos modelos de grafos tradicionais. Uma aplicação interessante desses conteúdos é a suavização de campos vetoriais onde um sinal $\mathbf{s}^1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^E$ representa um campo vetorial dado.

5. Referências

- [1] S. Barbarossa and S. Sardellitti. Topological signal processing: Making sense of data building on multiway relations. IEEE Signal Processing Magazine, 2020.
- [2] S. Barbarossa and S. Sardellitti. Topological signal processing over simplicial complexes. IEEE Trans. Signal Process., 2020.
- [3] M. Yang, E. Isufi, M. T. Schaub, and G. Leus. Simplicial convolutional filters. IEEE Trans. Signal Process., 2022.